ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗΣ ΚΑΙ ΕΔΑΦΟΥΣ

ΜΟΡΦΙΔΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
Διπλωματούχος Πολιτικός Μηχανικός Α.Π.Θ.

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Ι. Ε. Αβραμίδης, Καθηγητής Α.Π.Θ.

Δ. Ταλασλίδης, Καθηγητής Α.Π.Θ.

Κυρ. Αναστασιάδης, Καθηγητής Α.Π.Θ.

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Α. Κάππος, Καθηγητής Α.Π.Θ.

Κ. Πιτιλάκης, Καθηγητής Α.Π.Θ.

Ι. Δουδούμης, Αν. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Α. Αθανατοπούλου, Αναπλ. Καθηγήτρια Α.Π.Θ.

Στη μητέρα μου

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η αλματώδης αύξηση της ισχύος των ηλεκτρονικών υπολογιστών τα τελευταία χρόνια κατέστησε εφικτή την δημιουργία κατάλληλων υπολογιστικών «εργαλείων», τα οποία βοηθούν στην περαιτέρω ανάπτυξη της επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού. Πολλά από τα προβλήματα, τα οποία κατά το παρελθόν, αν και σε θεωρητικό επίπεδο είχαν λυθεί, ήταν πολύ δύσκολο να αντιμετωπιστούν πρακτικά λόγω των υπερβολικά πολλών απαιτούμενων υπολογισμών, αντιμετωπίζονται πλέον πολύ εύκολα, γρήγορα και αξιόπιστα. Ειδικότερα, στον τομέα της ανάλυσης των κτιριακών έργων μεγάλος είναι πλέον ο αριθμός των καταλλήλων προγραμμάτων μέσω των οποίων αναλύονται και διαστασιολογούνται κατασκευές οποιασδήποτε μορφολογίας και μεγέθους. Η τεράστια βιβλιοθήκη γραμμικών (μονοδιάστατων), επιπέδων και χωρικών, πεπερασμένων στοιχείων γραμμικής ή μη συμπεριφοράς, δίνει τη δυνατότητα προσομοίωσης κάθε πιθανής μορφολογίας που μπορεί να συναντήσει κάποιος μελετητής. Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα προσομοίωσης ενός κτιριακού φορέα, ίσως και λόγω των μεγάλων αβεβαιοτήτων που εμπεριέχει, είναι η προσομοίωση του συμπλέγματος φορέας θεμελίωσης – έδαφος θεμελίωσης. Είναι γνωστό ότι τα τελευταία κυρίως χρόνια, λόγω και της μεγάλης υπολογιστικής δύναμης που είναι πλέον διαθέσιμη, έχουν γίνει μεγάλα βήματα στην κατανόηση και διερεύνηση του πολύπλοκου προβλήματος που ονομάζεται «αλληλεπίδραση εδάφους – ανωδομής». Το πρόβλημα αυτό, που είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με το πρόβλημα της δυναμικής – σεισμικής απόκρισης των κατασκευών, έδωσε το κίνητρο για την κατάστρωση ισχυρότατων αλγορίθμων και μοντέλων προσομοίωσης του εδάφους, ικανών να αντιμετωπίσουν τα επιμέρους προβλήματα που αναφύονται. Ωστόσο, παρά το γεγονός ότι ο τομέας της έρευνας του προβλήματος της προσομοίωσης του συμπλέγματος εδάφους – ανωδομής σε δυναμικά προβλήματα είναι πλέον ευρύτατος, η αντιμετώπιση των απλών προβλημάτων προσομοίωσης θεμελιώσεων σε περιπτώσεις στατικής φόρτισης ή ακόμα και δυναμικής φόρτισης με τη δυναμική φασματική μέθοδο εξακολουθεί να γίνεται κυρίως με το «απλοϊκό» για τα σημερινά δεδομένα προσομοίωμα των μεμονωμένων μεταφορικών ελατηρίων (προσομοίωμα Winkler). Αξιοσημείωτο είναι μάλιστα και το γεγονός ότι, αν και από τα τέλη της δεκαετίας του ‘70 και τις αρχές της δεκαετίας του ‘80 ήταν διαθέσιμες οι κλειστές αναλυτικές λύσεις για το πρόβλημα της κάμψης της ελαστικώς εδραζόμενης δοκού επί υποβάθρου Winkler, η κωδικοποίηση τους σε λογισμικά πακέτα που χρησιμοποιούνται στην πράξη δεν κίνησε το ενδιαφέρον των μηχανικών – προγραμματιστών.

Οι παραπάνω διαπιστώσεις, καθώς και το γεγονός ότι από την μελέτη της βιβλιογραφίας προέκυψε αφενός η αδυναμία – αναξιοπιστία του προσομοιώματος του Winkler στην αντιμετώπιση συγκεκριμένων περιπτώσεων, αλλά και η ύπαρξη μιας σειράς προσομοιωμάτων θεωρητικά ακριβέστερων του προαναφερομένου, έδωσε το κίνητρο για την εκπόνηση της παρούσας διδακτορικής διατριβής. Με αυτήν επιχειρείται διερεύνηση της αξιοπιστίας και της εφαρμοσιμότητας των εδαφικών προσομοιωμάτων δυο και τριών παραμέτρων σε πρακτικά προβλήματα προσομοίωσης, ενώ παράλληλα εισάγεται και ένα νέο γενικευμένο πεπερασμένο στοιχείο δοκού με πολλαπλές δυνατότητες προσομοίωσης δομικών στοιχείων θεμελίωσης. Για την εκπλήρωση των παραπάνω στόχων πραγματοποιήθηκε σε πρώτο στάδιο μια συστηματική έρευνα της διεθνούς βιβλιογραφίας προς εντοπισμό των υπαρχόντων προσομοιωμάτων του

εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου. Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής αξιολογήθηκαν με στόχο τον εντοπισμό των προσομοιωμάτων εκείνων που εκπληρώνουν κατ' αρχήν το κριτήριο της εφαρμοσιμότητας υπό την έννοια της δυνατότητας απλής αλλά ταυτόχρονα και αξιόπιστης χρήσης τους σε συνήθεις πρακτικές εφαρμογές. Η έρευνα είναι κατά κύριο λόγο προσανατολισμένη προς το γνωστικό πεδίο της αριθμητικής ανάλυσης των κατασκευών, κάτι που σημαίνει ότι, χωρίς να παραβλέπεται και η «εδαφοτεχνική» πλευρά του προβλήματος, μεγάλο τμήμα της παρούσας διατριβής έχει ως στόχο την δημιουργία των κατάλληλων υπολογιστικών «εργαλείων» (δηλαδή μητρώων δυσκαμψίας, μεταφοράς και φόρτισης) για την προσομοίωση του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου. Η διερεύνηση της εφαρμοσιμότητας των προτεινόμενων προσομοιωμάτων θέτει και τον προβληματισμό του υπολογισμού των παραμέτρων που αυτά εισάγουν. Πρόκειται για ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα καταγεγραμμένο σε πολλές βιβλιογραφικές αναφορές επί του αντικειμένου, το οποίο δεν μπορεί εξαντληθεί στα πλαίσια της παρούσης. Ωστόσο, με τις δοκιμαστικές – απλές αριθμητικές εφαρμογές που παρατίθενται στο τέλος της διατριβής γίνεται μια προσπάθεια εφαρμογής των διαθέσιμων αναλυτικών μεθόδων για τον προσδιορισμό των παραμέτρων αυτών, ενώ γίνεται και μια διερεύνηση της ευαισθησίας των αποτελεσμάτων σε συνάρτηση με τις μεταβολές των εδαφικών παραμέτρων.

Κλείνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα της διδακτορικής μου διατριβής καθηγητή Ιωάννη Ε. Αβραμίδη για το χρόνο που μου αφιέρωσε και τις πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις του σε κάθε στάδιο της έρευνας, τους καθηγητές Κυριάκο Αναστασιάδη και Δημοσθένη Ταλασλίδη, οι οποίοι ως μέλη της επιβλέπουσας ομάδας ήταν πάντοτε πρόθυμοι να μου παρέχουν τις πολύτιμες συμβουλές τους και την εμπειρία τους, την αναπληρώτρια καθηγήτρια Ασημίνα Αθανατοπούλου – Κυριακού και τον αναπληρωτή καθηγητή Ιωάννη Δουδούμη για την παροχή οποιασδήποτε πληροφορίας ζητήθηκε από μέρους μου, αλλά και για τα χρήσιμα σχόλια τους κατά το τελευταίο στάδιο της έρευνας. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον καθηγητή Ανδρέα Καππό και τον καθηγητή Κυριαζή Πιτιλάκη για τις εποικοδομητικές τους παρατηρήσεις επί της παρούσας ως μέλη της εξεταστικής επιτροπής, αλλά και για το γεγονός ότι οι παροτρύνσεις τους κατά το πέρας των προπτυχιακών μου σπουδών ως επιβλέποντες την διπλωματική μου εργασία συνέβαλαν ουσιαστικά στην απόφαση που έλαβα τότε να κατευθυνθώ προς τον τομέα της έρευνας, αποτέλεσμα της οποίας είναι η παρούσα διατριβή. Παράλειψη μου θα ήταν τέλος, αν δεν ευχαριστούσα τον υποψήφιο διδάκτορα Πολιτικό Μηχανικό κ. Μανώλη Μπάμπουκα για την πολύτιμη βοήθεια του στην ανάπτυξη των αλγορίθμων που χρησιμοποιήθηκαν για την διενέργεια των αριθμητικών εφαρμογών της παρούσας διατριβής.

Θεσσαλονίκη, Νοέμβριος 2003 Κωνσταντίνος Ε. Μορφίδης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ **i**

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ **iii**

ΕΙΣΑΓΩΓΗ **vii**

Θέση του προβλήματος vii

Αντικείμενο της παρούσας έρευνας viii

Διάρθρωση της διατριβής xiii

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Ιστορική αναδρομή και επισκόπηση της βιβλιογραφίας. **1**

1.1. Ιστορική αναδρομή 1

1.2. Επισκόπηση της βιβλιογραφίας 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Το γενικό πρόβλημα της δοκού επί ελαστικού υποβάθρου **14**

2.1. Γενικά **14**

2.2. Προσομοίωση του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου **15**

2.2.1. Προσομοίωμα Winkler – Zimmermann 16

2.2.2. Προσομοιώματα δυο παραμέτρων 17

2.2.2.1. Προσομοίωμα Filonenko – Borodich 17

2.2.2.2. Προσομοίωμα Pasternak 19

2.2.2.3. Προσομοίωμα Hetenyi 20

2.2.2.4. «Γενικευμένο» Προσομοίωμα του Εδάφους 21

2.2.2.5. Προσομοίωμα Vlasov και οι τροποποιήσεις – επεκτάσεις του 22

2.2.2.6. Η υπόθεση του Wieghardt 32

2.2.3. Προσομοιώματα τριών και περισσοτέρων παραμέτρων 34

2.2.3.1. Προσομοίωμα Kerr 34

2.2.3.2. Προσομοίωμα Reissner 37

2.2.3.3. Γενικευμένο Προσομοίωμα του Hetenyi 40

2.2.3.4. Προσομοίωμα Vlasov δυο ελαστικά στρώματα 43

2.2.3.5. Φορμαλιστικές Μέθοδοι ανάπτυξης Προσομοιωμάτων 46

2.2.4. Προσομοιώματα Συνεχούς Ελαστικού Μέσου 56

2.2.5. Προσομοιώματα με χρήση επιφανειακών και χωρικών πεπερασμένων στοιχείων 58

2.2.6. Άλλες προσεγγίσεις του προβλήματος 62

2.2.7. Γενικές παρατηρήσεις και συγκρίσεις μεταξύ των προσομοιωμάτων. 63

2.3. Η προσομοίωση της μορφής αλληλεπίδρασης εδάφους – θεμελίωσης **76**

2.3.1. Χρονική μεταβλητότητα της εδαφικής αντίδρασης 76

2.3.2. Μονόπλευρες στηρίξεις – προβλήματα αποκόλλησης και τριβής 78

2.4. Φυσική σημασία και προσδιορισμός των παραμέτρων των προσομοιωμάτων του εδάφους 79

2.4.1. Γενικά 79

2.4.2. Το μέτρο αντίστασης του εδάφους – Πρώτη παράμετρος των προσομοιωμάτων 80

2.4.3. Η δεύτερη παράμετρος των προσομοιωμάτων 86

2.4.4. Η τρίτη παράμετρος των προσομοιωμάτων 88

2.5. Η προσομοίωση των δοκών 89

2.5.1. Ελαστική θεωρία πρώτης και δεύτερης τάξης 89

2.5.2. Θεωρίες Euler-Bernoulli και Timoshenko – θεώρηση διατμητικών παραμορφώσεων 91

2.5.3. Ταξινόμηση των δοκών συναρτήσει σχετικής δυσκαμψίας δοκού / υποβάθρου 96

2.5.4. Θεώρηση των απολύτως στερεών βραχιόνων στην προσομοίωση των πλαισίων 98

2.5.5. Ημιάκαμπτες συνδέσεις: Προσομοίωση και εφαρμογές 100

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Η γενική περίπτωση της ελαστικώς εδραζόμενης δοκού επί υποβάθρου τριών παραμέτρων 104

3.1. Εισαγωγή 104

3.2. Κατάστρωση των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος 104

3.2.1. Δοκός Timoshenko 104

3.2.1.1. Θεωρία β' τάξης 104

3.2.1.2. Θεωρία α' τάξης 108

3.2.2. Δοκός Euler – Bernoulli 109

3.2.2.1. Θεωρία β' τάξης 109

3.2.2.2. Θεωρία α' τάξης 110

3.3. Λύση και διερεύνηση των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος 111

3.3.1. Η λύση των διαφορικών εξισώσεων 111

3.3.2. Διερεύνηση των περιπτώσεων λύσης του Πίνακα 3.2α 116

3.3.2.1. Δοκός Euler – Bernoulli 116

3.3.2.2. Δοκός Timoshenko 126

3.4. Σχηματισμός των μητρώων δυσκαμψίας 134

3.4.1. Δοκός Timoshenko 134

3.4.1.1. Θεωρία β' τάξης 134

3.4.1.2. Θεωρία α' τάξης 141

3.4.2. Δοκός Euler – Bernoulli 142

3.4.2.1. Θεωρία β' τάξης 142

3.4.2.2. Θεωρία α' τάξης 146

3.5. Σχηματισμός των μητρώων φόρτισης **147**
3.5.1. Καθολική τραπεζοειδής φόρτιση 148
3.5.1.1. Δοκός Timoshenko 148
3.5.1.2. Δοκός Euler – Bernoulli 151
3.5.2. Μοναχικό φορτίο σε τυχούσα θέση 152
3.5.2.1. Δοκός Timoshenko 152
3.5.2.2. Δοκός Euler – Bernoulli 157
3.5.3. Μοναχική ροπή σε τυχούσα θέση 159
3.5.3.1. Δοκός Timoshenko 159
3.5.3.2. Δοκός Euler – Bernoulli 160
3.5.4 Ανομοιόμορφη θερμοκρασιακή μεταβολή Δt 160
3.5.4.1. Δοκός Timoshenko 161
3.5.4.2. Δοκός Euler – Bernoulli 163
3.6. Γενίκευση των μητρώων δυσκαμψίας και φόρτισης – εισαγωγή του νέου στοιχείου **164**
3.6.1. Εισαγωγή 164
3.6.2. Προσθήκη ακάμπτων βραχιόνων και στροφικών ελατηρίων 164
3.6.2.1. Σχηματισμός των μητρώων δυσκαμψίας 165
3.6.2.2. Σχηματισμός των μητρώων φόρτισης 178
3.6.3. Θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου στην εγκάρσια και στην διαμήκη διεύθυνση 180
3.6.3.1 Επιρροή του εδάφους κατά την διαμήκη διεύθυνση του στοιχείου 180
3.6.3.2. Επιρροή του εδάφους κατά την εγκάρσια διεύθυνση του στοιχείου 185
3.6.4. Θεώρηση στρεπτικών και αξονικών βαθμών ελευθερίας στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης 188
3.6.4.1. Οι στρεπτικοί βαθμοί ελευθερίας 188
3.6.4.2. Οι αξονικοί βαθμοί ελευθερίας 194
3.7. Στατική σύμπτυξη μητρώων δυσκαμψίας και φόρτισης 198

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Εφαρμογές της επίλυσης του προβλήματος κάμψης δοκών επί υποβάθρου τριών παραμέτρων **200**

4.1. Επίλυση του προβλήματος δοκού Timoshenko και Euler «απείρου» μήκους επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων. **200**
4.1.1. Δοκός Timoshenko υπό μοναχική κατακόρυφη δύναμη 201
4.1.2. Δοκός Timoshenko υπό μοναχική ροπή 203
4.1.3. Ειδίκευση των σχέσεων για την περίπτωση δοκού Euler – Bernoulli 204
4.2. Αναφορά στα προβλήματα κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων **205**
4.2.1. Σύντομη αναφορά στην κατάστρωση και επίλυση των εξισώσεων του προβλήματος 205

4.2.2. Επισήμανση των διαθέσιμων στοιχείων και των κενών της βιβλιογραφίας 209

4.3. Προσομοίωμα Vlasov με τη θεώρηση και των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου. 211

4.3.1. Η υπάρχουσα προσέγγιση του προβλήματος 212

4.3.2. Πρόταση νέας προσέγγισης του προβλήματος 217

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. Αριθμητικές Εφαρμογές 227

5.1. Εισαγωγή 227

5.2. Σύντομη επισκόπηση χαρακτηριστικών παραδειγμάτων της Βιβλιογραφίας 228

5.2.1. Δοκοί επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων 228

5.2.2. Δοκοί επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων 230

5.3. Παραδείγματα εφαρμογής και συγκρίσεις των αποτελεσμάτων των διαφόρων προσομοιωμάτων 237

5.3.1. Παραδείγματα Ομάδας 1: Δοκοί απείρου μήκους 238

5.3.1.1. Παράδειγμα 1α. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη δύναμη 240

5.3.1.2. Παράδειγμα 1β. Δοκός υπό μοναχική ροπή 258

5.3.2. Παραδείγματα Ομάδας 2: Μεμονωμένες Δοκοί Πεπερασμένου μήκους 267

5.3.2.1. Παράδειγμα 2α: Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση 267

5.3.2.2. Παράδειγμα 2β: Δοκός υπό μοναχική ροπή 288

5.3.2.3. Παράδειγμα 2γ: Δοκός με σύνθετη φόρτιση 293

5.3.3. Παραδείγματα Ομάδας 3: Εφαρμογές του Προτεινόμενου Γενικευμένου στοιχείου 312

5.3.3.1. Παράδειγμα 3α: Απλό Πλαίσιο στα πλαίσια της θεωρίας α' και β' τάξης 312

5.3.3.2. Παράδειγμα 3β: Τριόροφο πλαίσιο με οριζόντια και κατακόρυφη φόρτιση στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης 347

5.3.3.3. Παράδειγμα 3γ: Ελαστική ευστάθεια πασσαλοθεμελίωσης 424

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. Συμπεράσματα 429

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 444

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. Μητρώα Δυσκαμψίας, Μεταφοράς και Φόρτισης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων **460**

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β. Μητρώα Δυσκαμψίας, και Φόρτισης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων **478**

ENGLISH SUMMARY 487

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Θέση του προβλήματος

Η μελέτη των φορέων θεμελίωσης αποτέλεσε και αποτελεί ένα κεφαλαιώδους σημασίας τομέα ενασχόλησης του Πολιτικού Μηχανικού, καθώς είναι άρρηκτα συνδεδεμένη και με την ανάγκη πρόβλεψης της συμπεριφοράς του εδάφους, η οποία απαιτεί ειδικές γνώσεις και εμπειρία. Το κάθε μορφής δομικό έργο εδράζεται επί του εδάφους μέσω ενός φορέα θεμελίωσης, ο οποίος θα πρέπει να μεταβιβάζει με ασφάλεια στο έδαφος τις φορτίσεις της ανωδομής (φορτίσεις στατικού ή δυναμικού τύπου, οριζόντιες ή κατακόρυφες). Η πιο γενικής μορφής ταξινόμηση των θεμελιώσεων είναι αυτή που τις διακρίνει σε επιφανειακές, οι οποίες μεταβιβάζουν τα φορτία στο έδαφος μόνον δια μέσου της επιφάνειας της βάσης τους (π.χ. θεμελιώσεις κτιρίων με μεμονωμένα πέδιλα και συνδετήριες δοκούς, με εσχάρες πεδιλοδοκών ή με γενικές κοιτοστρώσεις), και σε βαθιές, οι οποίες μεταβιβάζουν τα φορτία στο έδαφος και με την πλευρική τους επιφάνεια (στην κατηγορία αυτή ανήκουν κυρίως οι πασσαλοθεμελιώσεις).

Κοινό παρονομαστή και για τις δυο αυτές κατηγορίες αποτελεί το γεγονός ότι η ανάλυση τους εντάσσεται σε μια κατηγορία προβλημάτων, ζητούμενο των οποίων αποτελεί η περιγραφή της συμπεριφοράς δοκών ή πλακών που εδράζονται επί ελαστικού και ανελαστικού υποβάθρου. Τα προβλήματα αυτά αποτελούν με τη σειρά τους ειδική περίπτωση της μεγάλης κατηγορίας «προβλημάτων αλληλεπίδρασης μεταξύ παραμορφώσιμων ελαστικών ή όχι σωμάτων». Η πλήρης επίλυση τους απαιτεί τον προσδιορισμό των τάσεων και των παραμορφώσεων στο εσωτερικό των σωμάτων αυτών καθώς και τον προσδιορισμό των μετακινήσεων (ειδικότερα των κατακορύφων μετακινήσεων – καθιζήσεων στην περίπτωση της μελέτης θεμελιώσεων) και των τάσεων σε όλη την επιφάνεια επαφής. Επομένως, η ανάλυση των θεμελιώσεων είναι ένα πρόβλημα με τρία σκέλη, τα οποία είναι η προσομοίωση του φορέα θεμελίωσης, η προσομοίωση του εδάφους και η προσομοίωση της μορφής της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης στην διεπιφάνεια επαφής.

Η προσομοίωση του φορέα θεμελίωσης ως ενός συμπλέγματος δομικών στοιχείων αποτελεί ένα πρόβλημα που μπορεί σήμερα να αντιμετωπιστεί εύκολα και αξιόπιστα, καθώς τα απαραίτητα για την λύση του υπολογιστικά «εργαλεία» είναι πλέον διαθέσιμα και ενσωματωμένα σε ένα μεγάλο αριθμό κατάλληλων «πακέτων» λογισμικού. Αντίθετα, η προσομοίωση του εδάφους εξακολουθεί να περιέχει σημαντικές αβεβαιότητες κατά τη διαδικασία επιλογής των παραμέτρων που θα πρέπει να ληφθούν υπόψη για την όσο το δυνατόν πιο αξιόπιστη περιγραφή της συμπεριφοράς του. Είναι γνωστό ότι το έδαφος είναι ένα ανομοιογενές, ανισότροπο και μη ελαστικό υλικό. Επομένως, η προσπάθεια να ληφθούν υπόψη όλες οι παραπάνω ιδιότητες οδηγεί σε προσομοιώματα εδαφικής συμπεριφοράς που περιγράφονται με πολύπλοκες διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες στην καλύτερη των περιπτώσεων αντιμετωπίζονται μεν αλλά πολύ δύσκολα. Στην περίπτωση, βέβαια, ανάλυσης θεμελιώσεων ειδικών έργων μεγάλης σημασίας, όπως είναι οι γέφυρες μεγάλων ανοιγμάτων ή οι εγκαταστάσεις παραγωγής ενέργειας, η προσφυγή σε σύνθετα προσομοιώματα εδαφικής συμπεριφοράς αλλά και η χρήση δυναμικών μη γραμμικών αναλύσεων με τη βοήθεια ειδικών προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί μονόδρομο. Ειδικότερα μάλιστα στις μέρες μας, οι πολύ

μεγάλες πλέον δυνατότητες των ηλεκτρονικών υπολογιστών αλλά και ο συνεχώς αυξανόμενος αριθμός των διαθέσιμων υπολογιστικών «εργαλείων» καθιστούν τέτοιου τύπου σύνθετες αναλύσεις εφικτές. Ωστόσο, στις συνήθεις πρακτικές εφαρμογές η παραδοχή της ελαστικής συμπεριφοράς του εδάφους, η οποία απλοποιεί σε πολύ μεγάλο βαθμό τις εξισώσεις των προσομοιωμάτων, εξακολουθεί να γνωρίζει ευρύτατη εφαρμογή και να οδηγεί σε αποδεκτά για την συμβατική πράξη αποτελέσματα. Στα πλαίσια της παραδοχής ελαστικής συμπεριφοράς για το έδαφος, έχει καταστρωθεί κατά το παρελθόν μια σειρά προσομοιωμάτων από τα οποία στην πράξη έχει επικρατήσει το προσομοίωμα του Winkler (ή προσομοίωμα μιας παραμέτρου) κυρίως λόγω της απλότητας του σε επίπεδο εφαρμογής αλλά και λόγω του γεγονότος ότι η βασική του «σύλληψη» είναι πολύ εποπτική και ανταποκρίνεται στην διαισθητική αντίληψη της έννοιας ενός ελαστικά παραμορφώσιμου σώματος. Ωστόσο, οι καταγεγραμμένες αδυναμίες του προσομοιώματος αυτού καθώς και η μη επιτυχής αντιμετώπιση με αυτό ορισμένων περιπτώσεων οδήγησε κατά το παρελθόν σε προσπάθειες ανάπτυξης προσομοιωμάτων αφενός εξίσου – όσο είναι δυνατόν – απλών και αφετέρου πιο αξιόπιστων στην περιγραφή της εδαφικής συμπεριφοράς. Οι δυο αυτές απαιτήσεις είναι αλληλοσυγκρουόμενες, διότι όσο μεγαλώνει το πλήθος των απλοποιητικών παραδοχών που γίνονται κατά την ανάπτυξη ενός προσομοιώματος της εδαφικής συμπεριφοράς, τόσο πιο πολύ απομακρύνεται αυτό από την πραγματικότητα. Επομένως, η διερεύνηση της εφαρμοσιμότητας και της αξιοπιστίας ορισμένων από τα διαθέσιμα στην βιβλιογραφία προσομοιωμάτων της εδαφικής συμπεριφοράς, αποτελεί ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον πεδίο έρευνας, με απώτερο στόχο την γεφύρωση του χάσματος μεταξύ του πολύ απλοποιημένου προσομοιώματος του Winkler από τη μια πλευρά και των σύνθετων προσομοιωμάτων πεπερασμένων στοιχείων από την άλλη, τα οποία τοποθετούνται μεν στον αντίποδα όσον αφορά στην προσφερόμενη ακρίβεια, αλλά απαιτούν ταυτόχρονα μεγαλύτερο χρόνο και περισσότερες γνώσεις κατά την εισαγωγή των δεδομένων και την επεξεργασία των αποτελεσμάτων.

Αντικείμενο της παρούσας έρευνας

Ο προβληματισμός που εκτέθηκε παραπάνω οριοθετεί και τα βασικά αντικείμενα της παρούσας διατριβής που συνίστανται από τα παρακάτω σημεία:

α. Διερεύνηση της βιβλιογραφίας που αφορά το αντικείμενο της προσομοίωσης του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου, συγκέντρωση όλων των σχετικών προσομοιωμάτων που έχουν κατά καιρούς προταθεί, και ιδιαίτερη μελέτη της βιβλιογραφίας που αφορά το πρόβλημα της ελαστικώς εδραζόμενης δοκού.

β. Με δεδομένο το γεγονός ότι εδαφικό προσομοίωμα του Winkler, που λόγω της απλότητάς του έχει καθιερωθεί ευρέως στις συνήθεις πρακτικές εφαρμογές κρίνεται σε πολλές περιπτώσεις ανεπαρκές όπως προέκυψε και από την διερεύνηση της βιβλιογραφίας, το επόμενο στάδιο της έρευνας εστιάστηκε στην μελέτη και αξιολόγηση των υπολοίπων εδαφικών προσομοιωμάτων, με στόχο την διερεύνηση αφενός της δυνατότητας εφαρμογής τους στις συνήθεις πρακτικές εφαρμογές, και αφετέρου της δυνατότητας κάλυψης των αδυναμιών του. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε για το σκοπό αυτό είναι η εξής:

Καταρχήν πραγματοποιήθηκε η μελέτη των προσομοιωμάτων και η κατάταξη τους σε κατηγορίες με βάση τη σχέση που συνδέει τις κατακόρυφες δυνάμεις με τις κατακόρυφες μετακινήσεις στην επιφάνεια

του εδάφους (Σχέση δυνάμεων – μετακινήσεων). Από την διαδικασία αυτή προέκυψε το συμπέρασμα, ότι τα εδαφικά προσομοιώματα μπορούν να καταταγούν σε κατηγορίες ανάλογα με των αριθμό των παραμέτρων που υπεισέρχονται στην σχέση δυνάμεων – μετακινήσεων τους. Με το κριτήριο αυτό τα προσομοιώματα διακρίνονται σε προσομοιώματα μιας, δυο, τριών ή και περισσοτέρων παραμέτρων. Κατά δεύτερο λόγο διερευνήθηκε η δυνατότητα της πρακτικής τους εφαρμογής, με πρώτο κριτήριο τη ευχέρεια που αυτά παρέχουν κατά την κατάστρωση και τον προγραμματισμό των εξισώσεων τους. Με βάση το κριτήριο αυτό κρίθηκε ότι τόσο τα προσομοιώματα των δυο όσο και τα αντίστοιχα των τριών παραμέτρων είναι αποδεκτά, καθώς διέπονται από εξισώσεις που είναι εφικτό να επιλυθούν σχετικά εύκολα με αναλυτικές διαδικασίες. Όσον αφορά τη δυνατότητα των προσομοιωμάτων αυτών στην κάλυψη των αδυναμιών του προσομοιώματος του Winkler, μελετήθηκε καταρχήν το θεωρητικό τους υπόβαθρο. Από την μελέτη αυτή προέκυψε το βασικό συμπέρασμα ότι τόσο τα προσομοιώματα των δυο όσο και τα προσομοιώματα των τριών παραμέτρων καλύπτουν το βασικό μειονέκτημα του προσομοιώματος του Winkler. Το μειονέκτημα αυτό απορρέει από το γεγονός ότι το εν λόγω προσομοίωμα αποτελείται από ανεξάρτητα μεταξύ τους κατακόρυφα μεταφορικά ελατήρια, κάτι που συνεπάγεται ασυνέχεια στις μετακινήσεις της επιφάνειας του εδάφους και επιπροσθέτως οδηγεί σε αδυναμία συνυπολογισμού της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν του φορέα θεμελίωσης. Επιπλέον, τα προσομοιώματα των τριών παραμέτρων παρέχουν την ευχέρεια στο χρήστη τους να επιλέξει αυτός τον βαθμό συνέχειας των κατακορύφων μετακινήσεων της επιφάνειας του εδάφους, προσεγγίζοντας έτσι πιο πολύ τα διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων διαφόρων κατηγοριών εδάφους.

Με βάση τα παραπάνω οριοθετήθηκε με μεγαλύτερη σαφήνεια ο στόχος της περαιτέρω έρευνας στα πλαίσια της παρούσας διατριβής που συνίσταται στην μελέτη του προβλήματος της κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου δυο ή τριών παραμέτρων.

γ. Από τη διερεύνηση της βιβλιογραφίας που αφορά το πρόβλημα της κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου προσομοιούμενου με προσομοιώματα μιας, δυο ή και τριών παραμέτρων, προέκυψαν τα παρακάτω συμπεράσματα:

Το πρόβλημα της κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου μιας παραμέτρου (προσομοίωμα Winkler ή, ορθότερα, προσομοίωμα Winkler – Zimmermann) τόσο στα πλαίσια της θεωρίας α’ τάξης όσο και στα πλαίσια της θεωρίας β’ τάξης είναι πλήρως εξαντλημένο, υπό την έννοια ότι είναι διαθέσιμα όλα τα αντίστοιχα μητρώα δυσκαμψίας, μεταφοράς και φόρτισης.

Το αντίστοιχο πρόβλημα της κάμψης δοκών Euler ή Timoshenko επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων είναι μεν σε μεγάλο βαθμό εξαντλημένο αλλά όχι και πλήρως, καθώς εντοπίστηκαν ορισμένα συγκεκριμένα κενά.

Τέλος, όσον αφορά το πρόβλημα της κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων, η έρευνα της βιβλιογραφίας έδειξε μια σχετική έλλειψη αποτελεσμάτων επί του προβλήματος, καθώς δεν εντοπίστηκαν αντίστοιχα μητρώα δυσκαμψίας, μεταφοράς και φόρτισης. Ωστόσο, θα πρέπει να τονιστεί ότι το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων έχει αποτελέσει αντικείμενο έρευνας κυρίως από εδαφοτεχνικής πλευράς, και μάλιστα υπάρχουν αρκετά πρόσφατες αναφορές με αξιοσημείωτα

αποτελέσματα. Το γεγονός αυτό έδωσε το ερέθισμα για ενασχόληση με το αντικείμενο και από την σκοπιά της μητρωϊκής ανάλυσης των κατασκευών, προκειμένου να δοθεί μια ώθηση για περαιτέρω έρευνα επί του συγκεκριμένου αντικειμένου.

Με δεδομένα τα αποτελέσματα της παραπάνω βιβλιογραφικής έρευνας, το επόμενο στάδιο της ερευνητικής διαδικασίας αποφασίστηκε να είναι η πλήρης επίλυση, με χρήση της μητρωικής μεθόδου, του προβλήματος της κάμψης δοκών ελαστικώς εδραζόμενων επί υποβάθρου προσομοιούμενου με προσομοιώματα τριών παραμέτρων καθώς και η συμπλήρωση των κενών που εντοπίστηκαν όσον αφορά το αντίστοιχο πρόβλημα των προσομοιωμάτων δυο παραμέτρων. Θα πρέπει να τονιστεί ότι για την επίλυση του προβλήματος επελέγη κατά κύριο λόγο η ακριβής αναλυτική διαδικασία. Η επιλογή αυτή εξυπηρετεί πλήρως το κριτήριο της απαιτούμενης ακρίβειας αλλά και της απλότητας, καθώς δίνει τη δυνατότητα ελαχιστοποίησης του αριθμού των απαιτούμενων πεπερασμένων στοιχείων, αφού για την προσομοίωση κάθε φατνώματος του δομικού συμπλέγματος δοκός – έδαφος αρκεί η χρήση ενός και μοναδικού στοιχείου. Με τον τρόπο αυτόν η δυσκολία κατά τη διαδικασία της προσομοίωσης περιορίζεται μόνο στο στάδιο σχηματισμού των απαραίτητων μητρώων, το οποίο διενεργείται όμως μόνον μια φορά. Επειδή όμως η χρήση της ακριβούς επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος είναι εφικτή ουσιαστικά μόνον σε προβλήματα στα οποία οι παράμετροι (είτε αυτές αναφέρονται στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των διατομών των δοκών, είτε αναφέρονται στις παραμέτρους του εδαφικού προσομοιώματος) είναι σταθερές κατά μήκος του στοιχείου, θεωρείται απαραίτητη και η αντιμετώπιση του με αλγεβρικές / προσεγγιστικές συναρτήσεις παρεμβολής. Για το λόγο αυτόν, στα πλαίσια της παρούσας διατριβής παρουσιάζεται και αυτή η εκδοχή της διαδικασίας επίλυσης, έτσι ώστε να είναι εφικτή και η αντιμετώπιση προβλημάτων δοκών με μεταβλητή κατά μήκος του άξονα τους διατομή, αλλά και προβλημάτων έδρασης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου με χωρικά μεταβλητές παραμέτρους. Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε προκείμενου να επιτευχθεί ο σχηματισμός των ζητουμένων μητρώων δυσκαμψίας, μεταφοράς και φόρτισης ξεκινώντας από τις βασικές εξισώσεις του εδαφικού προσομοιώματος και τις εξισώσεις ισορροπίας της δοκού, είναι συνοπτικά η εξής:

- Κατάστρωση των εξισώσεων ισορροπίας του συστήματος δοκός – ελαστικό υπόβαθρο, για δοκούς Euler και Timoshenko τόσο στα πλαίσια της θεωρίας α’ όσο και στα πλαίσια της θεωρίας β’ τάξης. Για το σκοπό αυτό έγινε χρήση της αρχής της στάσιμης τιμής του ελαστικού δυναμικού του συστήματος δοκός – ελαστικό υπόβαθρο. Η επιλογή αυτή έγινε, διότι η εφαρμογή της εν λόγω αρχής οδηγεί και στον ταυτόχρονο αξιόπιστο σχηματισμό των συνοριακών συνθηκών του εκάστοτε προβλήματος.
- Αναλυτική επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας. Από την διαδικασία αυτή, προέκυψε ένας σημαντικός αριθμός διαφορετικών περιπτώσεων λύσης, οι οποίες εξαρτώνται από τον συνδυασμό των τιμών που μπορούν να λάβουν οι εδαφικές παράμετροι, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διατομής, και οι ελαστικές σταθερές του υλικού της δοκού. Προκειμένου να αποκλειστούν οι περιπτώσεις λύσης που είναι αδύνατον να εμφανιστούν είτε μαθηματικώς (με βάση δηλαδή τα πρόσημα αλλά και το εύρος των τιμών που μπορούν να λάβουν οι διάφορες παράμετροι του προβλήματος), είτε πρακτικώς (με

βάση τις συνήθεις τιμές των παραμέτρων) διενεργήθηκε μια εκτενής διερεύνηση. Από την διερεύνηση αυτή προέκυψαν οι περιπτώσεις λύσης με τις οποίες πραγματοποιήθηκαν τα επόμενα στάδια της διαδικασίας τα οποία είναι:

i. Κατάστρωση των μητρώων δυσκαμψίας βάσει δυο μεθόδων: καταρχήν με χρήση των συναρτήσεων που αποτελούν την ακριβή λύση των διαφορικών εξισώσεων που καταστρώθηκαν κατά το προηγούμενο στάδιο («ακριβή» μητρώα δυσκαμψίας), και κατά δεύτερο λόγο με βάση αλγεβρικές / προσεγγιστικές συναρτήσεις παρεμβολής.

ii. Κατάστρωση των αντίστοιχων μητρώων μεταφοράς με τα οποία είναι δυνατός ο προσδιορισμός είτε των εντατικών μεγεθών είτε των μεγεθών μετακίνησης σε κάθε σημείο του ανοίγματος της δοκού.

iii. Κατάστρωση των μητρώων φόρτισης για τραπεζοειδή φόρτιση σε όλο το εύρος ή σε τμήμα του ανοίγματος, για μοναχικό φορτίο και μοναχική ροπή σε τυχούσα θέση, καθώς και για ανομοιόμορφη μεταβολή της θερμοκρασίας μεταξύ της άνω και της κάτω ίνας της δοκού. Για τον σχηματισμό των μητρώων φόρτισης έγινε κατά πρώτο λόγο χρήση της μεθόδου των αρχικών παραμέτρων, στα πλαίσια της οποίας γίνεται χρήση των μητρώων μεταφοράς, και κατά δεύτερο χρήση των προσεγγιστικών συναρτήσεων παρεμβολής.

δ. Εφαρμογή της λύσης της διαφορικής εξίσωσης που διέπει το πρόβλημα της κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων:

- Στην επίλυση προβλημάτων κάμψης δοκών «απείρου» μήκους που είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην αξιολόγηση των εδαφικών προσομοιωμάτων,
- Στην κάλυψη των κενών της βιβλιογραφίας που αφορά το πρόβλημα της κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων,
- Στην επίλυση του προβλήματος κάμψης δοκών επί του διευρυμένου προσομοιώματος Vlasov με την θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του ελαστικού υποβάθρου. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι στα πλαίσια της παρούσας διατριβής παρουσιάζεται και μια διαφορετική μαθηματική προσέγγιση – τεκμηρίωση του εν λόγω προσομοιώματος.

ε. Διερεύνηση μέσω απλών αλλά χαρακτηριστικών παραδειγμάτων της υπεροχής των προσομοιωμάτων τριών αλλά και δυο παραμέτρων έναντι του προσομοιώματος του Winkler μέσω της σύγκρισης των αποτελεσμάτων τους με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που αντλούνται από προσομοιώματα αναφοράς, τα οποία κατά περίπτωση είναι είτε προσομοιώματα που προκύπτουν με βάση της εξισώσεις της θεωρίας ελαστικότητας είτε, κατά κύριο λόγο, προσομοιώματα που προκύπτουν από την χρήση επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων. Επιπλέον, κατά το στάδιο των αριθμητικών εφαρμογών ελέγχεται και μια σειρά διαφορετικών εκδοχών των προσομοιωμάτων δυο παραμέτρων. Πρόκειται για το προσομοίωμα του Vlasov και τις παραλλαγές του που εμφανίζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς από την εφαρμογή τους προκύπτουν οι τιμές των παραμέτρων που υπεισέρχονται στα προσομοιώματα των δυο παραμέτρων. Η πρακτική εφαρμογή μιας από τις παραλλαγές αυτές (τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov, των Jones και Xenophontos), η οποία αποτελεί την μοναδική διαθέσιμη στη βιβλιογραφία αναλυτική μέθοδο προσδιορισμού των τιμών της δεύτερης παραμέτρου των εδαφικών προσομοιωμάτων, οδηγεί στις τιμές

που χρησιμοποιήθηκαν στα πλαίσια των επιλύσεων των παραδειγμάτων της παρούσας διατριβής. Επιπλέον πραγματοποιείται και μια συστηματική διερεύνηση του βαθμού συσχέτισης των παραμέτρων του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων, και επιχειρείται η εξεύρεση συγκεκριμένων τιμών τους, με τις οποίες επιτυγχάνεται η σύγκλιση των αποτελεσμάτων του προσομοιώματος, με τα αποτελέσματα που θεωρούνται ως αποτελέσματα αναφοράς.

Πέραν της παραπάνω ερευνητικής διαδικασίας, στα πλαίσια της παρούσας διατριβής γίνεται και συνθετική αντιμετώπιση μιας σειράς πρακτικών προβλημάτων, τα οποία προκύπτουν κατά την προσομοίωση του δομικού συμπλέγματος κυρίως της θεμελίωσης αλλά και της ανωδομής. Με τον όρο «συνθετική» αντιμετώπιση εννοείται η κατάστρωση των μητρώων δυσκαμψίας και φόρτισης ενός γενικευμένου πεπερασμένου στοιχείου δοκού με τις εξής δυνατότητες:

- της θεώρησης ή μη των διατμητικών παραμορφώσεων (δοκός Euler ή Timoshenko),
- της θεώρησης ή μη απολύτως στερεών βραχιόνων στο ένα από τα δυο ή και στα δυο άκρα του,
- τοποθέτησης των βασικών κόμβων του σε οποιοδήποτε σημείο εντός του εύρους των απολύτως στερεών βραχιόνων,
- της θεώρησης ή μη στροφικών ελατηρίων στα σημεία σύνδεσης του εσωτερικού τμήματος του στοιχείου με τους απολύτως στερεούς βραχίονες του,
- της θεώρησης ή μη ελαστικού υποβάθρου μιας, δυο ή τριών παραμέτρων,
- της θεώρησης ή μη της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν (κατά την εγκάρσια και τη διαμήκη διεύθυνση) του στοιχείου,
- της θεώρησης ή μη των αξονικών και στρεπτικών βαθμών ελευθερίας προκειμένου να χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα ανάλυσης πασσάλων και εσχάρων πεδιλοδοκών,
- της ανάλυσης είτε με βάση την θεωρία β’ τάξης είτε με βάση τη θεωρία α’ τάξης.

Με το στοιχείο αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί μια μεγάλη ποικιλία προβλημάτων προσομοίωσης:

- Η δυνατότητα της θεώρησης των διατμητικών παραμορφώσεων βοηθάει στην ακριβέστερη προσομοίωση υψίκορμων δοκών που συναντώνται τακτικά σε φορείς θεμελίωσης.
- Η ενσωμάτωση των απολύτως στερεών και ελαστικώς εδραζόμενων βραχιόνων δίνει τη δυνατότητα αυτόματης προσομοίωσης των σωμάτων των πεδίλων, αλλά και των κόμβων πεδιλοδοκών όπου το μήκος των τμημάτων που είναι πρακτικώς άκαμπτα είναι μεγάλο και δεν πρέπει να αγνοείται. Δεν πρέπει βέβαια να αγνοείται και η εφαρμογή των απολύτως στερεών βραχιόνων στην προσομοίωση τοιχωμάτων της ανωδομής με το διαδεδομένο πλέον μοντέλο του ισοδυνάμου πλαισίου.
- Η ταυτόχρονη ενσωμάτωση των απολύτως στερεών βραχιόνων και των στροφικών ελατηρίων δίνει τη δυνατότητα λεπτομερούς προσομοίωσης κόμβων στοιχείων με ημιάκαμπτες συνδέσεις, οι οποίες συναντώνται σε κόμβους μεταλλικών κατασκευών. Επιπλέον, οι ημιάκαμπτες συνδέσεις αποτελούν ένα υπολογιστικό εργαλείο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε μη γραμμικές αναλύσεις, εάν χρησιμοποιηθεί μη γραμμικός νόμος συμπεριφοράς για τα στροφικά ελατήρια.
- Η κατάστρωση των εξισώσεων στα πλαίσια της θεωρίας β’ τάξης δίνει τη δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων ελαστικής ευστάθειας.

– Η ενσωμάτωση συνεχώς κατανεμημένων αξονικών και στρεπτικών ελατηρίων δίνει τη δυνατότητα χρήσης του στοιχείου και σε προβλήματα πασσάλων (έστω προσεγγιστικά) και εσχάρων πεδιλοδοκών αντίστοιχα.

Πέραν των παραπάνω εφαρμογών, θα πρέπει να γίνει μνεία και σε μια σειρά άλλων προβλημάτων, η αντιμετώπιση των οποίων επιτυγχάνεται με την επίλυση του προβλήματος της ελαστικώς εδραζόμενης δοκού, όπως η μελέτη πλωτών γεφυρών και γενικότερα πλωτών κατασκευών, η μελέτη αγωγών εδραζόμενων επί ή ενσωματωμένων εντός του εδάφους, η μελέτη καταστρωμάτων αυτοκινητοδρόμων, η μελέτη πλακών Levy, η μελέτη δοκού που εδράζεται επί συστήματος εγκαρσίων δοκών ομοιόμορφα και σχετικά πυκνά τοποθετημένων (τέτοιου τύπου συστήματα συναντώνται στις κατασκευές των σιδηροτροχιών των σιδηροδρόμων, αλλά και στις κατασκευές των πλοίων). Αξίζει επίσης να σημειωθεί, ότι οι εξισώσεις που προκύπτουν από την υπόθεση του Winkler αποτελούν την ακριβή μαθηματική διατύπωση και για το πρόβλημα των αξονοσυμμετρικά φορτισμένων κυκλικών λεπτότοιχων σωλήνων, και αγωγών.

Διάρθρωση της διατριβής

Η παρούσα διατριβή, με βάση του στόχους που τέθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, διακρίνεται σε τρεις ενότητες:

Η πρώτη ενότητα, η οποία αποτελείται από τα Κεφάλαια 1 και 2, έχει ως αντικείμενο την ιστορική αναδρομή και την επισκόπηση της βιβλιογραφίας που αφορά το αντικείμενο της ελαστικώς εδραζόμενης δοκού επί υποβάθρου προσομοιούμενου με διαθέσιμα μηχανικά προσομοιώματα (Κεφάλαιο 1), αλλά και την αναλυτική παρουσίαση και περιγραφή των προσομοιωμάτων αυτών (Κεφάλαιο 2). Πιο συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 2, πέραν της παρουσίασης των μαθηματικών εκφράσεων των διαφόρων εδαφικών προσομοιωμάτων επιχειρείται η μεταξύ τους σύγκριση τους βάσει των παραδοχών στις οποίες βασίζονται. Επιπλέον, παρουσιάζονται τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα τους, όπως έχουν καταγραφεί σε σχετικές δημοσιεύσεις κατά το παρελθόν. Γίνεται επίσης μια μικρή αναφορά στο πρόβλημα του προσδιορισμού των τιμών που θα πρέπει να δίνονται στις διάφορες παραμέτρους των εδαφικών προσομοιωμάτων, και παρουσιάζονται διάφορες προσεγγίσεις επί του προβλήματος αυτού. Τέλος, σε τμήμα της ενότητας αυτής γίνεται μια συνοπτική αναφορά στο πρόβλημα της προσομοίωσης των στοιχείων δοκού με ημιάκαμπτες συνδέσεις, καθώς στόχος της παρούσης διατριβής είναι και η παρουσίαση ενός γενικευμένου πεπερασμένου στοιχείου δοκού ικανού να αντιμετωπίσει με απλό και αξιόπιστο τρόπο διάφορα προβλήματα προσομοίωσης μιας κατασκευής.

Η δεύτερη ενότητα αποτελείται από τα Κεφάλαια 3 και 4 που αποτελούν το θεωρητικό τμήμα της παρούσας έρευνας. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η διαδικασία με την οποία επιτυγχάνεται η κατάστρωση των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα της κάμψης δοκών Euler και Timoshenko επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων στα πλαίσια της θεωρίας α’ και β’ τάξης. Ακολουθεί η μαθηματική διερεύνηση των διαφόρων περιπτώσεων λύσης των εξισώσεων αυτών, από την οποία προκύπτει ποιες είναι οι λύσεις που ενδιαφέρουν για τις πρακτικές εφαρμογές και ποιες όχι. Κατόπιν παρουσιάζεται η διαδικασία σχηματισμού των μητρώων δυσκαμψίας και φόρτισης (για τις συνήθεις περιπτώσεις φόρτισης),

οι τελικές εκφράσεις των οποίων δίνονται στο Παράρτημα Α. Παρουσιάζεται επίσης η διαδικασία σχηματισμού των μητρώων δυσκαμψίας και φόρτισης του προτεινόμενου νέου γενικευμένου στοιχείου δοκού, στα πλαίσια της οποίας γίνεται και η κατάστρωση των σχέσεων μέσω των οποίων επιτυγχάνεται η θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου τόσο στη διαμήκη όσο και στην εγκάρσια προς τον άξονά του διεύθυνση. Στο τέλος του τρίτου Κεφαλαίου παρατίθεται η διαδικασία της στατικής σύμπτυξης των μητρώων δυσκαμψίας και φόρτισης των στοιχείων επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων, διαδικασία που είναι απαραίτητη προκειμένου να καταστούν τα στοιχεία αυτά συμβατά με τα κλασικά στοιχεία δοκού κατά την σύνθεση των μητρώων δυσκαμψίας και φόρτισης ενός φορέα.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται εφαρμογές της επίλυσης των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα της κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται οι εκφράσεις από τις οποίες υπολογίζονται τα εντατικά μεγέθη και τα μεγέθη μετακίνησης δοκών Timoshenko και Euler «απείρου» μήκους. Κατόπιν, γίνεται μια αναφορά στα προβλήματα των δοκών επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων και αποδεικνύεται η σχέση της λύσης των προβλημάτων αυτών με την λύση των αντιστοίχων προβλημάτων των δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων. Διενεργείται επίσης μια εποπτική διερεύνηση των περιπτώσεων λύσης των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα, και εντοπίζονται τα κενά της βιβλιογραφίας όσον αφορά τα μητρώα δυσκαμψίας και φόρτισης. Η κάλυψη των κενών αυτών υπό το πρίσμα της συμβατότητας τους με τις εξισώσεις του προτεινόμενου στοιχείου παρουσιάζεται στο Παράρτημα Β. Στο τέλος του κεφαλαίου γίνεται μια αναφορά στο πρόβλημα της κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου Vlasov με την θεώρηση και των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου. Κατ' αρχήν παρουσιάζεται συνοπτικά η υπάρχουσα προσέγγιση του προβλήματος. Από αυτήν προκύπτει το συμπέρασμα, ότι η αντιμετώπισή του επιτυγχάνεται με την επίλυση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης με την οποία αντιμετωπίζεται και το πρόβλημα της κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων. Κατόπιν παρουσιάζεται αναλυτικά και μια νέα προσέγγιση του ιδίου προβλήματος από την οποία προκύπτουν χρήσιμα συμπεράσματα που παρατίθενται στο τέλος του κεφαλαίου.

Η τρίτη ενότητα της διατριβής αποτελείται από τα Κεφάλαια 5 και 6, στα οποία παρουσιάζονται οι αριθμητικές εφαρμογές και τα τελικά συμπεράσματα αντίστοιχα. Στο πρώτο τμήμα του Κεφαλαίου 5 παρουσιάζονται τα προσομοιώματα που θα χρησιμοποιηθούν κατά τις αναλύσεις, καθώς και το χρησιμοποιούμενο λογισμικό. Κατόπιν παρατίθεται μια συνοπτική παρουσίαση χαρακτηριστικών αριθμητικών εφαρμογών της βιβλιογραφίας και των συμπερασμάτων στα οποία αυτές καταλήγουν. Στο κυρίως τμήμα του Κεφαλαίου 5 παρατίθενται οι περιγραφές των παραδειγμάτων που επιλύονται στα πλαίσια της παρούσας έρευνας και τα αντίστοιχα αποτελέσματα με τη μορφή σχημάτων και πινάκων. Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 συνοψίζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη συνολική έρευνα επί του αντικειμένου της παρούσας διατριβής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Ιστορική αναδρομή και επισκόπηση της βιβλιογραφίας.

Στην παράγραφο αυτή θα γίνει μια σύντομη ιστορική αναδρομή στο πρόβλημα της προσομοίωσης του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου, αλλά και στο πρόβλημα της προσομοίωσης των ημιακάμπτων συνδέσεων των δομικών στοιχείων των μεταλλικών πλαισίων. Οι δυο αυτές κατηγορίες προβλημάτων, και ιδιαίτερα η περίπτωση της προσομοίωσης του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου, αποτελούν αντικείμενο της παρούσας διατριβής. Η προσομοίωση των ημιάκαμπτων συνδέσεων μεταλλικών δομικών στοιχείων δεν αποτελεί πεδίο έρευνας της διατριβής από την άποψη πρότασης μιας νέας μεθόδου προσέγγισής του προβλήματος, αλλά γίνεται χρήση της για την ανάπτυξη ενός γενικευμένου πεπερασμένου στοιχείου δοκού με δυνατότητες εφαρμογής σε μια μεγάλη κατηγορία προβλημάτων πλαισιακών φορέων.

Στην παράγραφο αυτή θα γίνει επίσης μια σύντομη επισκόπηση της βιβλιογραφίας που αφορά τα δυο αυτά πεδία. Ιδιαίτερη προσοχή θα δοθεί στο πρόβλημα της προσομοίωσης του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου, ενώ η αντίστοιχη επισκόπηση του προβλήματος της προσομοίωσης των ημιακάμπτων συνδέσεων θα είναι συνοπτική.

Περιεχόμενα του Κεφαλαίου

1.1. Ιστορική αναδρομή

1.1.1. Το πρόβλημα της προσομοίωσης του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου

1.1.1.1. Το προσομοίωμα του Winkler

1.1.1.2. Τα προσομοιώματα δυο παραμέτρων

1.1.1.3. Τα προσομοιώματα τριών και περισσοτέρων παραμέτρων

1.1.1.4. Τα προσομοιώματα του ελαστικού ημιχώρου

1.1.1.5. Τα προσομοιώματα πεπερασμένων στοιχείων

1.1.2. Η προσομοίωση των ημιάκαμπτων συνδέσεων των γραμμικών δομικών στοιχείων.

1.2. Επισκόπηση της βιβλιογραφίας

1.2.1. Το πρόβλημα των δοκών επί ελαστικού υποβάθρου

1.2.1.1. Δοκοί επί ελαστικού υποβάθρου Winkler

1.2.1.2. Δοκοί επί ελαστικού υποβάθρου δύο παραμέτρων

1.2.1.3. Δοκοί επί ελαστικού υποβάθρου περισσοτέρων παραμέτρων

1.2.1.4. Δοκοί επί συνεχούς ελαστικού ημιχώρου

1.2.2. Διερεύνηση και εφαρμογές της προσομοίωσης των ημιάκαμπτων συνδέσεων

1.1. Ιστορική Ανάδρομη

1.1.1. Το πρόβλημα της προσομοίωσης του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου

Στην παράγραφο αυτή θα γίνει μια σύντομη ιστορική αναδρομή στα προσομοιώματα του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου. Περισσότερες λεπτομέρειες για τις παραδοχές και τις μαθηματικές διατυπώσεις των προσομοιωμάτων αυτών θα δοθούν στο Κεφάλαιο 2.

1.1.1.1. Το προσομοίωμα του Winkler

Η προσπάθεια για την ανάπτυξη απλών προσομοιωμάτων για την περιγραφή της συμπεριφοράς του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου ξεκινά με την κλασική εργασία του Winkler το 1867 (σε ορισμένες βιβλιογραφικές πηγές η υπόθεση αποδίδεται στον Zimmermann, ο οποίος την πρότεινε ανεξάρτητα από τον Winkler το 1888. Στις ακόλουθες αναφορές στην παρούσα διατριβή η υπόθεση αυτή θα αναφέρεται ως υπόθεση του Winkler). Το προσομοίωμα συνίσταται από μια σειρά κατακόρυφων μεταφορικών ελατηρίων

απείρως πυκνά τοποθετημένων αλλά ανεξάρτητων μεταξύ τους (βλέπε Παράγραφο 2.2.1). Το προσομοίωμα του Winkler έγινε με το πέρασμα του χρόνου η βάση για την εκπόνηση πλήθους εργασιών, ενώ χρησιμοποιείται ευρέως ακόμα και σήμερα σε πολλές πρακτικές εφαρμογές.

1.1.1.2. Τα προσομοιώματα δυο παραμέτρων

Τα μειονεκτήματα και τα στενά όρια αξιόπιστης εφαρμογής του προσομοιώματος του Winkler οδήγησαν στην έρευνα για ανάπτυξη προσομοιωμάτων, τα οποία λαμβάνουν υπόψη και άλλες παραμέτρους της εδαφικής συμπεριφοράς (Παράγραφος 2.2.2). Μια πρώτη επέκταση αποτελούν τα προσομοιώματα δυο παραμέτρων, τα οποία αναπτύχθηκαν με διαφορετικές μεθόδους και παραδοχές. Βασικό σημείο διαφοροποίησης των προσομοιωμάτων που θα παρουσιαστούν παρακάτω αποτελεί ο διαφορετικός τρόπος ορισμού της δεύτερης παραμέτρου (Παράγραφοι 2.2.2 και 2.4.3).

Πρώτος ο Wieghardt (1922), κάνοντας κριτική στην υπόθεση του Winkler και στηριζόμενος σε πειραματικά δεδομένα του Föppl (1909), πρότεινε μια ολοκληρωματική σχέση (σχέση 2.37) που συνδέει την κατακόρυφη μετακίνηση σε κάθε σημείο του εδάφους με την κατανομή αλλά και τα μεγέθη των τάσεων που ασκούνται σε όλη την φορτιζόμενη επιφάνεια του (Παράγραφος 2.2.2.6). Για την εφαρμογή της σχέσης αυτής απαιτείται η γνώση δυο εδαφικών παραμέτρων.

Ο Filonenko – Borodich (1940) εισήγαγε ένα μηχανικό προσομοίωμα, το οποίο συνίσταται από μια σειρά κατακόρυφων γραμμικών ελατηρίων που συνδέονται μεταξύ τους μέσω μιας οριζόντιας ελαστικής μεμβράνης προεντεταμένης με σταθερή εφελκυστική δύναμη (Παράγραφος 2.2.2.1 και Σχήμα 2.2). Στο ίδιο από πλευράς μαθηματικής διατύπωσης αποτέλεσμα κατέληξε και ο Pasternak (1954), ο οποίος θεώρησε ότι υπάρχει σύνδεση μεταξύ των ανεξαρτήτων μεταφορικών ελατηρίων του Winkler μέσω ενός ασυμπίεστου διατμητικού επιπέδου (Παράγραφος 2.2.2.2 και Σχήμα 2.5α).

Σε μαθηματική διατύπωση αντίστοιχη αυτής των προσομοιωμάτων δυο παραμέτρων οδηγεί και η υπόθεση, ότι η αλληλεπίδραση του εδάφους με τους εδραζόμενους φορείς επιτυγχάνεται μέσω ανεξαρτήτων μεταξύ τους γραμμικών και στροφικών ελατηρίων. Το προσομοίωμα αυτό ονομάζεται «γενικευμένο» προσομοίωμα του εδάφους και αναφέρεται σε μελέτη του Pasternak (1937), χωρίς όμως να είναι βέβαιο ότι το πρότεινε πρώτος (βλέπε παραγράφους 2.2.2.4 και 2.2.7).

Ο Hetényi ((1946), (1950)) πρότεινε μηχανικό προσομοίωμα δυο παραμέτρων, στα πλαίσια του οποίου η σύνδεση των ανεξάρτητων ελατηρίων επιτυγχάνεται στην περίπτωση του δισδιάστατου προβλήματος μέσω μιας δοκού με άπειρη αντίσταση σε διατμητικές παραμορφώσεις, ενώ στην περίπτωση του τρισδιάστατου προβλήματος μέσω μιας πλάκας με άπειρη αντίσταση σε διατμητικές παραμορφώσεις (Παράγραφος 2.2.2.3).

Οι Vlasov και Leont'ev (1960) εφάρμοσαν την αρχή των δυνατών (virtual) μετακινήσεων του Lagrange, μέσω της οποίας μπορεί να προκύψει ως ειδική περίπτωση ένα προσομοίωμα δυο παραμέτρων που είναι μαθηματικώς ισοδύναμο με τα υπόλοιπα προσομοιώματα των δυο παραμέτρων, αν και εμφανίζει μια βασική διαφορά από αυτά: η επίδοση του εξαρτάται κατά μεγάλο βαθμό από την παραδοχή που γίνεται για τη μορφή της συνάρτησης μεταβολής των κατακόρυφων μετακινήσεων στο εσωτερικό του εδάφους.

Πέραν των παραπάνω προσομοιωμάτων έχουν προταθεί και καθαρώς μαθηματικά προσομοιώματα (με εφαρμογή μεθόδων Ορθολογικής Μηχανικής), τα οποία παρουσιάζουν το πλεονέκτημα της δυνατότητας επιλογής του αριθμού των παραμέτρων που θα ληφθούν υπόψη. Τα προσομοιώματα αυτά δεν ανήκουν αυστηρά στην κατηγορία των προσομοιωμάτων των δυο παραμέτρων, αλλά τα περιέχουν ως υποπερίπτωση τους (Παράγραφος 2.2.3.4).

1.1.1.3. Τα προσομοιώματα τριών και περισσοτέρων παραμέτρων

Σε μια προσπάθεια ακριβέστερης αντιμετώπισης του προβλήματος, προτάθηκε μια σειρά προσομοιωμάτων τα οποία χαρακτηρίζονται όχι μόνον από δυο αλλά από περισσότερες παραμέτρους. Χαρακτηριστικό γνώρισμα ορισμένων από αυτά είναι ότι αποδίδουν την μερική συνέχεια (πολύ απότομη μεταβολή) στις μετακινήσεις της επιφάνειας του εδάφους, γεφυρώνοντας έτσι το κενό μεταξύ του προσομοιώματος του Winkler (απόλυτη ασυνέχεια) και των προσομοιωμάτων δυο παραμέτρων (απόλυτη συνέχεια).

Ο Hetényi ((1946), (1950)) πρότεινε ένα μηχανικό προσομοίωμα που συνίσταται από δυο στρώσεις μεταφορικών ελατηρίων, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους μέσω μιας ιδεατής πλάκας (Παράγραφος 2.2.3.3, Σχήμα 2.16α).

Ξεκινώντας από τις γενικές εξισώσεις ισορροπίας του ομογενούς συνεχούς ελαστικού υποβάθρου πεπερασμένου πάχους, ο Reissner (1958) ανέπτυξε με τη βοήθεια απλοποιητικών παραδοχών ένα προσομοίωμα που χαρακτηρίζεται από τρεις παραμέτρους (Παράγραφος 2.2.3.2 και Σχήμα 2.15).

Ο Kerr (1965) πρότεινε ένα μηχανικό προσομοίωμα, το οποίο συνίσταται από δυο στρώσεις μεταφορικών ελατηρίων που συνδέονται μεταξύ τους μέσω μιας διατμητικής στρώσης (Παράγραφος 2.2.3.1. και Σχήμα 2.13α). Το προσομοίωμα θα αποτελέσει στόχο διερεύνησης της παρούσας διατριβής.

Μια πιο γενική διατύπωση των νόμων της εδαφικής συμπεριφοράς με περισσότερες των δυο παραμέτρων γίνεται μέσω φορμαλιστικών μεθόδων. Ο Ratzersdorfer (1929) κατέστρωσε μια σχέση τάσεων – μετακινήσεων με βάση τη θεωρία ανάπτυξης συναρτήσεων σε σειρές Taylor (Παράγραφος 2.2.3.4). Με μια άλλη προσέγγιση ο Favre (1960) υπέθεσε a priori ότι η κατακόρυφη τάση σε κάθε σημείο της επιφάνειας του εδάφους είναι συνάρτηση της κατακόρυφης μετακίνησης καθώς και των παραγώγων της στο σημείο αυτό. Αναπτύσσοντας αυτή τη σχέση σε σειρές Maclaurin και παραμένοντας στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας, κατέληξε σε μια σχέση ανάλογη αυτής του Ratzersdorfer (Παράγραφος 2.2.3.4). Σε ανάλογης μορφής σχέση κατέληξαν και οι Levinson – Bharatha (1978), (1980) ξεκινώντας από μια πολύ γενική θεωρία προσομοίωσης του εδάφους μέσα στα πλαίσια της Ορθολογικής Μηχανικής. Οι Kerr και Rhines (1967), και ο Kerr (1984), αν και εφάρμοσαν φορμαλιστική μέθοδο παρόμοια με τις τρεις προηγούμενες περιπτώσεις, κατέληξαν σε σχέση διαφορετικής μορφής (σχέση (2.109β)) από τις σχέσεις των Ratzersdorfer και Favre (σχέση (2.109α)).

1.1.1.4. Τα προσομοιώματα ελαστικού ημιχώρου

Η θεώρηση του ημιάπειρου συνεχούς ελαστικού σώματος φορτιζόμενου στην ελεύθερη επιφάνειά του αποτελεί μια θεμελιώδη προσομοίωση της συμπεριφοράς του εδάφους. Είναι βέβαια γνωστό από την

Εδαφομηχανική, ότι η έννοια του συνεχούς ελαστικού μέσου είναι ασυμβίβαστη με τον ορισμό του εδάφους ως ενός συνόλου κόκκων. Ωστόσο, εάν θεωρηθεί ότι η διάσταση των επιφανειών που δέχεται τις τάσεις είναι τουλάχιστον πέντε φορές μεγαλύτερη από τις διαστάσεις των κόκκων (Βαλαλάς (1985)), τότε μπορεί να γίνει η παραδοχή ότι το έδαφος είναι, μακροσκοπικά τουλάχιστον, συνεχές μέσο. Υπό τις συνθήκες αυτές η θεώρηση του εδάφους ως συνεχούς ελαστικού ημιάπειρου μέσου αποτελεί την πιο ακριβή μέθοδο προσέγγισης του προβλήματος. Η επίλυση του συνεχούς ελαστικού μέσου είναι μαθηματικώς πολύπλοκη και δύσκολα εφαρμόσιμη στα συνήθη πρακτικά προβλήματα. Θεμελιώδεις λύσεις του προβλήματος αποτελούν η λύση του Flamant για το ημιάπειρο ελαστικό επίπεδο, και η λύση του Bousinesq (1885) για τον ημιάπειρο ελαστικό χώρο. Περισσότερες λεπτομέρειες για το αντικείμενο του συνεχούς ελαστικού ημιάπειρου χώρου δίνονται στην παράγραφο 2.2.4, ενώ για μια πιο αναλυτική διερεύνηση είναι διαθέσιμη μια πολλή μεγάλη σειρά βιβλιογραφικών πηγών (ενδεικτικά αναφέρονται: Westergaard (1952), Poulos και Davis (1974), Selvadurai (1979)).

1.1.1.5. Τα προσομοιώματα πεπερασμένων στοιχείων

Η προσομοίωση του εδάφους με τη βοήθεια επιφανειακών ή και χωρικών πεπερασμένων στοιχείων δεν αποτελεί με την αυστηρή έννοια του όρου μια αυτοτελή και διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος. Είναι στην ουσία ένα από τα πολλά πεδία εφαρμογής της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Πρόκειται για μέθοδο επίλυσης του προβλήματος του συνεχούς μέσου, η οποία προσφέρει μια πολλή μεγάλη ευελιξία στη επιλογή των παραδοχών για την προσομοίωση του εδάφους. Επί παραδείγματι με τα προσομοιώματα των πεπερασμένων στοιχείων δίνεται η δυνατότητα προσομοίωσης όχι μόνον ελαστικών ισότροπων και ομογενών μέσων, αλλά και η επιλεκτική προσομοίωση της ανισοτροπίας, της μη γραμμικότητας, αλλά και της ανομοιογένειας που διέπει όλες τις κατηγορίες εδαφών. Περισσότερες λεπτομέρειες για τα προσομοιώματα των πεπερασμένων στοιχείων δίνονται στην Παράγραφο 2.2.5.

1.1.2. Η προσομοίωση των ημιάκαμπτων συνδέσεων των γραμμικών δομικών στοιχείων

Ο όρος ημιάκαμπτη σύνδεση αναφέρεται κυρίως στην ανάλυση και το σχεδιασμό των μεταλλικών ή των σύμμεικτων κατασκευών, όπου η μονολιθική μόρφωση των κόμβων δεν είναι πάντα εφικτή. Με δεδομένη την παρατήρηση αυτή, κρίνεται ως πιο ρεαλιστική η θεώρηση των συνδέσεων ως ημιακάμπτων – με συμπεριφορά ενδιάμεση των δυο προαναφερομένων – τόσο κατά την ανάλυση όσο και κατά την διαστασιολόγηση των μεταλλικών συνδέσεων. Για το λόγο αυτόν έχει επικρατήσει στους σύγχρονους κανονισμούς μελέτης των μεταλλικών κατασκευών (π.χ. Ευρωκώδικας 3 (1998), ή AISC (1994)) η αναφορά στις ημιάκαμπτες συνδέσεις και η παροχή στους μελετητές των απαραιτήτων στοιχείων για την μόρφωση και τον υπολογισμό τους. Για την προσομοίωση των ημιακάμπτων συνδέσεων σε επίπεδο πρακτικών εφαρμογών, ο πιο συνήθης και προσιτός τρόπος είναι η προσθήκη στροφικών ελατηρίων στα άκρα των γραμμικών δομικών στοιχείων. Τα ελατήρια αυτά μπορεί να είναι είτε γραμμικά είτε μη γραμμικά, ανάλογα με τον τύπο της ανάλυσης που απαιτείται, ενώ τα χαρακτηριστικά τους στοιχεία (διαγράμματα ροπών – στροφών) εξαρτώνται από τον τύπο της σύνδεσης των κόμβων, και προσδιορίζονται είτε από πειραματικά δεδομένα είτε από αναλυτικά μοντέλα είτε και από συνδυασμό των δυο αυτών μεθόδων. Περισσότερες

λεπτομέρειες πάνω στο αντικείμενο των ημιακάμπτων συνδέσεων και τα πιθανά πεδία εφαρμογής τους δίνονται στην παράγραφο 2.3.5.

1.2. Επισκόπηση της βιβλιογραφίας

Παρακάτω θα γίνει μια συνοπτική επισκόπηση της βιβλιογραφίας που αφορά τα αντικείμενα της παρούσας διατριβής. Μεγάλο τμήμα της επισκόπησης αυτής θα επικεντρωθεί στο στατικό και το δυναμικό πρόβλημα των δοκών επί ελαστικού υποβάθρου, καθώς το γνωστικό αυτό αντικείμενο αποτελεί το βασικό στόχο της διατριβής. Μικρή και καθαρά ενδεικτική θα είναι η επισκόπηση της βιβλιογραφίας που αφορά στις μεθόδους προσομοίωσης των ημιακάμπτων συνδέσεων.

1.2.1. Το πρόβλημα των δοκών επί ελαστικού υποβάθρου

Ιδιαίτερα μεγάλο είναι το εύρος της βιβλιογραφίας που αφορά το πρόβλημα των δοκών (αλλά και των πλακών) επί ελαστικού υποβάθρου. Αυτό μαρτυρά ο μεγάλος αριθμός από βιβλιογραφικές αναφορές που θα παρατεθούν παρακάτω, αλλά και ο πολύ μεγάλος αριθμός αντίστοιχων αναφορών είτε σε ειδικά άρθρα επισκόπησης της βιβλιογραφίας (π.χ. Hetényi (1966), Dutta και Rana (2002)) είτε σε σχετικά συγγράμματα (π.χ. Selvadurai (1979)). Στην τεράστια ρωσική βιβλιογραφία επί του αντικειμένου θα γίνει μικρή μόνον αναφορά, καθώς το πρόβλημα της γλώσσας – πρωτίστως – αλλά και αδυναμία πρόσβασης σε αυτήν καθιστούν ανέφικτη την περαιτέρω διερεύνηση της. Ενδεικτικά αναφέρεται το άρθρο επισκόπησης του Korenev (1960), στο οποίο γίνεται μια εκτενής παρουσίαση της σχετικής βιβλιογραφίας μέχρι το 1960.

Σημειώνεται ότι η επισκόπηση που θα ακολουθήσει δεν έχει ως στόχο την εξαντλητική κάλυψη όλου του δημοσιευμένου υλικού. Στόχος της είναι αφενός η κατά το μάλλον ή ήττον συνοπτική κάλυψη των σχετικών πεδίων εφαρμογής και αφετέρου η ανάδειξη τυχόν κενών επί του αντικειμένου.

1.2.1.1. Δοκοί επί ελαστικού υποβάθρου Winkler

Το μεγαλύτερο μέρος των δημοσιεύσεων που αφορούν δοκούς επί ελαστικού υποβάθρου έχει βασιστεί στο προσομοίωμα του Winkler λόγω της απλότητας και της ευκολίας χειρισμού του. Παρακάτω θα γίνει μια σύντομη επισκόπηση της βιβλιογραφίας επάνω στο αντικείμενο της μελέτης του στατικού και του δυναμικού προβλήματος δοκών που εδράζονται επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Winkler.

Πρώτη προσέγγιση του στατικού προβλήματος με την μέθοδο της αναλυτικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων έγινε στο κλασσικό σύγγραμμα του Hetényi (1946). Στο σύγγραμμα αυτό περιέχεται ένας μεγάλος κατάλογος από λύσεις για διάφορες περιπτώσεις πρακτικού ενδιαφέροντος. Παρατίθενται επίσης και προσεγγιστικές λύσεις (τριγωνομετρικές σειρές) για συνήθεις δοκούς, για δοκούς μεταβλητής διατομής επί ελαστικού υποβάθρου με μεταβλητό δείκτη εδάφους, ενώ γίνεται επίσης και αναφορά σε προβλήματα ευστάθειας. Ωστόσο η αντιμετώπιση όλων των παραπάνω προβλημάτων δεν γίνεται από τη σκοπιά της μητρωικής ανάλυσης των γραμμικών φορέων, η οποία άλλωστε τότε δεν είχε ακόμη αναπτυχθεί.

Το στατικό πρόβλημα της δοκού Euler – Bernouli μελέτησαν επίσης με ακριβείς μεθόδους ο Penzien (1960) με τη μέθοδο κατανομής των ροπών και εφαρμογή σε προβλήματα συνεχών δοκών και κυλίνδρων με αξονοσυμμετρική φόρτιση, ο Lee et al (1961) με τη μέθοδο κατανομής των ροπών, ο Dodge (1964), οι Miranda and Nair (1966) με τη μέθοδο των αρχικών παραμέτρων, οι Lee και Harrison (1970), οι οποίοι

στηριζόμενοι στις εξισώσεις του Hetenyi και με βάση κλασσικές μεθόδους της στατικής των γραμμικών φορέων ανέπτυξαν μεθοδολογία επίλυσης επιπέδων και χωρικών φορέων εδραζόμενων επί του εδάφους, ο Sundararajan (1974), ο οποίος αναφέρθηκε στην επιρροή του ελαστικού υποβάθρου στο κρίσιμο φορτίο μιας δοκού, ο Simitses (1976) με χρήση ακριβούς αλλά και προσεγγιστικής μεθόδου για ανάλυση ευστάθειας, ο Al-Sarraf (1978), ο Teodorescu (1981) για τον υπολογισμό φορτίων λυγισμού δοκών-προβόλων, ο Ting (1982) με τη μέθοδο των αρχικών παραμέτρων για δοκό με ελαστικές στηρίξεις στα άκρα, ο Avramidis (1979), (1980), (1981), (1982α, β) με χρήση της ακριβούς λύσης της διαφορικής εξίσωσης, οι Ting και Mockry (1984) με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και χρησιμοποιώντας ακριβείς συναρτήσεις παρεμβολής, οι Eisenberger και Yankelevsky (1985) με τη μέθοδο των αρχικών παραμέτρων, οι Adin et al (1985) για δοκούς επί ελαστικού υποβάθρου με διαφορετικό δείκτη εδάφους κατά τη θλιπτική και διαφορετικό δείκτη εδάφους κατά την εφελκυστική φόρτιση, οι Yankelevsky και Eisenberger (1986) και ο Razaqpur (1986) με απευθείας επίλυση της διαφορικής εξίσωσης, οι Eisenberger, Yankelevsky και Clastornik (1986) με τη μέθοδο των αρχικών παραμέτρων, οι Sirosh, Ghali και Razaqpur (1989) με απευθείας επίλυση της διαφορικής εξίσωσης αλλά και χρήση τριγωνομετρικών σειρών, και οι Yavari, Sarkani, και Reddy (2001), οι οποίοι μελέτησαν το πρόβλημα δοκών με εσωτερικές σημειακές ασυνέχειες που προκύπτουν από την παρεμβολή στροφικών ελατηρίων.

Το ίδιο πρόβλημα με χρήση προσεγγιστικών μεθόδων μελέτησαν ο Timoshenko (1936), ο οποίος διερεύνησε την ελαστική ευστάθεια δοκών επί ελαστικού υποβάθρου με ανάπτυξη της συνάρτησης των μετακινήσεων σε τριγωνομετρικές σειρές, ο Malter (1960) τόσο με τη μέθοδο του Newmark όσο και με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, οι Iyengar και Anatharamu (1963) με χρήση μεθόδου ανάπτυξης της λύσης σε σειρές, οι Miyahara και Ergadoudis (1970), οι οποίοι κάνοντας χρήση αλγεβρικών συναρτήσεων παρεμβολής ανέπτυξαν μητρώα δυσκαμψίας δοκών λαμβάνοντας υπόψη ελαστική εδαφική αντίδραση κατά την καμπτική, την αξονική και την στρεπτική επιπόνηση, ο Beaufait (1976) για δοκούς μεταβλητής διατομής στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, οι Beaufait και Hoadley (1980) για δοκούς με μεταβλητή διατομή εδραζόμενες επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Winkler που εμφανίζει μη γραμμική συμπεριφορά χρησιμοποιώντας επίσης τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, οι Franklin και Scott (1979) για δοκούς σε υπόβαθρο με γραμμικά μεταβλητό μέτρο αντίστασης και χρήση ολοκληρώματος περιγράμματος (contour-integrals), ο Lentini (1979) για δοκούς σε υπόβαθρο με μεταβλητό μέτρο αντίστασης και χρήση μεθόδου πεπερασμένων διαφορών, ο Mohr (1980) με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, οι Clastornik, Eisenberger, Yankelevsky και Adin (1986) με τη χρήση της μεθόδου ανάπτυξης της λύσης σε σειρές για δοκούς εδραζόμενες σε υπόβαθρο με μεταβλητό μέτρο αντίστασης, οι Matsuda και Sakiyama (1987) για δοκούς σε υπόβαθρο με μεταβλητό μέτρο αντίστασης μετατρέποντας τις διαφορικές εξισώσεις σε ολοκληρωματικές και επιλύοντας τις με αριθμητική μέθοδο, η De Rosa (1989) με χρήση μεθόδου βασισμένης στις εξισώσεις του Langrange, και οι Aljanabi, Farid και Mohamad (1990), οι οποίοι ανέπτυξαν μητρώα δυσκαμψίας δοκών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων λαμβάνοντας υπόψη εγκάρσια και αξονική έδραση με ακριβείς και προσεγγιστικές συναρτήσεις παρεμβολής αντίστοιχα.

Με το στατικό πρόβλημα της δοκού Timoshenko ασχολήθηκαν οι Essenburg (1962), οι Cheng και Pantelides (1988), και ο Aydogan (1995) με χρήση της ακριβούς λύσης της διαφορικής εξίσωσης.

Το δυναμικό πρόβλημα της δοκού Euler-Bernouli με ακριβείς μεθόδους μελέτησαν οι Kenney (1954) για ανάλυση δοκού υπό σταθερές χρονικές συνθήκες (steady-state analysis) εξαιτίας κινούμενου φορτίου, οι Smith και Herrmann (1972) για ευστάθεια δοκού φορτισμένης από μη συντηρητικό αξονικό φορτίο, οι Maurizi et al. (1977) για ομοιόμορφες δοκούς με ελαστικές στηρίξεις, οι Williams και Kennedy (1987), οι Maurizi, Rozales και Belles (1988) για ομοιόμορφες δοκούς, ο Wang (1991) για δοκούς με μια διαβάθμιση στη διατομή, καθώς και οι West και Pavlovic (1999), οι οποίοι χρησιμοποίησαν τη ακριβή λύση του προβλήματος ως λύση αναφοράς για τη μελέτη της ευαισθησίας προσεγγιστικών λύσεων δοκών μερικώς εδραζόμενων. Το ίδιο πρόβλημα με προσεγγιστικές μεθόδους μελέτησαν ο Mathews (1958), (1959) για δοκούς «απείρου» μήκους υπό μοναχικό κινητό φορτίο μεταβαλλόμενης έντασης με χρήση του μετασχηματισμού Fourier, οι Doyle και Pavlovic (1982) με χρήση μεθόδου διαχωρισμού των μεταβλητών, οι Pavlovic και Wylie (1983) για δοκούς σε μη ομογενές ελαστικό υπόβαθρο με χρήση μεθόδων βασισμένων στην ανάπτυξη σε εκθετικές σειρές, οι Harry και Mafi (1984) με χρήση αριθμητικής ολοκλήρωσης με τη μέθοδο της αρχικής τιμής (initial-value numerical-integration method), οι Eisenberger, Yankelevski και Adin (1985) με χρήση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων αλλά και με ακριβείς συναρτήσεις παρεμβολής σε δοκούς ολικά ή μερικά εδραζόμενες, οι Eisenberger και Clastornik (1987) με χρήση μεθόδου πεπεπασμένων στοιχείων για δοκούς σε υπόβαθρο με μεταβλητό δείκτη αντίστασης, οι Laura και Cortinez (1987) με χρήση της προσεγγιστικής μεθόδου Rayleigh-Schmidt για δοκούς μερικώς εδραζόμενες σε ελαστικό υπόβαθρο, οι Valsangkar και Pradhanang (1987) με χρήση μεθόδου διαχωρισμού των μεταβλητών για μερικώς εδραζόμενους πασσάλους, οι Filipich, Laura, Sonenblum και Gil (1988) με χρήση ακριβούς λύσης και της προσεγγιστικής μεθόδου του Rayleigh για δοκούς με αναβαθμούς, η De Rosa (1989) με χρήση μεθόδου βασισμένης στις εξισώσεις του Langrange, οι Lee και Ke (1990) για δοκούς μεταβλητής διατομής επί ελαστικού υποβάθρου με μεταβλητό μέτρο αντίστασης και ελαστικές στηρίξεις, ο Kukla (1991) για δοκούς σε υπόβαθρο με βαθμιδωτά μεταβλητό μέτρο αντίστασης με διάφορες συνοριακές συνθήκες, οι Lai et al. (1992) με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων αλλά με ακριβείς συναρτήσεις παρεμβολής, ο Ding (1993) για δοκούς εδραζόμενες επί ελαστικού υπόβαθρου με μεταβλητό μέτρο αντίστασης και για διάφορες συνοριακές συνθήκες, οι Thambiratnam και Zhuge (1995) για δοκούς μεταβλητής διατομής επί ελαστικού υποβάθρου με μεταβλητό μέτρο αντίστασης στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης, και ο Chen (2000) για δοκούς σταθερής διατομής με τη «differential quadrature element method».

Το δυναμικό πρόβλημα της δοκού Timoshenko μελέτησαν με ακριβείς μεθόδους οι Chen Yung-Hsiang (1987), οι Cheng και Pantelides (1988) με χρήση ακριβούς μεθόδου, οι Capron και Williams (1988), καθώς και ο Lee et al. (1992). Το ίδιο πρόβλημα μελέτησαν προσεγγιστικά ο Djodjo (1969) με χρήση της μεθόδου των μητρώων μεταφοράς, ο Yokoyama (1988) με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, καθώς και ο Lee H.P. (1998), ο οποίος μελέτησε το πρόβλημα της δυναμικής απόκρισης δοκού υπό την επίδραση κινούμενης μάζας με χρήση των εξισώσεων Lagrange και της μεθόδου της επαλληλίας των ιδιομορφών.

Θα πρέπει να γίνει επίσης και μια μικρή αναφορά στις εφαρμογές της υπόθεσης του Winkler στην ανάλυση πλευρικά φορτισμένων πασσάλων, αν και θα πρέπει να τονιστεί ότι η ακριβέστερη αντιμετώπιση του προβλήματος επιτυγχάνεται με μεθόδους του ελαστικού ημιχώρου ή ακόμα και με τη χρήση της υπόθεσης του Winkler αλλά με μη γραμμικά ελατήρια (βλέπε Αναγνωστόπουλος, Γεωργιάδης, Πιτιλάκης 1994, σελ. 183). Μεταξύ των εφαρμογών του κλασσικού προσομοιώματος του Winkler στην μελέτη της πλευρικής συμπεριφοράς των μεμονωμένων πασσάλων αναφέρονται εντελώς ενδεικτικά οι εργασίες των Reese και Welch (1975) για την πλευρική φόρτιση πασσάλων σε συμπαγή αργιλικό έδαφος, των West et al (1997), οι οποίοι μελέτησαν την ευστάθεια πασσάλου αιχμής σε υπόβαθρο με γραμμικά μεταβαλλόμενο δείκτη εδάφους, των Han και Frost (2000) για την πλευρική συμπεριφορά πασσάλων από ορθότροπο υλικό σε υπόβαθρο με γραμμικά μεταβαλλόμενο δείκτη εδάφους, και ο Catal (2002), ο οποίος ασχολήθηκε με το δυναμικό πρόβλημα πασσάλων μερικώς εδραζόμενων.

Από την παράθεση των βιβλιογραφικών αναφορών προκύπτει το συμπέρασμα, ότι η μελέτη των δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Winkler έχει πρακτικώς εξαντληθεί σε όλα τα επί μέρους προβλήματα (π.χ. στατική, δυναμική ανάλυση με ακριβείς και προσεγγιστικές μεθόδους), και το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ύπαρξη ελάχιστων δημοσιεύσεων επί του αντικειμένου την τελευταία δεκαετία.

1.2.1.2. Δοκοί επί ελαστικού υποβάθρου δύο παραμέτρων

Η μελέτη του προβλήματος δοκών και πλακών επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων έχει αποτελέσει αντικείμενο ενός αξιόλογου αριθμού εργασιών. Χωρίς να πλησιάζει τον αριθμό των αντιστοίχων μελετών στις οποίες γίνεται χρήση του προσομοιώματος του Winkler, ο αριθμός των εργασιών για τα προσομοιώματα των δυο παραμέτρων είναι σημαντικός και καλύπτει ένα μεγάλο εύρος προβλημάτων, όπως θα γίνει σαφές από την παράθεση των βιβλιογραφικών πηγών που ακολουθεί. Όπως και στην περίπτωση της παρουσίασης της βιβλιογραφίας για το προσομοίωμα του Winkler, και στην παρούσα περίπτωση η παρουσίαση θα γίνει ξεχωριστά κατά τον τύπο φόρτισης (δυναμικό ή στατικό) και την θεωρία προσομοίωσης των δοκών (Euler ή Timoshenko). Τέλος, η παρουσίαση της βιβλιογραφίας που αφορά το προσομοίωμα του Vlasov γίνεται ξεχωριστά λόγω της ιδιαιτερότητας του προσομοιώματος σε σύγκριση με τα υπόλοιπα προσομοιώματα των δυο παραμέτρων.

Με το στατικό πρόβλημα της δοκού Euler-Bernouli ασχολήθηκαν κάνοντας χρήση ακριβών μεθόδων οι Zhaohua και Cook (1983), οι Chiwanga και Valsangkar (1988), οι Karamanlidis και Prakash (1989) με υπολογισμό των ακριβών μητρώων μεταφοράς και δυσκαμψίας, οι Razaqpur και Shah (1991), και οι Alemdar και Gulkan (1997). Με το ίδιο πρόβλημα, κάνοντας όμως χρήση προσεγγιστικών μεθόδων, ασχολήθηκαν οι Eisenberger και Clastornik (1987) με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων και ακριβείς / προσεγγιστικές συναρτήσεις παρεμβολής για δοκούς σε υπόβαθρο με μεταβλητές παραμέτρους.

Με το δυναμικό πρόβλημα της δοκού Euler με χρήση ακριβών μεθόδων ασχολήθηκαν ο Rades (1970) πραγματοποιώντας ανάλυση υπό σταθερές χρονικές συνθήκες (steady-state analysis), οι Valsangkar και Pradhanang (1988) με την ακριβή λύση της διαφορικής εξίσωσης, και οι Karamanlidis και Prakash (1988) με χρήση ακριβών συναρτήσεων παρεμβολής. Το ίδιο πρόβλημα, αλλά με προσεγγιστικές μεθόδους,

αντιμετώπισαν η De Rosa (1993) χρησιμοποιώντας μέθοδο ελαστικής και αδρανειακής διακριτοποίησης, οι Franciosi και Masi (1993) με χρήση μητρώων βασισμένων σε ακριβείς και προσεγγιστικές συναρτήσεις μορφής, ο Eisenberger (1994), ο οποίος μελέτησε δοκούς εδραζόμενες επί ελαστικού υποβάθρου με μεταβλητές εδαφικές σταθερές, αναπτύσσοντας την λύση της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος σε εκθετικές σειρές «απείρων» όρων, και οι Naidu και Rao (1995) για δοκούς αξονικά φορτισμένες.

Το στατικό πρόβλημα της δοκού Timoshenko μελέτησαν οι Ylinen και Mikkola (1967) με το προσομοίωμα του Wieghardt και με την ακριβή λύση της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος, ο Djodjo (1969) με χρήση της μεθόδου των μητρώων μεταφοράς, οι Miyahara και Ergatoudis (1976) με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για δοκούς στο χώρο, καθώς και οι Mourelatos και Parsons (1987). Οι τρεις τελευταίες εργασίες στηρίχθηκαν στο γενικευμένο προσομοίωμα εδάφους. Τέλος, το ίδιο πρόβλημα με την ακριβή επίλυση της διαφορικής εξίσωσης αντιμετώπισαν οι Shirima και Giger (1992), και ο Onu (2000).

Με το δυναμικό πρόβλημα της δοκού Timoshenko ασχολήθηκε ο Djodjo (1969) με τη χρήση μητρώων μεταφοράς, οι Wang και Stephens (1977) με ακριβή επίλυση της διαφορικής εξίσωσης, οι Wang και Gagnon (1978) για δοκούς πολλών ανοιγμάτων, και η De Rosa (1995) χρησιμοποιώντας δυο διαφορετικές παραδοχές για την επιρροή της δεύτερης εδαφικής παραμέτρου. Με το ίδιο πρόβλημα, αλλά με προσεγγιστικές μεθόδους, ασχολήθηκαν οι Menditto (1967) για δοκούς απείρου μήκους, οι Maurizi και Rosales (1986) για δοκούς με ελαστικές στροφικές στηρίξεις, οι Filipich και Rosales (1988) με μια τροποποιημένη μέθοδο Rayleigh, ο Yokoyama (1987), (1991), (1996) με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, και ο Matsunaga (1999), ο οποίος μελέτησε το πρόβλημα υψίκορμων δοκών λαμβάνοντας υπόψη τις διατμητικές παραμορφώσεις με βάση τις θεωρίες ανωτέρας τάξεως, και λύνοντας τις σχετικές διαφορικές εξισώσεις με τη μέθοδο ανάπτυξης των λύσεων σε σειρές «απείρων» όρων.

Δοκοί επί ελαστικού υποβάθρου Vlasov

Την αρχική διατύπωση της υπόθεσης του Vlasov (1960) δεν ακολούθησε άμεση και συστηματική διερεύνηση, κυρίως λόγω της αδυναμίας ενός αξιόπιστου και θεωρητικά τεκμηριωμένου προσδιορισμού της παραμέτρου γ, από την οποία εξαρτώνται σε πολύ μεγάλο βαθμό τα εξαγόμενα αποτελέσματα. Ενδεχομένως και το γεγονός ότι στο σύγγραμμα του ο Vlasov καλύπτει στην ουσία σχεδόν όλες τις περιπτώσεις φόρτισης και συνοριακών συνθηκών αποτέλεσε αποτρεπτικό παράγοντα για μια περαιτέρω διερεύνηση. Εξαίρεση αποτελούν οι εργασίες των Harr et al (1969) οι οποίοι προχώρησαν σε προγραμματισμό των εξισώσεων του Vlasov σε κώδικα ηλεκτρονικού υπολογιστή, των Rao et al (1971) οι οποίοι επέκτειναν την αρχική υπόθεση του Vlasov λαμβάνοντας υπόψη και τις οριζόντιες μετακινήσεις του υποβάθρου, και του Yang (1972) ο οποίος ανέπτυξε και κωδικοποίησε σε κώδικα ηλεκτρονικού υπολογιστή πεπερασμένο στοιχείο πλάκας επί ελαστικού υποβάθρου που περιγράφεται από τις εξισώσεις του Vlasov.

Μεγάλη ώθηση στην βασική παραδοχή του Vlasov έδωσαν οι Jones και Xenophontos (1977), οι οποίοι τεκμηρίωσαν θεωρητικά την σχέση που διέπει το προφίλ των κατακορύφων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου (παράγραφος 2.2.2.5. και σχέση 2.34). Με βάση την διατύπωση αυτή, οι Vallabhan και Das (1988) παρουσίασαν μια επαναληπτική μέθοδο (τροποποιημένο προσομοίωμα Vlasov), με βάση την οποία

επιτυγχάνεται ο ταυτόχρονος και θεωρητικά τεκμηριωμένος προσδιορισμός της παραμέτρου γ, αίροντας έτσι το βασικό μειονέκτημα της αρχικής διατύπωσης του Vlasov. Με το τροποποιημένο προσομοίωμα οι Vallabhan και Das προχώρησαν επίσης στην επίλυση διαφόρων προβλημάτων δοκών Euler (1991α, β) αλλά και πλακών (ορθογωνικών ή κυκλικών, 1991γ, δ). Στις εργασίες αυτές επέκτειναν ακόμα περισσότερο την αρχική διατύπωση του Vlasov λαμβάνοντας υπόψη γραμμικά μεταβαλλόμενο μέτρο ελαστικότητας του υποβάθρου (μη ομογενές ελαστικό υπόβαθρο). Με βάση το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov δημοσιεύτηκε την τελευταία πενταετία μια σειρά εργασιών με αντικείμενο την σεισμική απόκριση δοκών Euler (Ayvaz και Daloglu (1997), Ayvaz και Ozgan (2002)) και λεπτών πλακών (Ayvaz et al (1998), Valladhan και Daloglu (1999), Celik και Saygun (1999)).

Κλείνοντας, θα πρέπει να γίνει και μια αναφορά στις εργασίες των Nogami και O' Neill (1985) και των Nogami και Lam (1987), οι οποίες, αν και δεν μπορούν να καταταγούν με την αυστηρή έννοια στην κατηγορία των εργασιών βάσει του προσομοιώματος του Vlasov, ωστόσο αναφέρονται σε επίπεδα προβλήματα πλακών επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων πεπερασμένου πάχους και ξεκινούν από τις ίδιες βασικές παραδοχές με τον Vlasov για το πεδίο των μετακινήσεων.

1.2.1.3. Δοκοί επί ελαστικού υποβάθρου περισσοτέρων παραμέτρων

Πέρα από τις εργασίες οι οποίες βασίζονται σε προσομοιώματα μίας ή δύο παραμέτρων και στις οποίες έγινε ήδη αναφορά, υπάρχει ένας αριθμός δημοσιεύσεων και για τα προσομοιώματα τριών παραμέτρων. Ο αριθμός των δημοσιεύσεων αυτών είναι μικρός και δεν καλύπτει σχεδόν καθόλου το πρόβλημα κάμψης δοκών (Euler – Bernoulli και Timoshenko) ή πλακών.

Πρώτος ο Hetenyi (1946) και (1950), στις εργασίες στις οποίες πρότεινε το μηχανικό του προσομοίωμα, παρουσίασε τη λύση των εξισώσεων του προσομοιώματος για το πρόβλημα δοκών Euler – Bernoulli «απείρου» και πεπερασμένου μήκους φορτιζόμενων με μοναχικές κατακόρυφες δυνάμεις. Ο Kerr (1965) έκανε εφαρμογή του προσομοιώματος του για τη μελέτη άκαμπτης δοκού υπό την επίδραση στατικών φορτίων. Ο Weitsman (1970) ασχολήθηκε κυρίως με το πρόβλημα της μονόπλευρης στήριξης δοκών Euler – Bernoulli επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Reissner χωρίς να προχωρήσει σε σχηματισμό μητρώων δυσκαμψίας ή φόρτισης. Οι Fletcher και Hermann (1971) ασχολήθηκαν με το πρόβλημα της δοκού Euler-Bernouli επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων βασισμένου σε φορμαλιστική μέθοδο ανάλογη της μεθόδου του Favre. Ο Rades (1971) ασχολήθηκε με την εξαναγκασμένη ταλάντωση άκαμπτης δοκού επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων βασισμένου στο μοντέλο του Kerr. Η πιο συστηματική διερεύνηση του προσομοιώματος τριών παραμέτρων τύπου Reissner οφείλεται στον Horvath (1983α), (1993) η μελέτη του οποίου δεν είναι προσανατολισμένη στην μητρωική διατύπωση του προβλήματος, αλλά στην εδαφοτεχνική πλευρά του.

1.2.1.4. Δοκοί επί συνεχούς ελαστικού ημιχώρου

Το πρόβλημα των δοκών επί ελαστικού ημιχώρου είναι ένα πολύπλοκο μαθηματικό πρόβλημα, η επίλυση του οποίου δεν μπορεί να επιτευχθεί με τη βοήθεια στοιχειωδών συναρτήσεων, καθώς ανάγεται στον υπολογισμό οριακών εκφράσεων με όρια που τείνουν στο άπειρο. Ως εκ τούτου, μόνον αριθμητικές και όχι

αναλυτικές ολοκληρώσεις είναι εφικτές. Για τον λόγο αυτό, οι εφαρμογές από την επίλυση του προβλήματος κάμψης δοκών «άπειρου» ή πεπερασμένου μήκους επί ελαστικού ημιχώρου δεν είναι ιδιαίτερα διαδεδομένες στην πράξη. Ωστόσο, το πρόβλημα έχει μελετηθεί και είναι διαθέσιμες σημαντικές βιβλιογραφικές πηγές με λύσεις για διάφορα σχετικά με το αντικείμενο προβλήματα.

Όσον αφορά το πρόβλημα δοκών «απείρου» μήκους, θα πρέπει να αναφερθούν ενδεικτικά οι κλασσικές εργασίες των Biot (1937), Rvachev (1958), (1959) και Vesic (1961). Πέραν των εργασιών αυτών υπάρχει μια πληθώρα άλλων δημοσιεύσεων κυρίως προερχόμενων από την πρώην Σοβιετική Ένωση, για τις οποίες γίνεται εκτενής αναφορά από τους Korenev (1960) και Selvadurai (1979).

Όσον αφορά το πρόβλημα των δοκών πεπερασμένου μήκους θα πρέπει να σημειωθεί, ότι σε αντίθεση με την περίπτωση κατά την οποία το έδαφος προσομοιώνεται με απλοποιημένα μοντέλα, δεν είναι γενικά δυνατή η εφαρμογή της μεθόδου της επαλληλίας με την βοήθεια της οποίας η επίλυση του προβλήματος δοκών πεπερασμένου μήκους ανάγεται στην αντίστοιχη επίλυση δοκών «απείρου» μήκους. Επομένως, απαιτούνται ειδικές προσεγγιστικές τεχνικές επίλυσης. Μεταξύ των μεθόδων αυτών μπορούν να αναφερθούν ενδεικτικά η μέθοδος του Borowicka (1939), σύμφωνα με την οποία τα μεγέθη έντασης και μετακίνησης της επιφάνειας του εδάφους που βρίσκεται εν επαφή με τη δοκό αναπτύσσονται σε εκθετικές σειρές, και η μέθοδος του Odhe (1942), σύμφωνα με την οποία η δοκός διακριτοποιείται σε μικρά τμήματα, στο εύρος των οποίων η αναπτυσσόμενη αντίδραση του υποβάθρου θεωρείται σταθερή, και γίνεται η παραδοχή ότι η συμβατότητα των μετακινήσεων και των στροφών υφίσταται μόνον στα συγκεκριμένα σημεία σύνδεσης των τμημάτων αυτών. Και στις δυο προαναφερόμενες μεθόδους γίνεται χρήση των σχέσεων του Flamant και του Boussinesq για τον υπολογισμό των τάσεων που αναπτύσσονται στην επιφάνεια του υποβάθρου. Υπάρχουν, όπως και στην περίπτωση των δοκών «απείρου» μήκους, και άλλες μέθοδοι για τις οποίες γίνεται αναφορά από τους Korenev (1960) και Selvadurai (1979).

1.2.2. Διερεύνηση και εφαρμογές της προσομοίωσης των ημιάκαμπτων συνδέσεων

Η διερεύνηση του προβλήματος της προσομοίωσης των ημιακάμπτων συνδέσεων αποτελεί ένα σημαντικό πεδίο έρευνας στα πλαίσια της μελέτης των συνδέσεων των μεταλλικών κατασκευών. Η πλέον ρεαλιστική προσομοίωση των συνδέσεων αυτών μπορεί να γίνει με εξειδικευμένα προσομοιώματα μη γραμμικών πεπερασμένων στοιχείων δυο ή τριών διαστάσεων (βλέπε π.χ. Abdalla (2000)) σε συνδυασμό όμως με αποτελέσματα πειραμάτων (βλέπε π.χ. Grundy et al (1980)).

Ωστόσο, στα πλαίσια των συνήθων πρακτικών εφαρμογών προτείνεται η προσομοίωση των ημιάκαμπτων συνδέσεων με τη βοήθεια στροφικών ελατηρίων που παρεμβάλλονται μεταξύ κόμβου και δοκού. Για τον προσδιορισμό των διαγραμμάτων M – θ των ελατηρίων αυτών γίνεται χρήση πειραματικών μεθόδων, εξειδικευμένων αναλυτικών μεθόδων, αλλά και συνδυασμός τους. Η σχετική βιβλιογραφία είναι ιδιαίτερα μεγάλη και ενδεικτικά αναφέρονται οι εργασίες των Romstad και Subramanian (1970), για διγραμμικά μοντέλα προσομοίωσης των ημιακάμπτων συνδέσεων, των Frye και Morris (1975) για πολυωνυμικά μοντέλα, των Jones, Kirby και Nethercot (1982), οι οποίοι προσεγγίζουν τα πειραματικά αποτελέσματα με καμπύλες B – spline, και των Kishi και Chen (1989), (1990), οι οποίοι ανέπτυξαν «εκθετικά» μοντέλα. Εκτενέστερη ανασκόπηση τις σχετικής βιβλιογραφίας είναι διαθέσιμη σε πάρα πολλές πηγές, όπως π.χ. οι

εργασίες των Kishi και Chen (1990), και του Abdalla (2000).

Πέραν της βιβλιογραφίας, η οποία αφορά στην διερεύνηση της συμπεριφοράς των ημιακάμπτων συνδέσεων όταν αυτές προσομοιώνονται με την απλοποιημένη μέθοδο των στροφικών ελατηρίων, αξιόλογου εύρους είναι και η αντίστοιχη βιβλιογραφία που σχετίζεται με τις εφαρμογές της μεθόδου αυτής. Από τις αρχές της δεκαετίας του ’30 η ανάλυση των φορέων με ημιάκαμπτες συνδέσεις αποτέλεσε αντικείμενο αρκετών δημοσιεύσεων, στις οποίες γινόταν κατά κύριο λόγο εφαρμογή της κλασσικής μεθόδου κατανομής των ροπών (μια μικρή ανασκόπηση δίνεται από τους Jones et al (1983)). Στις αρχές της δεκαετίας του ’60 η μητρωική ανάλυση εφαρμόστηκε και στο πρόβλημα των στοιχείων με ημιάκαμπτες συνδέσεις. Χαρακτηριστικές επί του αντικειμένου είναι οι εργασίες των Monforton και Wu (1963), οι οποίοι σχημάτισαν μητρώα δυσκαμψίας και φόρτισης για δοκούς Euler – Bernoulli, των Lionberger και Weaver (1969), οι οποίοι μελέτησαν την γραμμική και μη γραμμική δυναμική συμπεριφορά πλαισίων με ημιάκαμπτες συνδέσεις που περιγράφονται από διγραμμικά μοντέλα M – θ, και των Romstad και Subramanian (1970), οι οποίοι μελέτησαν την ελαστική ευστάθεια πλαισίων. Μεταγενέστερα, η εφαρμογή των στοιχείων με ημιάκαμπτες συνδέσεις αποτέλεσε αντικείμενο πολλών εγχειριδίων που αφορούν τη μελέτη και διαστασιολόγηση των μεταλλικών κατασκευών, αλλά και δημοσιεύσεων μεταξύ των οποίων μπορούν να αναφερθούν οι εργασίες του Dario Aristizabal (1994), (1996) και (1997) για τη μελέτη ελαστικής ευστάθειας στοιχείου Euler – Bernoulli, με αναλυτική επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης του προβλήματος, και τον σχηματισμό μητρώων δυσκαμψίας και φόρτισης επιπέδων και χωρικών στοιχείων δοκού στα πλαίσια της θεωρίας β’ τάξης, των Li et al (1995), οι οποίοι ανέπτυξαν μητρώα δυσκαμψίας για γραμμική και μη γραμμική ανάλυση θεωρώντας τους κόμβους σύνδεσης δοκών – υποστυλωμάτων ως διακριτά στοιχεία, των Matheu και Suarez (1996), οι οποίοι μελέτησαν το δυναμικό πρόβλημα φορέων με ημιάκαμπτες συνδέσεις οι σταθερές των οποίων θεωρήθηκαν ως τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν νόμους κατανομής πιθανοτήτων, των Tin – Loi και Misa (1996), οι οποίοι ασχολήθηκαν με την ελαστοπλαστική ανάλυση πλαισίων κάνοντας χρήση της θεωρίας των μεγάλων μετακινήσεων, των Milicevic et al (1998α, β), οι οποίοι χρησιμοποιώντας αλγεβρικές συναρτήσεις παρεμβολής σχημάτισαν μητρώα δυσκαμψίας και μάζας για στοιχεία δοκού, των Coric και Markovic (1998), οι οποίοι σχημάτισαν μητρώα δυσκαμψίας στα πλαίσια της θεωρίας β’ τάξης τόσο με τις ακριβείς όσο και με προσεγγιστικές λύσεις, των Dhillon και O’Malley (1999) και των Seculovic και Salatic (2001), οι οποίοι χρησιμοποίησαν μητρώα δυσκαμψίας στοιχείων δοκού με μη γραμμικές ημιάκαμπτες συνδέσεις για γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση, του Aristizabal (2001), ο οποίος μελέτησε το πρόβλημα δοκών με ημιάκαμπτες συνδέσεις με βάση την θεωρία των μεγάλων μετακινήσεων, των Seculovic et al (2002), οι οποίοι ασχολήθηκαν με τη δυναμική ανάλυση μεταλλικών φορέων λαμβάνοντας υπόψη και τα φαινόμενα απόσβεσης που συνοδεύουν την απόκριση των ημιάκαμπτων συνδέσεων, και των Morfidis και Avramidis (2002), οι οποίοι ανέπτυξαν ένα γενικευμένο πεπερασμένο στοιχείο δοκού για γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Το γενικό πρόβλημα της Δοκού επί ελαστικού υποβάθρου

2.1. Γενικά

Όπως τονίστηκε και στην εισαγωγή, το πρόβλημα της περιγραφής της συμπεριφοράς κατασκευών, και ειδικότερα δοκών, επί ελαστικού υποβάθρου αποτελεί ειδική περίπτωση μιας πολύ γενικής κατηγορίας προβλημάτων της θεωρητικής αλλά και της εφαρμοσμένης μηχανικής με τίτλο «προβλήματα αλληλεπίδρασης μεταξύ παραμορφώσιμων σωμάτων». Η πλήρης επίλυση του προβλήματος αλληλεπίδρασης δυο εν επαφή παραμορφώσιμων σωμάτων (στην πιο γενική περίπτωση μη ελαστικών) απαιτεί τον προσδιορισμό των τάσεων και των παραμορφώσεων στο εσωτερικό των σωμάτων αυτών καθώς και τον προσδιορισμό των μετακινήσεων και των τάσεων σε όλη την επιφάνεια επαφής. Η περίπτωση της αλληλεπίδρασης εδάφους – δοκού στην πιο γενική της μορφή ανήκει στην υποκατηγορία εκείνη, στην οποία εξετάζεται η επαφή ενός τρισδίαστατου ελαστικού σώματος (έδαφος), του οποίου η συμπεριφορά περιγράφεται με τη βοήθεια των γενικών εξισώσεων της θεωρίας ελαστικότητας, με ένα άλλο ελαστικό σώμα (δοκός), η συμπεριφορά του οποίου μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια απλοποιητικών θεωριών (π.χ. τεχνική θεωρία κάμψης). Πρέπει βέβαια να τονιστεί ιδιαίτερα, ότι το πρόβλημα αλληλεπίδρασης μεταξύ δυο εν επαφή σωμάτων δεν περιορίζεται αποκλειστικά στην μελέτη σωμάτων με ελαστική συμπεριφορά. Μεγάλο είναι και το πεδίο έρευνας επάνω στο πρόβλημα αλληλεπίδρασης σωμάτων τα οποία δεν έχουν ελαστική συμπεριφορά ή, ακόμα, αποτελούνται από υλικά των οποίων η συμπεριφορά εξαρτάται και από το χρόνο (π.χ. βισκοελαστικά υλικά). Επίσης, πολύ σημαντικό τμήμα στον τομέα της έρευνας καταλαμβάνουν και τα προβλήματα μονόπλευρης επαφής μεταξύ δυο σωμάτων, ελαστικών ή μη ελαστικών.

Με βάση τα παραπάνω, το γενικό πρόβλημα της ανάλυσης δοκού ή πλάκας επί ελαστικού υποβάθρου έχει τρία σκέλη:

α. την προσομοίωση του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου,

β. την προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφορά της δοκού ή της πλάκας, και

γ. τις παραδοχές για την μορφή της αλληλεπίδρασης.

Κάθε ένα από τα παραπάνω σκέλη του προβλήματος απαιτεί ειδικές παραδοχές, έτσι ώστε το συνολικό πρόβλημα να απεμπλακεί από τις μεγάλες υπολογιστικές δυσκολίες τις οποίες δημιουργεί η γενική του διατύπωση.

Ιδιαιτέρως τα παραπάνω σημεία α. και β. εμπεριέχουν στη γενική τους διατύπωση πολύπλοκες εξισώσεις, οι οποίες είναι δύσκολο να αντιμετωπιστούν μέσα στα πλαίσια των συνήθων εφαρμογών, ακόμα και αν γίνει η παραδοχή της ελαστικής συμπεριφοράς. Όπως είναι γνωστό, η συμπεριφορά του εδάφους απέχει πάρα πολύ από το να είναι ελαστική. Επομένως, η θεώρηση των μη γραμμικών φαινομένων κατά τους υπολογισμούς αυξάνει το επίπεδο ακρίβειας των αποτελεσμάτων. Ωστόσο, και παρά την ύπαρξη εξειδικευμένου λογισμικού σε συνδυασμό με τις αυξημένες πλέον δυνατότητες των ηλεκτρονικών υπολογιστών, μια σύνθετη μη γραμμική ανάλυση μπορεί να θεωρηθεί ασύμφορη ειδικά για την περίπτωση της ανάλυσης μιας επιφανειακής θεμελίωσης. Δεν θα πρέπει βέβαια να λησμονούνται και οι αβεβαιότητες που εισάγουν οι μη γραμμικές αναλύσεις τόσο σε επίπεδο επιλογής των παραμέτρων οι οποίες εισάγονται,

όσο και στο επίπεδο αξιολόγησης των αποτελεσμάτων. Βεβαίως, οι εξειδικευμένες μη γραμμικές αναλύσεις είναι επιβεβλημένες σε μεγάλης έκτασης και σημασίας έργα, όπως π.χ. οι μελέτες βάθρων γεφυρών.

Σε αντίθεση με την προσομοίωση του εδάφους, η προσομοίωση της συμπεριφοράς των δοκών (ή των πλακών) στα πλαίσια της γραμμικώς ελαστικής συμπεριφοράς είναι πλέον αξιόπιστη, καθώς εδώ και πολλά χρόνια είναι διαθέσιμες στη βιβλιογραφία μέθοδοι που είναι θεωρητικά τεκμηριωμένες και πρακτικά αποτελεσματικές.

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει αναφορά και στα τρία σκέλη που συνθέτουν το πρόβλημα της συμπεριφοράς δοκού επί ελαστικού υποβάθρου υπό στατική φόρτιση. Μεγάλη βαρύτητα θα δοθεί στο σκέλος που αφορά την προσομοίωση του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου, ενώ θα γίνει μια συνοπτική αναφορά στις θεωρίες περιγραφής της συμπεριφοράς των δοκών καθώς και της μορφής της αλληλεπίδρασής τους με το έδαφος.

Παράλληλα θα γίνει και μια αναφορά σε δυο ειδικά θέματα προσομοίωσης των δοκών – καθώς το βασικό θέμα της παρούσας διατριβής είναι η μελέτη δοκών επί ελαστικού υποβάθρου – που είναι η προσομοίωση των κόμβων στοιχείων δοκού με τη βοήθεια απολύτως στερεών βραχιόνων και η προσομοίωση των ημιάκαμπτων συνδέσεων μεταξύ δοκών και υποστυλωμάτων, η οποία συναντάται κυρίως κατά τη διαδικασία προσομοίωσης των μεταλλικών κατασκευών. Το τελευταίο θέμα ειδικά αποτελεί ένα ευρύ πεδίο έρευνας με διάφορες αναλυτικές μεθόδους και η εξάντληση του δεν είναι στόχος της παρούσας διατριβής. Ωστόσο, η συνοπτική αναφορά στο αντικείμενο αυτό είναι επιβεβλημένη, καθώς επιμέρους στόχος της διατριβής είναι και η παρουσίαση ενός πεπερασμένου στοιχείου δοκού που ενσωματώνει στους κόμβους του στροφικά ελατήρια, τα οποία αποτελούν μια πρώτη προσέγγιση της συμπεριφοράς των ημιάκαμπτων συνδέσεων.

2.2. Η προσομοίωση του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου

Η επιλογή του κατάλληλου προσομοιώματος με βάση το οποίο θα αναλυθεί ένας φορέας θεμελίωσης είναι ένα πρόβλημα του οποίου η λύση δεν είναι μονοσήμαντη. Το μεγάλο πλήθος δημοσιευμένων πειραματικών και αναλυτικών εργασιών επάνω στο συγκεκριμένο αντικείμενο καταδεικνύει την πολυπλοκότητα του θέματος. Βασικό συμπέρασμα από την μελέτη πολλών από τις εργασίες αυτές είναι ότι η επιλογή του τρόπου με τον οποίο θα πρέπει να προσομοιωθεί η συμπεριφορά του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου στηρίζεται σε μια σειρά παραγόντων όπως:

- τα μηχανικά χαρακτηριστικά του εδάφους θεμελίωσης,
- η δυσκαμψία του φορέα θεμελίωσης και της ανωδομής,
- το βάθος θεμελίωσης,
- η χρονική μεταβλητότητα της εδαφικής αντίδρασης (π.χ. φαινόμενα ερπυσμού),
- η μορφή της επιβαλλόμενης εξωτερικής φόρτισης (π.χ. στατική ή δυναμική).

Στις ακόλουθες παραγράφους θα γίνει μια αναλυτική παρουσίαση των παραδοχών και των εξισώσεων που διέπουν τα προσομοιώματα του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου, για τα οποία έγινε ήδη μια σύντομη παρουσίαση στην Εισαγωγή. Θα παρουσιαστούν τόσο οι χωρικές όσο και οι επίπεδες εκδοχές των σχέσεων που συνδέουν τις εξωτερικές δυνάμεις με τις αντίστοιχες μετακινήσεις για κάθε ένα από τα εξεταζόμενα

προσομοιώματα του εδάφους χωρίς την θεώρηση οποιασδήποτε κατασκευής επ' αυτού. Παράλληλα, θα εκτεθούν και κάποια από τα συμπεράσματα που κατέστη δυνατό να αντληθούν από την έρευνα της βιβλιογραφίας σε σχέση με τις δυνατότητες και τους περιορισμούς των προσομοιωμάτων αυτών στην σωστή απόδοση της επιρροής των παραγόντων που αναφέρθηκαν παραπάνω και οι οποίοι καθορίζουν την αξιοπιστία τους.

2.2.1. Το προσομοίωμα Winkler – Zimmermann

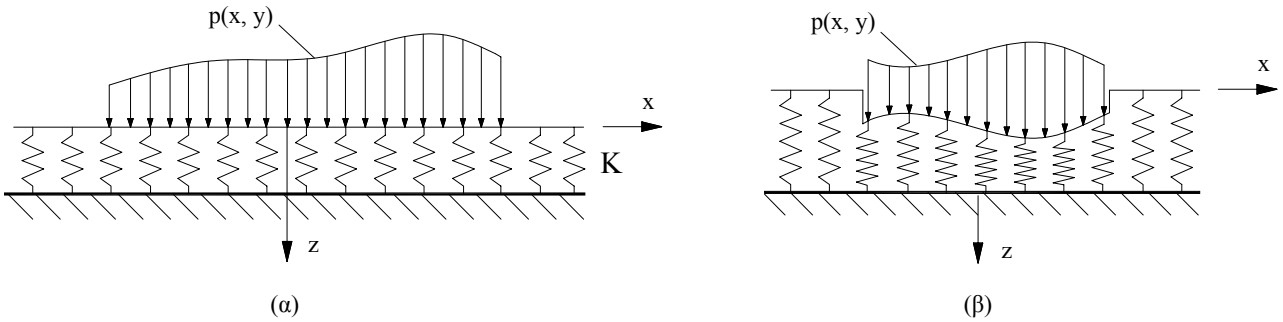
Πρόκειται για το απλούστερο προσομοίωμα ελαστικής συμπεριφοράς του εδάφους υπό κατακόρυφη φόρτιση. Το προσομοίωμα του Winkler (1867), στηρίζεται στην παραδοχή ότι το έδαφος αποτελείται από μια σειρά πυκνά τοποθετημένων και ανεξαρτήτων μεταξύ τους κατακορύφων μεταφορικών ελατηρίων (Σχήμα 2.1α).

Επομένως, η κατακόρυφη μετατόπιση w(x,z) σε οποιοδήποτε σημείο της φορτιζόμενης επιφάνειας του προσομοιώματος είναι ανάλογη της τιμής της κατακόρυφης επιφανειακής φόρτισης q(x,z) στο σημείο αυτό. Έτσι, η σχέση η οποία συνδέει τα μεγέθη w(x,z) και q(x,z) είναι η εξής:

$$p(x,z)=Kw(x,z) \qquad (2.1\alpha)$$

Στην παραπάνω σχέση ο συντελεστής K είναι ο δείκτης εδάφους (διαστάσεις [kN/m^3]).

Η εξίσωση (2.1α) μπορεί να προκύψει και από την θεώρηση των εξισώσεων του τρισδιάστατου συνεχούς ελαστικού μέσου πεπερασμένου πάχους με τη βοήθεια απλοποιητικών παραδοχών για τα πεδία των τάσεων και των παραμορφώσεων (βλέπε Kerr (1965)).



Σχήμα 2.1. (α) Το προσομοίωμα του Winkler, (β) πλήρης ασυνέχεια της παραμόρφωσης της επιφάνειας του εδάφους στα όρια της φόρτισης

Άμεση συνέπεια της παραδοχής του Winker είναι το γεγονός ότι στα σημεία της επιφάνειας του εδάφους τα οποία είναι αφόρτιστα η κατακόρυφη μετακίνηση w(x,z) είναι ίση με το μηδέν. Επομένως, το προσομοίωμα οδηγεί σε ασυνέχεια της παραμορφούμενης επιφάνειας του εδάφους μεταξύ της φορτιζόμενης και της αφόρτιστης επιφάνειας του (Σχήμα 2.1β). Η σχέση (2.1α) λαμβάνει την παρακάτω μορφή στην περίπτωση επίπεδων προβλημάτων (π.χ. για τα προβλήματα επιπέδων πλαισίων):

$$p(x)=kw(x) \qquad (2.1\beta)$$

Πρέπει να διευκρινιστεί, ότι στην παραπάνω σχέση ο συντελεστής k (διαστάσεις [kN/m^2]) συνδέεται με τον δείκτη εδάφους μέσω της σχέσης k=Kb, όπου b είναι το πλάτος της φορτιζόμενης επιφάνειας του εδάφους.

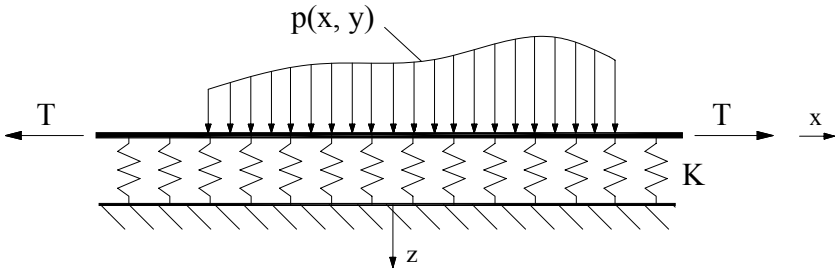
2.2.2. Τα προσομοιώματα των δύο παραμέτρων

Τα προσομοιώματα των δυο παραμέτρων αποτελούν μία πρώτη βελτίωση του προσομοιώματος του Winkler. Βασικό χαρακτηριστικό των προσομοιωμάτων αυτών αποτελεί η δυνατότητα τους να προσδίδουν πλήρη συνέχεια στην παραμορφωμένη επιφάνεια του εδάφους. Τα προσομοιώματα των δυο παραμέτρων (αλλά και τα προσομοιώματα περισσότερων παραμέτρων) μπορούν να αναπτυχθούν μέσω των παρακάτω τριών μεθόδων:

1. Μέθοδοι που βασίζονται στη θεώρηση συγκεκριμένων μηχανικών προσομοιωμάτων που προκύπτουν από την παραδοχή κάποιας μορφής σύνδεσης μεταξύ των ελατηρίων του προσομοιώματος του Winkler.
2. Μέθοδοι που ξεκινώντας από τις εξισώσεις του συνεχούς ελαστικού μέσου καταλήγουν με τη βοήθεια απλοποιητικών παραδοχών (αγνόηση της επιρροής συγκεκριμένων τάσεων) σε απλούστερες διαφορικές εξισώσεις συσχέτισης των εξωτερικών κατακορύφων φορτίων με τις αντίστοιχες μετακινήσεις.
3. Μέθοδοι που στηρίζονται στην ανάπτυξη των εκφράσεων – συναρτήσεων των μετακινήσεων και των τάσεων που ασκούνται στην επιφάνεια του εδάφους σε σειρές Taylor ή Maclaurin, και εν συνεχεία στην απλοποίηση τους με την αγνόηση όρων μεγαλύτερων μιας συγκεκριμένης τάξης. Οι μέθοδοι αυτές ονομάζονται φορμαλιστικές μέθοδοι (Kerr (1984)).

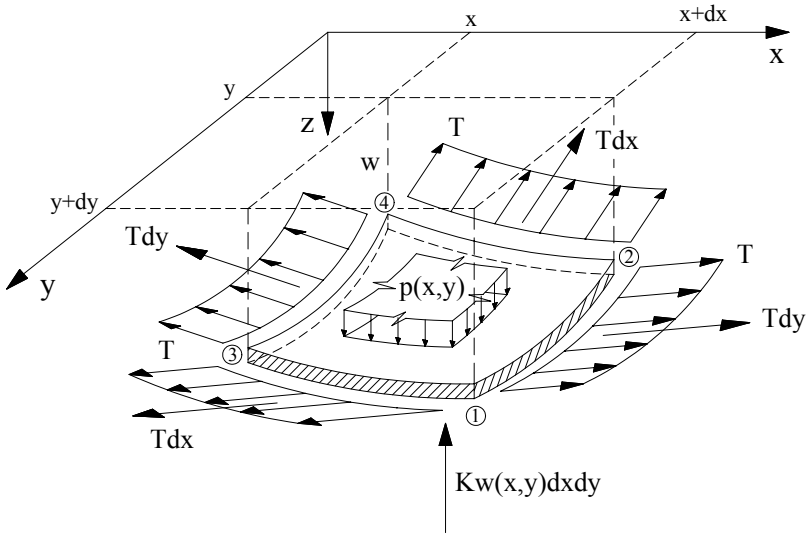
2.2.2.1. Προσομοίωμα Filonenko – Borodich

Το προσομοίωμα του Filonenko – Borodich (1940) αποτελεί εφαρμογή της πρώτης κατηγορίας μεθόδων ανάπτυξης προσομοιωμάτων δυο ή περισσοτέρων παραμέτρων. Το μηχανικό προσομοίωμα συνίσταται από μια στρώση ελατηρίων και από μια απειροστού πάχους ελαστική μεμβράνη. Η επίτευξη της σύνδεσης μεταξύ των μεμονωμένων ελατηρίων επιτυγχάνεται μέσω της σύνδεσης των κεφαλών τους με την μεμβράνη, η οποία θεωρείται ότι βρίσκεται υπό σταθερή εφελκυστική δύναμη T (διαστάσεις [kN/m]), (Σχήμα 2.2).



Σχήμα 2.2. Το μηχανικό προσομοίωμα του Filonenko – Borodich.

Η κατάστρωση της σχέσης που συνδέει την εξωτερική φόρτιση p με τις κατακόρυφες μετακινήσεις του υποστρώματος προκύπτει από την θεώρηση της ισορροπίας των δυνάμεων που δρουν στο σύστημα ελατηρίων – μεμβράνης κατά τον κατακόρυφο άξονα. Πρέπει μάλιστα να τονιστεί, ότι εφόσον η κατακόρυφη ισορροπία του συστήματος επιτυγχάνεται και με τη συμμετοχή αξονικών δυνάμεων, καθίσταται αναγκαία η κατάστρωση των εξισώσεων ισορροπίας στη παραμορφωμένη κατάσταση του συστήματος. Στο Σχήμα 2.3 δίνεται ένα απειροστό στοιχείο της μεμβράνης στην παραμορφωμένη του κατάσταση, λόγω της εφαρμογής της εξωτερικής φόρτισης p(x,y), καθώς και οι δυνάμεις οι οποίες δρουν σ' αυτό.



Σχήμα 2.3. Η κατάσταση παραμόρφωσης απειροστού στοιχείου του συστήματος μεμβράνης – ελατηρίων.

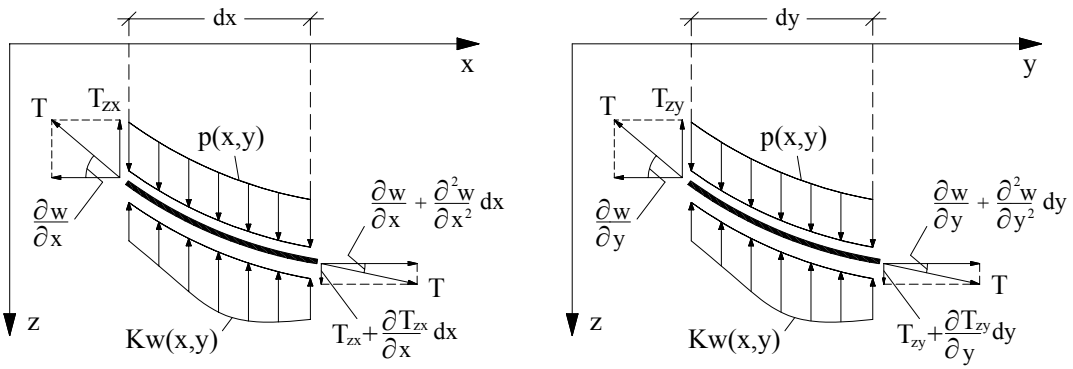
Η εξίσωση ισορροπίας του στοιχειώδους τμήματος, κατά τον κατακόρυφο άξονα, είναι (Σχήμα 2.4):

$$\left(\frac{\partial T_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{zy}}{\partial y}\right)dxdy + pdxdy - (Kw)dxdy = 0 \tag{2.2}$$

Στην παραπάνω εξίσωση, T_{zx} είναι οι συνιστώσες κατά τον άξονα z, των εφελκυστικών δυνάμεων T οι οποίες είναι ομοεπίπεδες με το επίπεδο zx, ενώ T_{zy} είναι οι συνιστώσες κατά τον άξονα z των αντίστοιχων δυνάμεων οι οποίες είναι ομοέπιπεδες με το επίπεδο zy. Οι δυνάμεις αυτές – με βάση την παραδοχή απειροστών μετακινήσεων – είναι (Σχήμα 2.4):

$$T_{zx} = T\sin\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \cong T\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.3α}$$

$$T_{zy} = T\sin\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \cong T\frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.3β}$$



Σχήμα 2.4. Οι δυνάμεις που δρουν στο στοιχειώδες τμήμα του συστήματος ελατήρια – ελαστική μεμβράνη.

Με την εισαγωγή των (2.3α) και (2.3β), στην εξίσωση (2.2) προκύπτει η διαφορική εξίσωση που συνδέει τις κατακόρυφες εξωτερικές δυνάμεις με τις αντίστοιχες μετακινήσεις:

$$p = Kw - T\left(\nabla^2 w\right) \tag{2.4α}$$

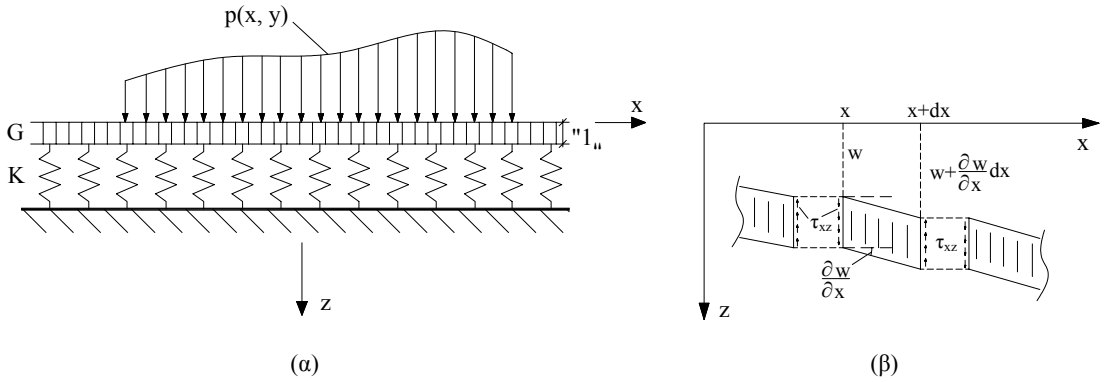
Στην παραπάνω σχέση, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ είναι ο τελεστής του Laplace. Είναι προφανές ότι στην περίπτωση μελέτης επίπεδων προβλημάτων (π.χ. στο επίπεδο x-z) η σχέση (2.4α) δίνει:

$$p = Kw - T\frac{d^2w}{dx^2} \tag{2.4β}$$

2.2.2.2. Προσομοίωμα PASTERNAK

Το προσομοίωμα του Pasternak (1954) ανήκει στην κατηγορία προσομοιωμάτων που αναπτύχθηκαν με βάση την πρώτη μέθοδο ανάπτυξης προσομοιωμάτων δυο ή περισσοτέρων παραμέτρων. Πρόκειται για ένα μηχανικό προσομοίωμα που αποτελείται από μια στρώση κατακορύφων ελατηρίων επί των οποίων εδράζεται ένα επίπεδο διατμητικό στρώμα μοναδιαίου πάχους, το οποίο θεωρείται τελείως ασυμπίεστο (Σχήμα 2.5α). Με τον όρο «διατμητικό» στρώμα χαρακτηρίζεται στην συγκεκριμένη περίπτωση ένα δισδιάστατο σώμα που αποτελείται από κατακορύφως ασυμπίεστα στοιχεία που παραμορφώνονται μόνον κάτω από την επίδραση κατακόρυφων διατμητικών δυνάμεων (Σχήμα 2.5β).

Προκειμένου να διατυπωθεί η σχέση η οποία συνδέει την εξωτερική φόρτιση p(x,y), με τις κατακόρυφες μετατοπίσεις w, καταστρώνεται η συνθήκη ισορροπίας των κατακόρυφων δυνάμεων που δρουν σε ένα απειροστό στοιχείο του διατμητικού επιπέδου (Σχήμα 2.6).



Σχήμα 2.5. (α) Το μηχανικό προσομοίωμα του Pasternak, (β) η παραμόρφωση του διατμητικού στρώματος.

Κάνοντας την παραδοχή ότι το υλικό από το οποίο αποτελείται το διατμητικό στρώμα είναι ομογενές και ισότροπο, το μέτρο διάτμησης είναι κοινό και για τις δυο διευθύνσεις x και y: $G_x=G_z=G$ (διαστάσεις [kN/m^2]). Έτσι οι διατμητικές τάσεις τ_{xz}, τ_{yz} δίνονται από τις σχέσεις:

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.5α}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G\frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.5β}$$

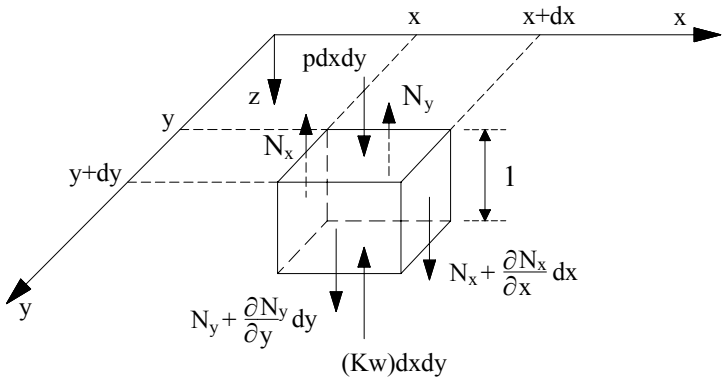
Δεδομένου το ότι το διατμητικό στρώμα έχει μοναδιαίο πάχος, οι συνολικές διατμητικές δυνάμεις ανά μονάδα μήκους είναι:

$$N_x = \int_0^1 \tau_{xz}\,dz = G\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.6α}$$

$$N_y = \int_0^1 \tau_{yz} dz = G \frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.6β}$$

Η συνθήκη ισορροπίας κατά τον κατακόρυφο άξονα είναι (Σχήμα 2.6):

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p - Kw = 0 \tag{2.7}$$



Σχήμα 2.6. Οι δυνάμεις που δρουν σε απειροστό στοιχείο του διατμητικού στρώματος.

Η εισαγωγή των (2.6α), (2.6β) στην εξίσωση (2.7) οδηγεί στην διαφορική εξίσωση που συνδέει την εξωτερική κατακόρυφη φόρτιση p(x,y), με τις κατακόρυφες μετακινήσεις w(x,y):

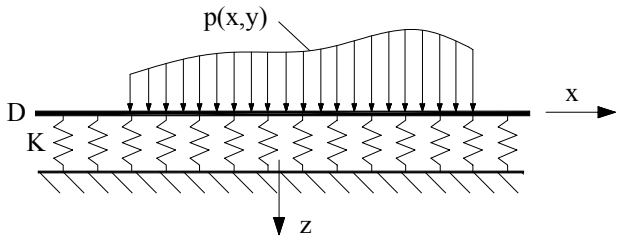
$$p = Kw - G\left(\nabla^2 w\right) \tag{2.8α}$$

όπου ∇^2 είναι ο τελεστής του Laplace. Για τη μελέτη επιπέδων προβλημάτων (π.χ. στο επίπεδο x-z) προκύπτει από τη (2.8α):

$$p = Kw - G \frac{d^2 w}{dx^2} \tag{2.8β}$$

2.2.2.3. Προσομοίωμα HETÉNYI

Το προσομοίωμα που προτάθηκε από τον Hetényi είναι και αυτό ένα μηχανικό προσομοίωμα του οποίου η βασική σύλληψη δεν διαφέρει επί της ουσίας από τα δυο προηγούμενα. Κατά τον Hetényi, η αλληλεπίδραση μεταξύ των ανεξάρτητων ελατηρίων επιτυγχάνεται μέσω μιας λεπτής πλάκας δυσκαμψίας D, για την οποία γίνεται η παραδοχή ότι εμφανίζει μόνον καμπτικές παραμορφώσεις (Σχήμα 2.7).



Σχήμα 2.7. Το μηχανικό προσομοίωμα του Hetényi.

Η συνθήκη της ισορροπίας των δυνάμεων του στοιχειώδους τμήματος πλάκας – ελατηρίων κατά τον κατακόρυφο άξονα z είναι (Σχήμα 2.8):

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p - Kw = 0 \tag{2.9}$$

Στην παραπάνω σχέση τα μεγέθη q_x, q_y είναι οι τέμνουσες δυνάμεις που προκύπτουν από την σύνθεση των τάσεων τ_{xz} και τ_{yz} οι οποίες ενεργούν στις τομές x και y αντίστοιχα και έχουν τη διεύθυνση του άξονα z:

$$q_x = \int_0^d \tau_{xz} dz \tag{2.10α}$$

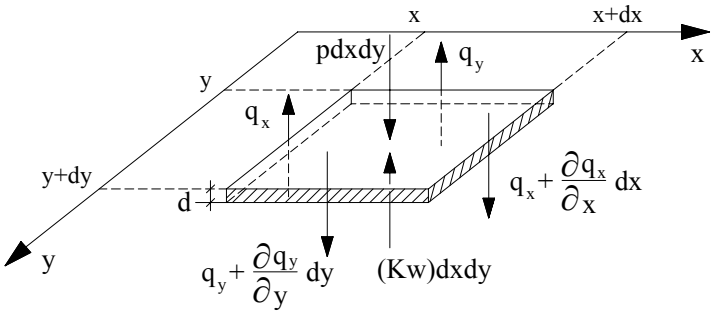
$$q_y = \int_0^d \tau_{yz} dz \tag{2.10β}$$

Οι δυνάμεις αυτές συνδέονται, όπως εύκολα αποδεικνύεται, με τις κατακόρυφες μετακινήσεις w της πλάκας μέσω των παρακάτω σχέσεων (βλέπε Νιτσιώτα (1985)):

$$q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2 w\right) \tag{2.10γ}$$

$$q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla^2 w\right) \tag{2.10δ}$$

Όπου $D=Ed^3/[12(1-v^2)]$ είναι δυσκαμψία της πλάκας και E, ν είναι οι ελαστικές της σταθερές.



Σχήμα 2.8. Η ισορροπία του απειροστού στοιχείου κατά τον κατακόρυφο άξονα.

Θέτοντας τις (2.10γ) και (2.10δ) στην (2.9) προκύπτει η διαφορική εξίσωση μέσω της οποίας υπολογίζονται οι κατακόρυφες μετακινήσεις w(x,y) του ελαστικού υποβάθρου:

$$p = Kw + D\left(\nabla^4 w\right) \tag{2.11α}$$

Για επίπεδα προβλήματα η (2.11α) δίνει:

$$p = Kw + EI\frac{d^4 w}{dx^4} \tag{2.11β}$$

Όπως γίνεται κατανοητό, στην (2.11β) η δυσκαμψία της πλάκας D έχει αντικατασταθεί από το μέγεθος (EI), το οποίο ως γνωστόν χαρακτηρίζει την δυσκαμψία δοκών.

2.2.2.4. «Γενικευμένο» προσομοίωμα εδάφους

Το γενικευμένο προσομοίωμα του εδάφους δεν μπορεί να ενταχθεί μέσα στα πλαίσια των μεθόδων με τις οποίες διατυπώνονται τα προσομοιώματα δυο ή περισσοτέρων παραμέτρων. Σε αντίθεση με τα προσομοιώματα που παρουσιάστηκαν πιο πάνω, το «γενικευμένο» προσομοίωμα δεν στηρίζεται στην θεώρηση ενός μηχανικού προσομοιώματος αποτελούμενου από μεταφορικά ελατήρια με κάποιας μορφής

διασύνδεση μεταξύ τους, αλλά στην παραδοχή ότι η αλληλεπίδραση μιας δοκού (ή μιας πλάκας) με το έδαφος δεν πραγματοποιείται μόνο μέσω κατακορύφων δυνάμεων ανάλογων των κατακορύφων μετακινήσεων της επιφάνειας, αλλά και μέσω ροπών ανάλογων της γωνίας κλίσης της ελαστικής της γραμμής. Επομένως:

$$p = Kw \tag{2.12α}$$

$$m_n = k_1 \frac{dw}{dn} \tag{2.12β}$$

Στη σχέση (2.12β) ο δείκτης n αντιπροσωπεύει μια οποιαδήποτε διεύθυνση σε ένα σημείο του επιπέδου της επιφάνειας του εδάφους. Στην περίπτωση επιπέδου προβλήματος η σχέση (2.12β) γίνεται:

$$m_x = k_1 \frac{dw}{dx} \tag{2.12γ}$$

Η ροπή m_x μπορεί να αντικατασταθεί από μια κατανεμημένη κατακόρυφη φόρτιση. Η αντικατάσταση αυτή επιτυγχάνεται με τρόπο όμοιο με αυτό που χρησιμοποιείται για να μετατραπεί η ροπή συστροφής m_{xy} στο όριο μιας πλάκας, σε ισοδύναμη κατακόρυφη τέμνουσα $\partial m_{xy} / \partial x$ (βλέπε π.χ. Νιτσιώτα (1985)). Η ισοδύναμη αυτή τέμνουσα προστίθεται αλγεβρικά στις κατακόρυφες δυνάμεις των μεταφορικών ελατηρίων.

Επομένως, η μαθηματική διατύπωση του γενικευμένου προσομοιώματος είναι:

$$p = Kw - k_1 \frac{d^2 w}{dx^2} \tag{2.13}$$

Στην Παράγραφο 2.2.7 θα αποδειχθεί πως υπάρχει συσχέτιση του γενικευμένου προσομοιώματος με το προσομοίωμα του Pasternak, καθώς το μηχανικό προσομοίωμα του σχήματος (2.5) αποτελεί μια φυσική ερμηνεία του «γενικευμένου» προσομοιώματος του εδάφους. Επίσης, θα δοθεί μια επεξήγηση του τρόπου με τον οποίο η σχέση (2.13) μπορεί να προκύψει από την (2.12γ). Αξίζει τέλος να σημειωθεί, ότι η αλληλεπίδραση εδάφους – κατασκευής και με στροφικές αντιδράσεις – ροπές είναι τεκμηριωμένη (Pasternak (1937)), ωστόσο θεωρείται αμελητέα και αγνοείται όταν ο λόγος του μέτρου ελαστικότητας του εδάφους προς το μέτρο ελαστικότητας της δοκού (ή της πλάκας) είναι μικρότερος του 1/100 (Herrmann, Mason και Chan (1967)).

2.2.2.5. Προσομοίωμα Vlasov και οι τροποποιήσεις – επεκτάσεις του

Το προσομοίωμα του Vlasov (Vlasov και Leont'ev (1960)) είναι αποτέλεσμα εφαρμογής γενικών παραλλακτικών μεθόδων της μηχανικής στα πλαίσια της θεωρίας των ελαστικών υποβάθρων. Επομένως κατατάσσεται στην δεύτερη κατηγορία μεθόδων, καθώς βασίζεται στις γενικές εξισώσεις της επίπεδης ελαστικότητας (επίπεδη ένταση, επίπεδη παραμόρφωση). Η μεθοδολογία ανάπτυξης του προσομοιώματος επιτυγχάνει την προσέγγιση των αγνώστων μεγεθών μετακίνησης των υλικών σημείων του υποβάθρου μέσω της ανάπτυξης τους σε αριθμητικές σειρές πεπερασμένου αριθμού όρων. Παράλληλα, στηρίζεται (προαιρετικά όμως) στην πρόσθετη παραδοχή του αμελητέου των οριζοντίων μετακινήσεων υποβάθρου, με αποτέλεσμα η τελική μορφή της διαφορικής εξίσωσης του προσομοιώματος να είναι μια συνήθης διαφορική

εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Έτσι, η διαδικασία επίλυσης της είναι σχετικά απλή για κάθε κατηγορία εξωτερικής φόρτισης. Το προσομοίωμα του Vlasov μπορεί να εφαρμοστεί σε προβλήματα που αφορούν φορείς θεμελίωσης εδραζόμενους είτε επί ενδόσιμης εδαφικής στρώσης πεπερασμένου πάχους η οποία εδράζεται επί ακλόνητου υποβάθρου, είτε επί εδαφικής στρώσης απείρου πάχους.

Βασικό χαρακτηριστικό του προσομοιώματος είναι το γεγονός ότι τα αποτελέσματα στα οποία καταλήγει είναι σε άμεση εξάρτηση από την παραδοχή που εξαρχής γίνεται για την μορφή της κατανομής των κατακορύφων μετακινήσεων του ενδόσιμου υποβάθρου. Επομένως, το προσομοίωμα δίνει την ευχέρεια στο χρήστη να βελτιώσει την αποτελεσματικότητα του, επιλέγοντας διάφορες μορφές για τη συνάρτηση που περιγράφει την κατανομή των κατακορύφων μετακινήσεων, και να προσδιορίσει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται τα τελικά αποτελέσματα σε σχέση με τη μορφή της συνάρτησης αυτής. Παράλληλα, είναι δυνατή και η χρήση πειραματικών δεδομένων με βάση τα οποία μπορεί να καταστρωθεί και να χρησιμοποιηθεί εξίσωση κατανομής κατακορύφων μετακινήσεων του υποβάθρου.

Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιαστεί πρώτα η αρχική διατύπωση του προσομοιώματος όπως αρχικά παρουσιάστηκε από τους Vlasov και Leont'ev (1960). Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν οι τροποποιήσεις του προσομοιώματος που είναι διαθέσιμες στη βιβλιογραφία.

Η αρχική διατύπωση του προσομοιώματος

Η διατύπωση των εξισώσεων του προβλήματος ξεκινά τη θεώρηση του ελαστικού υποβάθρου ενός επιπέδου ελαστικού σώματος διατομής bxH και απείρου μήκους (Σχήμα 2.9) του οποίου η βάση εδράζεται επί ακλονήτου υποβάθρου. Ξεκινώντας από τις συνθήκες επίπεδης έντασης στο επίπεδο x – z, τα πεδία των τάσεων, των μετατοπίσεων και των παραμορφώσεων είναι τα ακόλουθα:

Πεδίο τάσεων

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x,z)\ ,\ \sigma_{zz} = \sigma_{zz}(x,z)\ ,\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x,z)\ ,\ \tau_{zx} = \tau_{zx}(x,z)\ ,\ \sigma_{yy} = \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0 \qquad (2.14)$$

Πεδίο μετατοπίσεων

$$\upsilon = \upsilon(x,z)\ ,\ w = w(x,z)\ ,\ \upsilon = 0 \qquad (2.15)$$

Πεδίο παραμορφώσεων

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\ ,\quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}\ ,\quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial \upsilon}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0 \qquad (2.16)$$

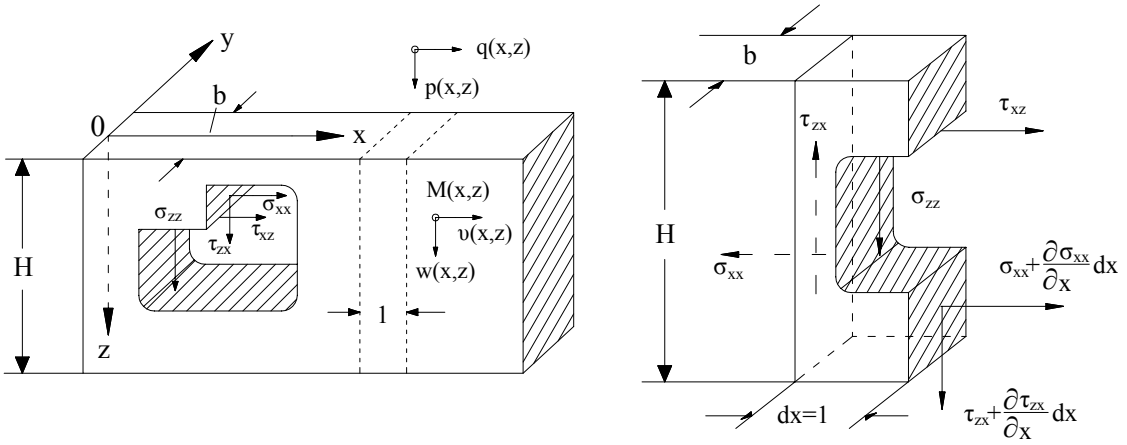
Ακολούθως εισάγεται η βασική παραδοχή του προσομοιώματος σύμφωνα με την οποία ικανοποιητική προσέγγιση των αγνώστων συναρτήσεων μετακίνησης υ(x,z), w(x,z) μπορεί να επιτευχθεί με την έκφραση τους με τη μορφή των παρακάτω αριθμητικών σειρών πεπερασμένου αριθμού όρων:

$$\upsilon(x,z) = \sum_{i=1}^{m} U_i(x)\,\varphi_i(z) \qquad (i = 1, 2, 3, ..., m) \qquad \text{(Οριζόντια διεύθυνση)} \qquad (2.17\alpha)$$

$$w(x,z) = \sum_{k=1}^{n} V_k(x)\,\psi_k(z) \qquad (k = 1, 2, 3, ..., n) \qquad \text{(Κατακόρυφη διεύθυνση)} \qquad (2.17\beta)$$

Όπως παρατηρείται από τις παραπάνω σχέσεις, η παραδοχή η οποία γίνεται για την μορφή των αγνώστων μετακινήσεων του υποβάθρου μπορεί να θεωρηθεί ως μια εφαρμογή της μεθόδου διαχωρισμού των

μεταβλητών που εφαρμόζεται γενικότερα σε προβλήματα των οποίων η λύση ανάγεται στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων με άγνωστες συναρτήσεις δυο μεταβλητών. Πρέπει να τονιστεί, ότι οι αδιάστατες συναρτήσεις $\varphi_i(z)$, $\psi_k(z)$ θεωρούνται γνωστές. Αυτό σημαίνει ότι των περαιτέρω υπολογισμών θα πρέπει να προηγηθεί μια παραδοχή για την μορφή των συναρτήσεων αυτών, οι οποίες καθορίζουν την μορφή – κατανομή τόσο των οριζόντιων όσο και των κατακόρυφων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου. Αντίθετα οι συναρτήσεις $U_i(x)$, $V_k(x)$ που καθορίζουν την κατανομή των οριζόντιων και κατακόρυφων μετακινήσεων κατά τον οριζόντιο άξονα x, είναι οι άγνωστοι του προβλήματος αποτελούν το αντικείμενο των υπολογισμών και ονομάζονται **γενικευμένες μετακινήσεις**.



Σχήμα 2.9. Η κατάσταση επίπεδης έντασης.

Για τον προσδιορισμό των γενικευμένων μετακινήσεων $U_i(x)$, $V_k(x)$ θα πρέπει να καταστρωθούν οι εξισώσεις ισορροπίας μιας στοιχειώδους λωρίδας του υποβάθρου, μήκους dx=1. Με βάση την αρχή των «δυνατών μετακινήσεων» του Lagrange, η κατάσταση ισορροπίας προσεγγίζεται εάν εξισωθεί με το μηδέν το συνολικό έργο που εκτελούν όλες οι εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στη στοιχειώδη λωρίδα κατά τη διάρκεια οιασδήποτε «δυνατής» μετακίνησης. Με βάση τις σχέσεις (2.17α) και (2.17β) καθίσταται σαφές, ότι η κάθε στοιχειώδης λωρίδα κατέχει (m+n) βαθμούς ελευθερίας: m κατά την διαμήκη διεύθυνση (παράλληλη του άξονα x) και n κατά την εγκάρσια διεύθυνση (παράλληλη του άξονα z). Επομένως, υπάρχουν m διαφορετικές μεταξύ τους «δυνατές μετακινήσεις» της στοιχειώδους λωρίδας κατά τη διεύθυνση x, και n κατά z. Άρα, θα πρέπει να καταστρωθούν m+n εξισώσεις, οι οποίες αποτελούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων, η λύση του οποίου οδηγεί στον προσδιορισμό των γενικευμένων μετακινήσεων $U_i(x)$, $V_k(x)$. Το έργο που εκτελούν οι εσωτερικές και οι εξωτερικές δυνάμεις και τάσεις για κάθε μια από τις m+n «δυνατές» μετακινήσεις δίνεται από τις παρακάτω εκφράσεις:

$$\int_0^H \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\varphi_j\, bdz - \int_0^H \tau_{xz}\frac{d\varphi_j}{dz}\, bdz + \int_0^H q(x,z)\,\varphi_j bdz = 0 \quad (j = 1, 2, 3, ... m) \tag{2.18α}$$

$$\int_0^H \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}\psi_h bdz - \int_0^H \sigma_{zz}\frac{d\psi_h}{dz}\, b\, dz + \int_0^H p(x,z)\,\psi_h bdz = 0 \quad (h = 1, 2, 3, ... m) \tag{2.18β}$$

όπου bdz= dF είναι το στοιχειώδες τμήμα της διατομής του ελαστικού υποβάθρου και b το πάχος του (Σχήμα 2.9). Η σχέση (2.18α) αναφέρεται στο συνολικό έργο που εκτελούν οι δυνάμεις κατά την οριζόντια

διεύθυνση, ενώ η (2.18β) στο αντίστοιχο έργο που εκτελείται κατά την κατακόρυφη διεύθυνση. Λαμβάνοντας υπόψη τις παρακάτω σχέσεις που συνδέουν τις τάσεις με τις παραμορφώσεις στην περίπτωση της επίπεδης εντατικής κατάστασης:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{zz}), \quad \sigma_{zz} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{zz} + \nu\varepsilon_{xx}), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{xz} \tag{2.19}$$

αλλά και τις σχέσεις (2.16), (2.17α), (2.17β), το σύστημα των εξισώσεων (2.18α), (2.18β) παίρνει την εξής μορφή:

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\frac{d^2U_i}{dx^2} - \frac{1-\nu}{2}\sum_{i=1}^{m}b_{ji}U_i + \sum_{k=1}^{n}\frac{dV_k}{dx}(\nu\, t_{jk} - \frac{1-\nu}{2}c_{jk}) + \frac{1-\nu^2}{E}q_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3, ..., m) \tag{2.20α}$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\frac{dU_i}{dx}(\nu\, t_{hi} - \frac{1-\nu}{2}c_{hi}) + \frac{1-\nu}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{d^2V_k}{dx^2}r_{hk} - \sum_{k=1}^{n}V_k\, s_{hk} + \frac{1-\nu^2}{E}p_h = 0 \quad (h = 1, 2, 3, ..., n) \tag{2.20β}$$

Στο παραπάνω σύστημα:

$$q_j = q(x,0)\, b\varphi_j(0) + \int_0^H q(x,z)\,\varphi_j b dz \qquad p_h = p(x,0)\, b\psi_h(0) + \int_0^H p(x,z)\,\psi_h b dz \tag{2.20γ}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \int_0^H \varphi_i\varphi_j b dz && r_{hk} = r_{kh} = \int_0^H \psi_k\,\psi_h b dz \\
&b_{ji} = b_{ij} = \int_0^H \frac{d\varphi_j}{dz}\frac{d\varphi_i}{dz} b dz && s_{hk} = s_{kh} = \int_0^H \frac{d\psi_h}{dz}\frac{d\psi_k}{dz} b dz \\
&c_{jk} = \int_0^H \frac{d\varphi_j}{dz}\psi_k\, b dz && c_{hi} = \int_0^H \frac{d\varphi_i}{dz}\psi_h\, b dz \\
&t_{jk} = \int_0^H \varphi_j\frac{d\psi_k}{dz} b dz && t_{hi} = \int_0^H \varphi_i\frac{d\psi_h}{dz} b dz
\end{aligned} \tag{2.20δ}$$

Θα πρέπει να τονιστεί, ότι οι όροι εντός των ολοκληρωμάτων στις σχέσεις (2.20γ) αντιστοιχούν στις μαζικές δυνάμεις του ελαστικού υποβάθρου, ενώ οι όροι $q(x,0)\varphi_j(0)$ και $p(x,0)\psi_h(0)$ αντιστοιχούν στις επιφανειακές δυνάμεις που δρουν στην ελεύθερη επιφάνεια του.

Μετά την επιλογή των συναρτήσεων $\varphi_i(z)$, $\psi_k(z)$ μπορεί να ακολουθήσει καταρχήν ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων (2.20δ) και σε δεύτερο στάδιο η κατάστρωση του συστήματος των εξισώσεων (2.20α) και (2.20β), η τάξη του οποίου είναι 2(m+n). Η επίλυση του συστήματος αυτού απαιτεί τη γνώση ενός συγκεκριμένου αριθμού συνοριακών συνθηκών. Εφόσον, όπως και πιο επάνω τονίστηκε, οι βαθμοί ελευθερίας του ελαστικού υποβάθρου είναι m+n, βγαίνει εύκολα το συμπέρασμα ότι ο αριθμός των απαιτούμενων συνοριακών συνθηκών είναι 2(m+n), και άρα είναι ίσος με τους βαθμούς ελευθερίας των δυο ακραίων «διατομών» του αλλά και με την τάξη του συστήματος. Οι συνοριακές αυτές συνθήκες μπορούν να εκφραστούν είτε ως συναρτήσεις τάσεων είτε ως συναρτήσεις μετακινήσεων είτε τέλος ως συνδυασμός τους. Εφόσον όμως οι εξισώσεις του προσομοιώματος είναι βασισμένες σε συνθήκες μηδενισμού του έργου των εξωτερικών και των εσωτερικών δυνάμεων που δρουν στο σώμα κατά τη διάρκεια όλων των «δυνατών»

μετακινήσεων του, θα πρέπει και οι συνοριακές συνθήκες να εκφράζονται μέσω μεγεθών που αφορούν έργο δυνάμεων. Για το λόγο αυτό εισάγονται τα μεγέθη $T_i(x)$ και $S_h(x)$:

$$T_j(x) = \int_0^H \sigma_{xx} \varphi_j dF \qquad (j = 1, 2, 3, ..., m) \tag{2.21α}$$

$$S_h(x) = \int_0^H \tau_{zx} \psi_h dF \qquad (h = 1, 2, 3, ..., n) \tag{2.21β}$$

τα οποία δίνουν το «δυνατό» έργο που εκτελούν οι ορθές ($\sigma_x dF$) και οι διατμητικές ($\tau_{yx} dF$) δυνάμεις που δρουν σε κάποια τυχούσα «διατομή» του υποβάθρου, κατά τη διάρκεια κάθε μίας από τις m+n «δυνατές» μετακινήσεις των σημείων της «διατομής» αυτής. Τα μεγέθη $T_i(x)$ και $S_h(x)$ ονομάζονται γενικευμένες ορθές και διατμητικές δυνάμεις αντίστοιχα, και δρουν σε μια τυχούσα «διατομή» του υποβάθρου. Με τη βοήθεια των γενικευμένων δυνάμεων είναι δυνατή η έκφραση των απαραίτητων συνοριακών συνθηκών με τη μορφή τάσεων στις ακραίες «διατομές» του υποβάθρου. Η δυνατότητα αυτή μπορεί να γίνει εύκολα φανερή αν ληφθεί υπόψη ότι οι τάσεις σ_{xx}, τ_{zx} που υπεισέρχονται στις σχέσεις (2.21α) και (2.21β) αντίστοιχα, συσχετίζονται με τις γενικευμένες μετακινήσεις U_i, V_k μέσω των σχέσεων (2.16), (2.17α), (2.17β) και (2.19).

Οι εξισώσεις που εκτέθηκαν πιο πάνω είναι οι βασικές εξισώσεις ενός προσομοιώματος όχι μονοσήμαντα ορισμένου. Πράγματι, οι εξισώσεις (2.20α) και (2.20β) δίνουν τη δυνατότητα αφενός της επιλογής διάφορων μορφών για τις συναρτήσεις κατανομής των μετακινήσεων εντός του ελαστικού υποβάθρου και αφετέρου την επιλογή οποιουδήποτε αριθμού όρων.

Ειδίκευση των γενικών εξισώσεων – κατάστρωση των εξισώσεων του προσομοιώματος των δυο παραμέτρων

Το προσομοίωμα των δυο παραμέτρων του Vlasov με τη μορφή που είναι γνωστό στη διεθνή βιβλιογραφία προκύπτει από την εξιδίκευση των εξισώσεων που παρουσιάστηκαν πιο πάνω. Η εξειδίκευση αυτή γίνεται με τη βοήθεια των εξής απλοποιητικών παραδοχών:

1. Η φόρτιση του εδάφους συνίσταται μόνο από κατακόρυφο επιφανειακό φορτίο p(x,0), δηλ. $q_j = 0$.
2. $\upsilon(x,z) = 0$ (2.22α)
3. $w(x,z)=V_1(x)\psi_1(z)$ (2.22β)

Με βάση τις παραπάνω παραδοχές τα πεδία των παραμορφώσεων και των τάσεων γίνονται αντίστοιχα:

$$\varepsilon_{zz} = V_1(x)\frac{d\psi_1}{dz} \tag{2.23α}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{dV_1}{dx}\psi_1(z) \tag{2.23β}$$

$$\varepsilon_{xx} = 0 \tag{2.23γ}$$

και

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{1-\nu^2}V_1(x)\frac{d\psi_1}{dz} \tag{2.23δ}$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\frac{dV_1}{dx}\psi_1(z) \tag{2.23ε}$$

Οι παραπάνω σχέσεις αναφέρονται σε συνθήκες επίπεδης έντασης. Πολύ εύκολα μπορεί να γίνει αναγωγή των σχέσεων αυτών για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.23δ, ε) αλλά με ελαστικές σταθερές E_o, ν_o που δίνονται από τις σχέσεις (Σχήμα 2.10β):

$$E_0 = \frac{E}{1-\nu^2}\ ,\quad \nu_0 = \frac{\nu}{1-\nu} \tag{2.23στ}$$

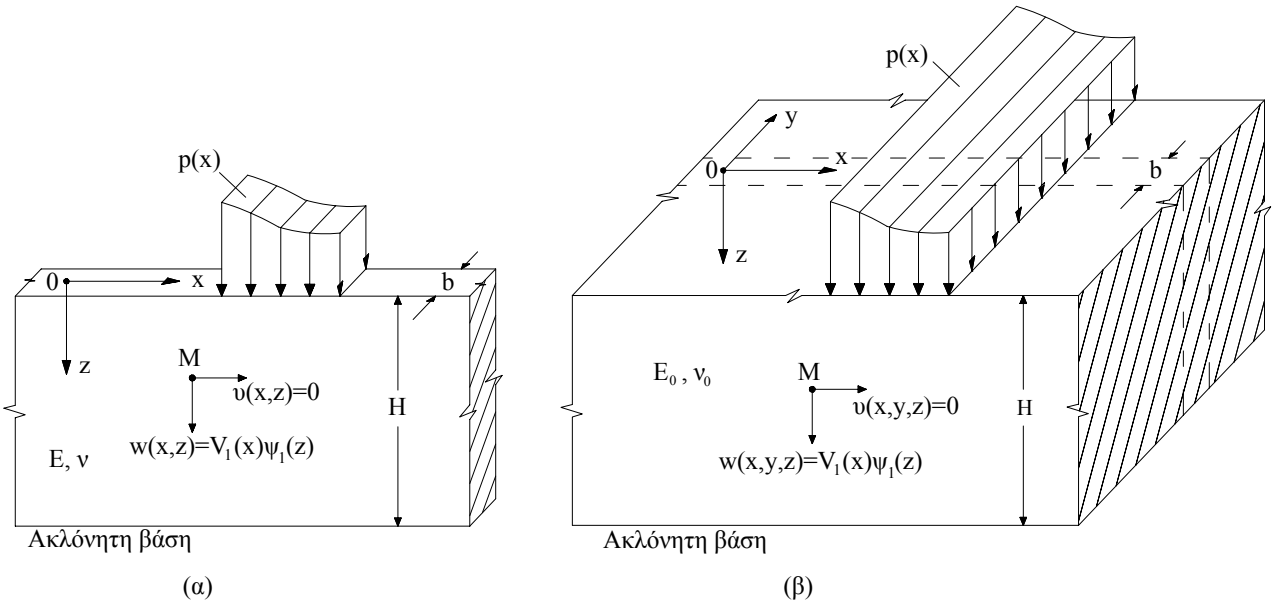
Με βάση τις παραπάνω παραδοχές, το σύστημα των (2.20α), (2.20β) "εκφυλίζεται" στην εξίσωση που περιέχει τις συναρτήσεις $V_1(x)$ και $\psi_1(z)$:

$$\left(\frac{1-\nu}{2} r_{11}\right)\frac{d^2V_1}{dx^2} - s_{11}V_1 + \left(\frac{1-\nu^2}{E}\right)p_1 = 0 \tag{2.24}$$

Στην παραπάνω εξίσωση:

$$r_{11} = \int_0^H \psi_1^2(z)bdz,\quad s_{11} = \int_0^H \left(\frac{d\psi_1}{dz}\right)^2 bdz,\quad p_1 = p(x)b\psi_1(0)$$

Ο όρος p_1 αφορά το έργο που εκτελείται από το κατανεμημένο κατακόρυφο φορτίο p(x) που δρα στην ελεύθερη επιφάνεια του υποβάθρου (Σχήμα 2.10α, β).



Σχήμα 2.10. Εφαρμογή του προσομοιώματος σε συνθήκες επίπεδης έντασης (α) και επίπεδης παραμόρφωσης (β).

Η (2.24) η οποία και αποτελεί τη βασική εξίσωση του προσομοιώματος, μπορεί να γραφτεί:

$$(2\,t)\frac{d^2V_1}{dx^2} - k\,V_1 + p_1 = 0 \tag{2.25}$$

Όπου:

$$k = \frac{E\,s_{11}}{1-\nu^2} \tag{2.26α}$$

$$t = \frac{E\,r_{11}}{4\,(1+\nu)} \tag{2.26β}$$

Η επίλυση της (2.25) απαιτεί την γνώση συνοριακών συνθηκών, οι οποίες είναι δυνατό να εκφραστούν (όπως τονίστηκε προηγουμένως) με τη βοήθεια των γενικευμένων δυνάμεων. Με βάση τις σχέσεις (2.21α), (2,21β) αλλά και τις παραδοχές (2.22α) και (2.22β) προκύπτουν:

$$T_1 = \int_0^H \sigma_{xx} \varphi_1 b dz = 0 \tag{2.27α}$$

$$S_1 = \int_0^H \tau_{zx} \psi_1 b dz = \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) \frac{dV_1}{dx} \int_0^H \psi_1^2(z) dF = 2t \frac{dV_1}{dx} \tag{2.27β}$$

Επιλογή εξίσωσης της κατανομής των κατακορύφων μετακινήσεων.

Όπως τονίστηκε και στην αρχή της παρούσας παραγράφου, το προσομοίωμα του Vlasov διαφέρει από τα υπόλοιπα προσομοιώματα των δυο παραμέτρων στο ότι η διαφορική εξίσωση που το διέπει εξαρτάται και από την επιλογή της συνάρτησης $\psi_1(z)$ που προσδιορίζει την κατανομή (προφίλ) των κατακορύφων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου. Με κατάλληλη επιλογή της $\psi_1(z)$ είναι δυνατό να αυξηθεί η ακρίβεια του προσομοιώματος σε τέτοιο βαθμό έτσι ώστε να αντισταθμιστεί κατά κάποιο ποσοστό η απώλεια ακρίβειας που προκαλεί το γεγονός ότι για την προσέγγιση της w(x,z) (σχέση (2.17β)) χρησιμοποιείται μόνο ένας όρος και όχι περισσότεροι. Επομένως, το προσομοίωμα του Vlasov θέτει επιπλέον και το πρόβλημα της κατάλληλης επιλογής της εξίσωσης $\psi_1(z)$.

Εφόσον το πάχος του εδαφικού στρώματος είναι σχετικά μικρό, έχει αποδειχθεί (Vlasov (1966)) ότι τα αποτελέσματα του προσομοιώματος είναι ικανοποιητικά αν επιλεγεί η σχέση:

$$\psi_1(z) = \frac{H - z}{H} \tag{2.28}$$

Πρόκειται για μια γραμμική σχέση η οποία, αν συνδυαστεί με τις εξισώσεις (2.23α) και (2.23β), οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η επιλογή της ως σχέσης περιγραφής της κατανομής των κατακορύφων μετακινήσεων, έχει ως αποτέλεσμα, οι παραμορφώσεις ε_{yy}, και οι τάσεις σ_{xx} να είναι σταθερές κατά την έννοια του κατακόρυφου άξονα. Θα πρέπει επίσης να τονιστεί ότι η (2.28) μπορεί να εφαρμοστεί – σύμφωνα με το Vlasov – με ικανοποιητικά αποτελέσματα και στην περίπτωση ελαστικού υποβάθρου το οποίο συντίθεται από διάφορες στρώσεις μικρού σχετικά πάχους η κάθε μια. Σε μια τέτοια περίπτωση, η παράμετρος H αφορά το πάχος της εκάστοτε στρώσης εντός της οποίας οι κατακόρυφες τάσεις σ_{zz} μπορούν να θεωρηθούν σταθερές. Για μεγαλύτερα βάθη του εδαφικού υποστρώματος η (2.28) παύει να προσομοιώνει ικανοποιητικά την κατανομή των κατακορύφων μετακινήσεων. Στην περίπτωση αυτή προτείνεται η σχέση (Vlasov (1966)):

$$\psi_1(z) = \frac{\sinh[\gamma(H - z)]}{\sinh(\gamma H)} \tag{2.29}$$

Στην εξίσωση (2.29) υπεισέρχεται η παράμετρος γ η οποία έχει διαστάσεις (m^{-1}), προσδιορίζει το βαθμό με τον οποίο μειώνονται οι κατακόρυφες μετακινήσεις στο εσωτερικό του εδάφους και εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του, αλλά και τα χαρακτηριστικά της επιφανειακής φόρτισης. Η χρήση της (2.29) οδηγεί σε μια κατανομή κατακορύφων τάσεων σ_{zz} που μεταβάλλονται με το βάθος.

Μια τρίτη εξίσωση την οποία προτείνει ο Vlasov αντί της (2.29) για την περίπτωση κατά την οποία το ελαστικό υπόβαθρο έχει άπειρο βάθος, είναι:

$$\psi_1(z) = e^{-\gamma z} \tag{2.30}$$

Η σχέση αυτή είναι ανάλογη της (2.29) καθώς εισάγει την παράμετρο γ και οδηγεί σε πεδίο κατακορύφων τάσεων που μεταβάλλεται εκθετικά με το βάθος.

Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημανθεί το γεγονός, ότι αν για τον προσδιορισμό του προφίλ των κατακορύφων μετακινήσεων στο εσωτερικό του εδάφους επιλεγεί η σχέση (2.29) ή η (2.30) το προσομοίωμα του Vlasov εξαρτάται και από μια τρίτη παράμετρο, την παράμετρο γ. Επομένως θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι πρόκειται για προσομοίωμα τριών παραμέτρων. Ωστόσο κατατάσσεται στα προσομοιώματα των δυο παραμέτρων, αφού η γενική μορφή της εξίσωσης που το διέπει είναι της ίδιας γενικής μορφής με αυτές των υπολοίπων προσομοιωμάτων δυο παραμέτρων.

Τέλος σημειώνεται, ότι για την επιλογή της εξίσωσης για την $\psi_1(z)$ είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν και άλλες εκφράσεις που είτε προκύπτουν από πειραματικά δεδομένα είτε προσδιορίζονται με τη βοήθεια μεθόδων της Θεωρίας Ελαστικότητας.

Παραλλαγές – επεκτάσεις του προσομοιώματος

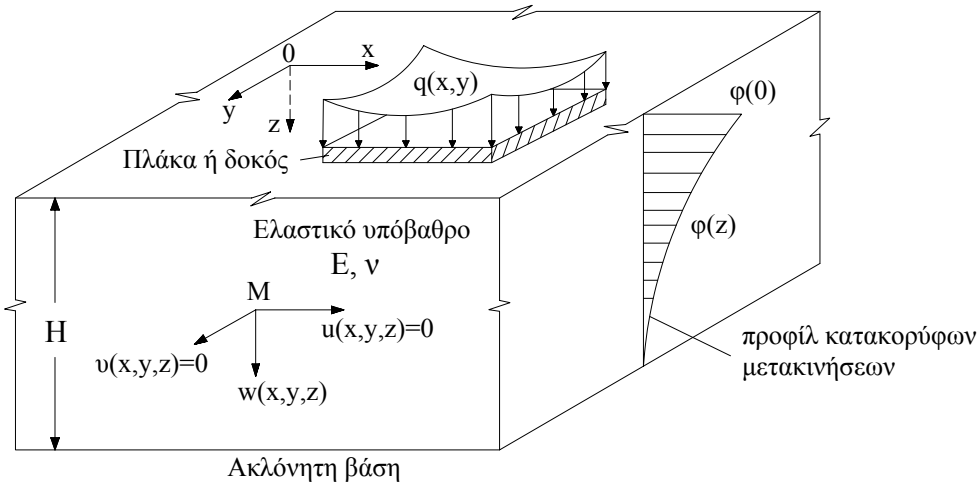
Η γενική μορφή των βασικών εξισώσεων ισορροπίας (2.20α) και (2.20β) του προσομοιώματος και οι δυνατότητες επιλογής του αριθμού και της μορφής των παραμέτρων του δίνουν τη δυνατότητα πειραματισμού για την βελτίωση της αποτελεσματικότητας του. Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιαστεί εν συντομία η τροποποίηση του προσομοιώματος από τους Jones και Xenophontos (Jones και Xenophontos (1977)) αλλά και τους Vallabhan και Das (1988).

Η μέθοδος των Jones and Xenophontos

Οι Jones and Xenophontos, προσπαθώντας να καταλήξουν σε μια τεκμηριωμένη σχέση προσδιορισμού της κατανομής των κατακορύφων μετακινήσεων, εφάρμοσαν την αρχή της στάσιμης τιμής του ελαστικού δυναμικού για το σύστημα δοκός ή πλάκα και υπόβαθρο.

Κάνοντας χρήση της ενεργειακής αυτής αρχής, και ξεκινώντας από τις βασικές παραδοχές του Vlasov (σχέσεις (2.22α) και (2.22β)), κατέληξαν αφενός στη σχέση (2.25) και αφετέρου στη σχέση (2.29). Έτσι κατάφεραν να τεκμηριώσουν την (2.29) αλλά παράλληλα να την συσχετίσουν με τις υπόλοιπες παραμέτρους του προβλήματος. Στα πλαίσια των εξισώσεων του προσομοιώματος που εισήγαγαν, οι τιμές των παραμέτρων δεν εξαρτώνται μόνο από τα κλασσικά μεγέθη τα οποία ορίζει η θεωρία ελαστικότητας (μέτρο ελαστικότητας E, λόγος Poison ν) για το έδαφος, αλλά και από τα χαρακτηριστικά του υλικού της κατασκευής (δοκού, πλάκας ή κελύφους) που βρίσκεται επί του υποβάθρου, και από τις διαστάσεις και τη γεωμετρική μορφή των διατομών τους (π.χ. ροπή αδράνειας διατομών).

Η μέθοδος ξεκινά με τη θεώρηση του προβλήματος της τρισδιάστατης ελαστικότητας (Σχήμα 2.11). Εισάγοντας κατόπιν τις απλοποιητικές παραδοχές του Vlasov για το πεδίο των μετακινήσεων, καταλήγει στις τροποποιημένες σχέσεις τάσεων – μετακινήσεων.



Σχήμα 2.11. Το τρισδιάστατο πρόβλημα δοκού ή πλάκας επι ελαστικού υποβάθρου τύπου Vlasov.

Οι παραδοχές αυτές είναι (Σχήμα 2.11):

1. u(x,y,z)=υ(x,y,z)=0, δηλαδή αμελητέες οριζόντιες μετακινήσεις.
2. $w(x,y,z)=w_1(x,y)\varphi(z)$

Με βάση τις παραπάνω παραδοχές η ενέργεια παραμόρφωσης του συστήματος δοκός (ή πλάκα) – έδαφος δίνεται από τη σχέση:

$$V = \frac{1}{2}\iiint\left[\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}w_1^2\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + G\varphi^2\left(\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)^2\right)\right]dxdydz \; +$$

$$+\frac{1}{2}D\iint_S\left[\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\nu_{\pi\lambda})\left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\partial y}\right)\right]\right]dxdy \qquad (2.31)$$

όπου D είναι η δυσκαμψία της πλάκας και $\nu_{\pi\lambda}$ ο λόγος Poison του υλικού της. Στην παραπάνω έκφραση το δεύτερο ολοκλήρωμα αφορά το έργο παραμόρφωσης πλάκας πεπερασμένων διαστάσεων, αλλά θα ήταν δυνατή η χρήση αντίστοιχης έκφρασης για δοκούς. Πρέπει επίσης να τονιστεί ότι η τριπλή ολοκλήρωση γίνεται σε όλο τον όγκο του ελαστικού υποβάθρου ($-\infty<x,y<+\infty$ και $0<z<H$), ενώ η διπλή ολοκλήρωση στην επιφάνεια η οποία ορίζεται από τα όρια πλάκας (Σχήμα 2.11).

Στο σημείο αυτό υπεισέρχεται η διαφοροποίηση της μεθοδολογίας των Johnes and Xenophontos από αυτήν των Vlasov και Leont'ev, καθώς για την κατάστρωση των συνθηκών ισορροπίας του συστήματος πλάκα – ελαστικό υπόβαθρο δεν γίνεται χρήση της αρχής των «δυνατών μετακινήσεων» του Lagrange αλλά η αρχή της στάσιμης τιμής ενέργειας παραμόρφωσης I:

$$I = V - \iint_S qw_1 dxdy \Rightarrow \delta I = \delta\left(V - \iint_S qw_1 dxdy\right) = 0 \qquad (2.32)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (2.31) και (2.32) καταλήγουμε στις δυο παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$D\left(\nabla^4 w_1\right) - \left[\frac{E}{2(1+\nu)}\int_0^H \varphi^2 dz\right]\left(\nabla^2 w_1\right) + \left[\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\int_0^H\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 dz\right]w_1 = q(x,y) \qquad (2.33\alpha)$$

$$\left[\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\iint w_1^2 dxdy\right]\frac{d^2\varphi}{dz^2}-\left[\frac{E}{2(1+\nu)}\iint\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)^2 dxdy\right]\varphi=0 \tag{2.33β}$$

όπου $\nabla^4=\nabla^2\nabla^2$ είναι ο διπλός τελεστής του Laplace. Η λύση της εξίσωσης (2.33α) οδηγεί στον προσδιορισμό της παραμορφωμένης επιφάνειας του ελαστικού υποβάθρου, ενώ η εξίσωση (2.33β) οδηγεί στον προσδιορισμό του ζητούμενου προφίλ της κατανομής των κατακόρυφων μετακινήσεων σε συνάρτηση με το βάθος.

Εύκολα μπορεί να γίνει αντιληπτό ότι εάν η (2.33α) προσαρμοστεί σε συνθήκες επίπεδης ελαστικότητας είναι ταυτόσημη με την εξίσωση (2.25). Επομένως η προσοχή εστιάζεται στην λύση της εξίσωσης (2.33β). Για την άγνωστη προς το παρόν συνάρτηση φ είναι λογικό να υποτεθεί ότι στην επιφάνεια του υποστρώματος έχει τιμή ίση με τη μονάδα δηλ. φ(0)=1, ενώ στη βάση του υποστρώματος εφόσον αυτό βρίσκεται επί ακλόνητης βάσης, την τιμή μηδέν. Δηλαδή φ(H)=0. Κάνοντας χρήση των δυο αυτών συνοριακών συνθηκών μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η λύση της εξίσωσης (2.33β) είναι:

$$\varphi(z)=\frac{\sinh[\gamma(H-z)]}{\sinh(zH)} \tag{2.34}$$

Η σχέση αυτή είναι ταυτόσημη με την (2.29) την όποια εισήγαγε με αυθαίρετο τρόπο ο Vlasov. Στο σημείο αυτό η μεθοδολογία των Jones and Xenophontos προχωρά σε προσδιορισμό του γ μέσω της σχέσης:

$$\gamma^2=\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}\left(\frac{\iint(\partial w_1/\partial x+\partial w_1/\partial y)^2 dxdy}{\iint w_1^2 dxdy}\right) \tag{2.35α}$$

Η προσαρμογή της (2.35α) σε συνθήκες επίπεδης ελαστικότητας (στο επίπεδο xz) προκύπτει:

$$\gamma^2=\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}\left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(dw_1/dx)^2 dx}{2\int_{-\infty}^{+\infty}(w_1^2)dx}\right) \tag{2.35β}$$

Από τις σχέσεις (2.35α) και (2.35β) προκύπτουν δυο συμπεράσματα:

α. Η παράμετρος γ εξαρτάται από την μορφή της παραμορφωμένης επιφάνειας του ελαστικού υποβάθρου, η οποία όμως για να υπολογιστεί, απαιτεί τη γνώση της παραμέτρου γ. Επομένως, το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί μόνον με μια επαναληπτική – θαμιστική μέθοδο, και

β. Η παράμετρος γ δεν εξαρτάται μόνον από τις ελαστικές σταθερές E, ν του υποβάθρου και το πάχος του H, αλλά και από τις διαστάσεις, τις μηχανικές ιδιότητες και την μορφή της φόρτισης της πλάκας.

Η μέθοδος των Vallabhan και Das

Οι Vallabhan και Das (1988), ακολουθώντας τις βασικές αρχές των Jones and Xenophontos εισήγαγαν μια επαναληπτική διαδικασία μέσω της οποίας κατόρθωσαν σε μια σειρά δημοσιευμένων μελετών τους [(1988), (1991α), (1991β)] να προσδιορίσουν αναλυτικά την παράμετρο γ – η οποία στα πλαίσια τις αρχικής διατύπωσης του Vlasov ήταν αποτέλεσμα αυθαίρετης επιλογής – και παράλληλα να πετύχουν τον αναλυτικό προσδιορισμό των δυο παραμέτρων του προσομοιώματος. Πέραν τούτου επέκτειναν τις εξισώσεις του

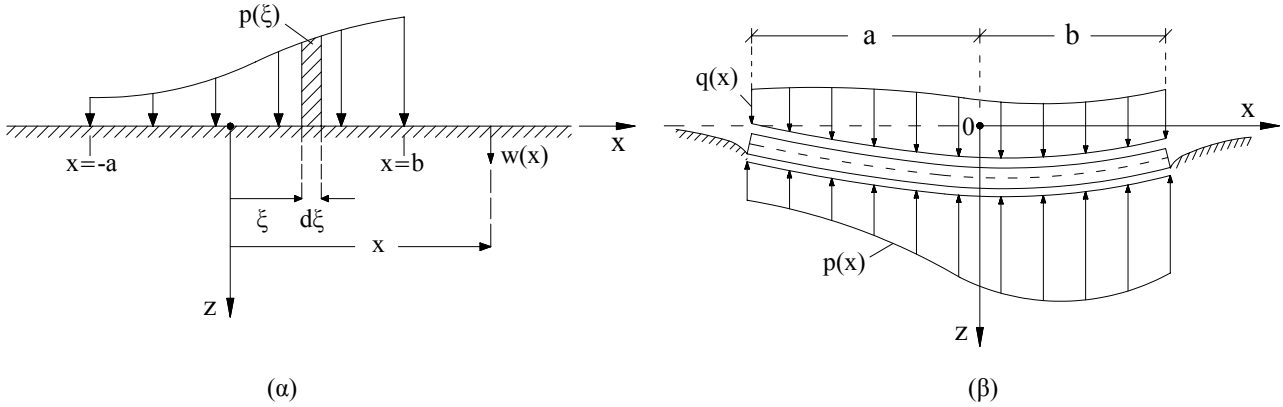
προσομοιώματος έτσι ώστε να λαμβάνεται υπόψη η καθ' ύψος γραμμική μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας του υποστρώματος (Vallabhan και Das (1991β)). Από την γενίκευση αυτή επιτυγχάνεται ο προσδιορισμός των δυο παραμέτρων του προσομοιώματος για την περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο είναι μη ομογενές (βλέπε παραγράφους 2.4.2 και 2.4.3).

2.2.2.6. Η υπόθεση του Wieghardt

Κάνοντας κριτική στο προσομοίωμα του Winkler, ο Wieghardt (1922) πρότεινε μια διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα του προσδιορισμού της σχέσης η οποία συνδέει την κατακόρυφη φόρτιση με τις αντίστοιχες κατακόρυφες μετακινήσεις στην επιφάνεια του εδάφους. Πρόκειται για μια υπόθεση η οποία μπορεί να θεωρηθεί ότι εντάσσεται στην γενική κατηγορία προσομοιωμάτων που αναπτύσσονται με βάση φορμαλιστικές μεθόδους, για τις οποίες θα δοθούν περισσότερες λεπτομέρειες στην Παράγραφο 2.2.3.5. Ωστόσο, η παρουσίαση του προσομοιώματος του Wieghardt θα γίνει στην παρούσα παράγραφο, καθώς όπως θα παρουσιαστεί παρακάτω, ξεκινώντας από την βασική παραδοχή για την κατανομή των μετακινήσεων της επιφάνειας του εδάφους προκύπτει η γενική σχέση που χαρακτηρίζει τη συσχέτιση κατακορύφων δυνάμεων – μετακινήσεων στα πλαίσια των προσομοιωμάτων δυο παραμέτρων. Θεωρώντας ως ανεπαρκή τη κλασσική σχέση του Winkler (σχέση 2.1α), κυρίως λόγω της πλήρους ασυνέχειας των κατακόρυφων μετακινήσεων στην οποία οδηγεί, πρότεινε μια σχέση στην οποία οι κατακόρυφες μετακινήσεις σε ένα τυχαίο σημείο της επιφάνειας του εδάφους δεν εξαρτώνται μόνο από την τιμή της εξωτερικής φόρτισης στο σημείο αυτό, αλλά και από τις αντίστοιχες τιμές στα υπόλοιπα σημεία. Επομένως, η οποιαδήποτε φόρτιση σε ορισμένο τμήμα της επιφάνειας του εδάφους δεν προκαλεί κατακόρυφες μετακινήσεις μόνο εντός της επιφάνειας αυτής, αλλά και σε γειτονικές της περιοχές. Η γενική μορφή της σχέσης είναι:

$$w(x) = \int_L K\left(|x - \xi|\right) p(\xi) d\xi \tag{2.36}$$

Στην παραπάνω σχέση το εύρος ολοκλήρωσης L αναφέρεται στο εύρος που καταλαμβάνει η φορτιζόμενη επιφάνεια του εδάφους. Όπως είναι κατανοητό, σε προβλήματα δυο διαστάσεων το εύρος ολοκλήρωσης αφορά το μήκος του φορτιζόμενου τμήματος (Σχήμα 2.12α).



Σχήμα 2.12. (α) Η υπόθεση του Wieghardt για τις κατακόρυφες μετακινήσεις της επιφάνειας του εδάφους, (β) το πρόβλημα της κάμψης δοκού επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Wieghardt.

Από μαθηματικής άποψης, ο Wieghardt χρησιμοποίησε έναν ολοκληρωτικό μετασχηματισμό, θεωρώντας ότι η συνάρτηση των μετακινήσεων w(x) είναι η μετασχηματισμένη συνάρτηση της αντίστοιχης συνάρτησης της φόρτισης που επιβάλλεται στην επιφάνεια του εδάφους. Για τον πυρήνα του μετασχηματισμού K(|x-ξ|), επέλεξε την εκθετική συνάρτηση: $ce^{-k|x-\xi|}$.

Ο λόγος για τον οποίο έγινε αυτή η επιλογή, οφείλεται στα αποτελέσματα των πειραματικών ερευνών που πραγματοποίησε ο Föppl (1909). Με βάση τα αποτελέσματα των πειραμάτων αυτών, ο Wieghardt πρότεινε την ακόλουθη σχέση:

$$w(x) = \int_{-a}^{b} ce^{-k|x-\xi|} p(\xi) d\xi \tag{2.37}$$

Οι σταθερές c, k αποτελούν τις δυο παραμέτρους του προσομοιώματος και όπως είναι φυσικό εξαρτώνται από τις μηχανικές ιδιότητες του εδάφους.

Έστω η δοκός του σχήματος (2.12β), η οποία φορτίζεται από κατακόρυφο κατανεμημένο φορτίο q(x). Υπό την επίδραση της φόρτισης αυτής η δοκός κάμπτεται με αποτέλεσμα την ανάπτυξη της συνεχούς κατακόρυφης αντίδρασης q(x). Αν για την περιγραφή των κατακορύφων μετακινήσεων w(x) γίνει η υπόθεση (2.37), τότε για την φορτιζόμενη και την μη φορτιζόμενη περιοχή της επιφανείας του εδάφους ισχύουν αντίστοιχα (Wieghardt, (1922)):

$$w_{\varepsilon\sigma}(x) = \int_{-a}^{x} ce^{-k(x-\xi)} p(\xi) d\xi + \int_{x}^{b} ce^{-k(\xi-x)} p(\xi) d\xi \qquad (-a < x < b) \tag{2.38α}$$

$$w_{\varepsilon\xi}^{\delta}(x) = \int_{-a}^{b} ce^{-k(x-\xi)} p(\xi) d\xi \qquad (x \geq b) \tag{2.38β}$$

$$w_{\varepsilon\xi}^{\alpha\rho}(x) = \int_{-a}^{b} ce^{-k(\xi-x)} p(\xi) d\xi \qquad (x \leq -a) \tag{2.38γ}$$

Παραγωγίζοντας την (2.38α) δυο φορές με τους κανόνες που διέπουν την παραγώγιση παρομοίων ολοκληρωματικών μετασχηματισμών, προκύπτει:

$$\frac{d^2 w_{\varepsilon\sigma}}{dx^2} = ck^2 \left(\int_{-a}^{x} ce^{-k(x-\xi)} p(\xi) d\xi + \int_{x}^{b} ce^{-k(\xi-x)} p(\xi) d\xi \right) - 2ckp(x) \tag{2.39}$$

Από τη σύγκριση των σχέσεων (2.38α) και (2.39) προκύπτει η σχέση η οποία συνδέει τις κατακόρυφες μετακινήσεις της φορτιζόμενης επιφάνειας του εδάφους w(x), με τις αντίστοιχες αντιδράσεις p(x):

$$p = \left(\frac{k}{2c} \right) w - \left(\frac{1}{2kc} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} \tag{2.40}$$

Ανάλογες σχέσεις προκύπτουν από την διπλή παραγώγιση των σχέσεων (2.38β) και (2.38γ) οι οποίες αφορούν την αφόρτιστη επιφάνεια του εδάφους.

Από την σχέση (2.40) γίνεται σαφές, ότι ξεκινώντας από την βασική υπόθεση του ο Wieghardt (σχέση (2.37)) κατέληξε σε μια σχέση κατακορύφων φορτίων – μετακινήσεων η οποία έχει τη γενική μορφή των αντιστοίχων σχέσεων μηχανικών προσομοιωμάτων δυο παραμέτρων (σχέσεις (2.4β), (2.8β), (2.25)). Η υπόθεση του Wieghardt εφαρμόστηκε από τους Ylinen και Mikkola (1967) για τη μελέτη της κάμψης δοκών Timoshenko, επιλύοντας την ακριβή εξίσωση του προβλήματος.

2.2.3. Προσομοιώματα περισσοτέρων παραμέτρων

Τα προσομοιώματα με περισσότερες των δυο παραμέτρων αποτελούν ένα ακόμα βήμα προς μια ακριβέστερη αντιμετώπιση του προβλήματος της κάμψης δοκών ή πλακών επί ελαστικού υποβάθρου και μπορούν να αναπτυχθούν με τις ίδιες μεθόδους με τις οποίες αναπτύσσονται και τα προσομοιώματα των δυο παραμέτρων (Παράγραφος 2.2.2). Το γεγονός ότι συμβάλλουν σε μια ακριβέστερη προσέγγιση του προβλήματος δεν στηρίζεται μόνο στη χρήση πιο πολύπλοκων μηχανικών προσομοιώσεων, αλλά αποδεικνύεται και μαθηματικά, όπως θα γίνει κατανοητό παρακάτω. Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιαστούν οι εξισώσεις και οι παραδοχές επί των οποίων στηρίζονται τα προσομοιώματα περισσοτέρων των δυο παραμέτρων που είναι διαθέσιμα στη βιβλιογραφία.

2.2.3.1. Προσομοίωμα του Kerr

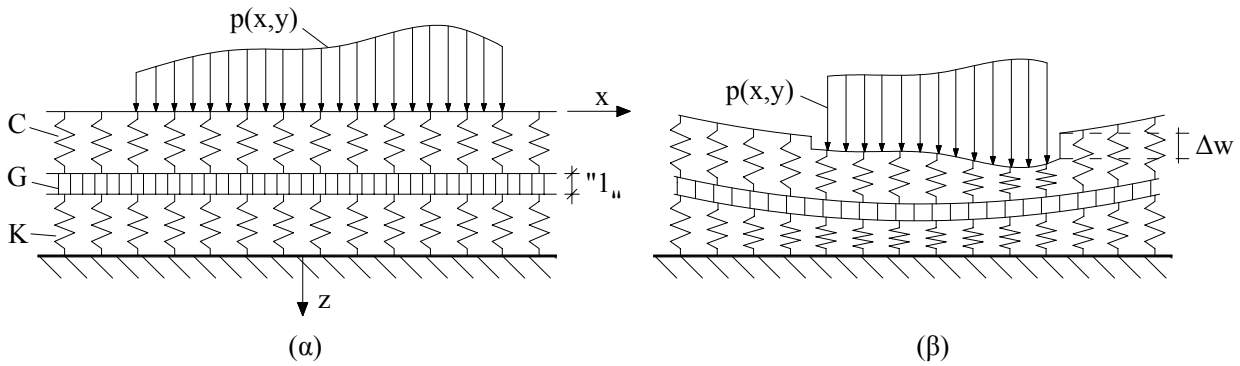
Το προσομοίωμα του Kerr έχει προκύψει από την εφαρμογή δυο διαφορετικών μεθόδων ανάπτυξης προσομοιωμάτων εδαφικής συμπεριφοράς. Η πρώτη μέθοδος (Kerr (1964) και (1965)) βασίζεται στη θεώρηση σύνδεσης μεταξύ γραμμικών ελατηρίων, ενώ η δεύτερη είναι βασισμένη σε φορμαλιστικές μεθόδους. Ωστόσο, και με τις δυο μεθόδους το τελικό αποτέλεσμα – δηλ. η εξίσωση που συνδέει την φόρτιση της επιφάνειας του εδάφους με τις αντίστοιχες μετακινήσεις – είναι το ίδιο. Βασικό χαρακτηριστικό του προσομοιώματος αυτού είναι η επίτευξη μερικής συνέχειας των μετακινήσεων στην επιφάνεια του εδάφους (Σχήμα 2.13β). Αποτελεί επομένως την ενδιάμεση κατάσταση μεταξύ του προσομοιώματος του Winkler (ασυνέχεια των μετακινήσεων στην επιφάνεια του εδάφους) και των προσομοιωμάτων δυο παραμέτρων (πλήρης συνέχεια των επιφανειακών μετακινήσεων). Όπως θα αποδειχθεί και παρακάτω, το μηχανικό προσομοίωμα του Pasternak, το οποίο παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 2.2.2.2, αποτελεί ειδική περίπτωση του μηχανικού προσομοιώματος του Kerr καθώς προκύπτει από την εξειδίκευση των εξισώσεων του τελευταίου. Επίσης, θα παρουσιαστεί και ο συσχετισμός του προσομοιώματος του Kerr ειδικά σε επίπεδο εξισώσεων, και όχι σε επίπεδο μηχανικού προσομοιώματος, με μια παραλλαγή του προσομοιώματος του Vlasov (Παράγραφος 2.2.3.4).

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι τα αποτελέσματα στα οποία καταλήγει το προσομοίωμα του Kerr για τη κατανομή των τάσεων κάτω από κεντρικά φορτισμένη άκαμπτη πλάκα είναι σε πολύ καλή σύμπτωση όχι μόνο με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από την θεωρητικά πιο ακριβή αναλυτική μέθοδο του ισότροπου ελαστικού ημιχώρου, αλλά και με πειραματικά αποτελέσματα που αφορούν κοκκώδη, και συνεκτικά εδάφη (βλέπε Παράγραφο 2.2.7).

Α΄ Μέθοδος

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στη θεώρηση ενός μηχανικού προσομοιώματος το οποίο αποτελείται από δυο στρώσεις κατακόρυφων μεταφορικών ελατηρίων, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους μέσω ενός διατμητικού στρώματος μοναδιαίου πάχους (Σχήμα 2.13α).

Η σταθερά του άνω στρώματος ελατηρίων συμβολίζεται με C [διαστάσεις (kN/m^3)], ενώ η σταθερά του κάτω με K [διαστάσεις (kN/m^3)]. Η σταθερά του διατμητικού επιπέδου συμβολίζεται με G (διαστάσεις [kN/m^2]).



Σχήμα 2.13. Το μηχανικό προσομοίωμα του Kerr (α), και παραμορφωμένη κατάσταση του ελαστικού υποβάθρου σύμφωνα με το προσομοίωμα (β).

Γίνεται καταρχήν η βασική παραδοχή ότι η κατακόρυφη μετακίνηση w(x,y) σε κάθε σημείο της επιφάνειας του εδάφους είναι άθροισμα δυο όρων (Σχήμα 2.13α):

- Της μετατόπισης $w_1(x,y)$, η οποία οφείλεται στην παραμόρφωση της άνω στρώσης ελατηρίων.
- Της μετατόπισης $w_2(x,y)$, η οποία οφείλεται στην παραμόρφωση της κάτω στρώσης ελατήριων.

Επομένως ισχύει:

$$w(x,y)=w_1(x,y)+w_2(x,y) \tag{2.41}$$

Επειδή η άνω στρώση ελατηρίων αποτελείται από ελατήρια μη συνδεδεμένα μεταξύ τους, η εφαρμογή του κατακόρυφου φορτίου p(x,y) προκαλεί επιφανειακές παραμορφώσεις οι οποίες δίνονται από τη σχέση:

$$p(x,y)=Cw_1(x,y) \tag{2.42}$$

Το επιφανειακό φορτίο μεταβιβάζεται μέσω του διατμητικού στρώματος στο κάτω στρώμα ελατηρίων προκαλώντας την παραμόρφωση του. Κάνοντας την παραδοχή του ισότροπου διατμητικού στρώματος (δηλ. $G_x=G_y=G$) οι αναπτυσσόμενες διατμητικές τάσεις τ_{xz}, τ_{yz}, δίνονται από τις σχέσεις:

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\frac{\partial w_2}{\partial x} \tag{2.43α}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G\frac{\partial w_2}{\partial y} \tag{2.43β}$$

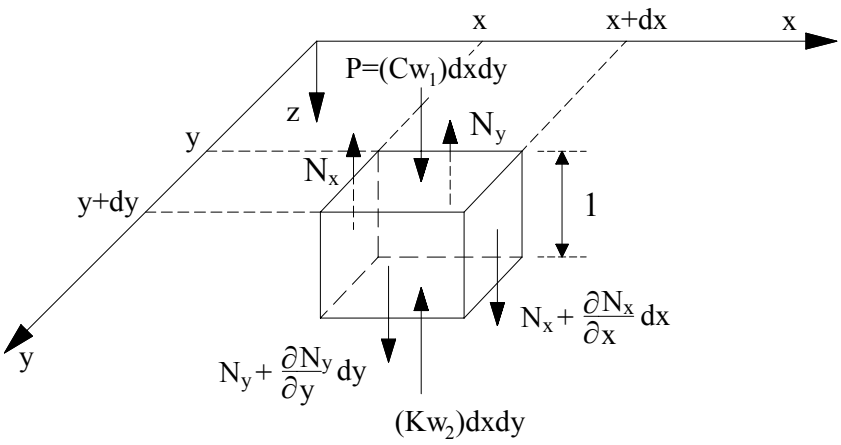
Οι συνολικές δυνάμεις ανά μονάδα μήκους του διατμητικού στρώματος είναι:

$$N_x = \int_0^1 \tau_{xz}\,dz = G\frac{\partial w_2}{\partial x} \tag{2.44α}$$

$$N_y = \int_0^1 \tau_{yz}\,dz = G\frac{\partial w_2}{\partial y} \tag{2.44β}$$

Η συνθήκη ισορροπίας κατά τον κατακόρυφο άξονα είναι (Σχήμα 2.14):

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p - Kw_2 = 0 \tag{2.45}$$



Σχήμα 2.14. Η συνθήκη ισορροπίας του απειροστού στοιχείου του διατμητικού στρώματος.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.41), (2.42), (2.44α), (2.44β) με την (2.45) επιτυγχάνεται η απαλοιφή των w_1, w_2 και η ταυτόχρονη εύρεση της σχέσης που συνδέει την εξωτερική φόρτιση p με την κατακόρυφη μετακίνηση w(x,y):

$$(1+\frac{K}{C})p-\frac{G}{C}\nabla^2 p = Kw - G\nabla^2 w \qquad (2.46\alpha)$$

Η σχέση (2.46α) αποτελεί τη βασική σχέση του προσομοιώματος του Kerr. Προφανώς, σε επίπεδα προβλήματα το διατμητικό στρώμα «μετατρέπεται» σε δοκό διατμήσεως και η εξίσωση (2.46α) παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$(1+\frac{K}{C})p-\left(\frac{G}{C}\right)\frac{d^2p}{dx^2} = Kw - G\frac{d^2w}{dx^2} \qquad (2.46\beta)$$

Β΄ Μέθοδος

Η δεύτερη μέθοδος η οποία οδηγεί στην εξίσωση (2.46α) χρησιμοποιήθηκε από τους Kerr και Rhines (1967) και βασίζεται στην ανάπτυξη σε σειρές της ακριβούς λύσης του προβλήματος ενός ελαστικού συνεχούς μέσου πεπερασμένου πάχους, το οποίο εδράζεται επάνω σε ακλόνητο υπόβαθρο. Η γενική μορφή της έκφρασης που διέπει την απόκριση του εδάφους σε εξωτερική φόρτιση, η οποία προκύπτει με εφαρμογή της μεθόδου αυτής είναι η εξής:

$$L_1 p = L_2 w \qquad (2.47)$$

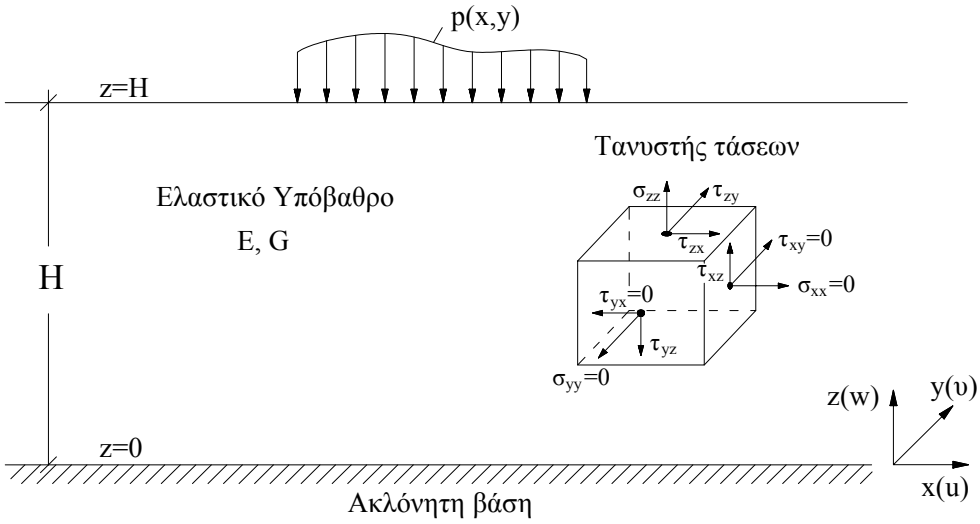
Στην παραπάνω σχέση τα σύμβολα L_1, L_2 συμβολίζουν γραμμικούς διαφορικούς τελεστές.

Η μέθοδος αυτή μπορεί να χαρακτηριστεί ως «γεννήτρια» προσομοιωμάτων εδαφικής συμπεριφοράς, καθώς είναι σε θέση να καταλήξει σε μια ακολουθία εξισώσεων, των οποίων η γενική μορφή είναι κοινή και δίνεται από την εξίσωση (2.47). Περισσότερες λεπτομέρειες θα δοθούν στην Παράγραφο 2.2.3.5.

2.2.3.2. Το προσομοίωμα του Reissner

Το προσομοίωμα του Reissner βασίζεται στην εισαγωγή απλοποιητικών παραδοχών στις βασικές εξισώσεις του γραμμικώς ελαστικού και ισότροπου συνεχούς μέσου. Επομένως ανήκει στην δεύτερη κατηγορία προσομοιωμάτων, όπως αυτή ορίστηκε στην Παράγραφο 2.2.2. Το προσομοίωμα αυτό, ενώ είναι πολύ πιο γενικό από προσομοιώματα τα οποία είναι βασισμένα σε διάφορες μορφές μηχανικών προσομοιωμάτων με ελατήρια, εντούτοις διατηρεί τη μαθηματική απλότητα η οποία χαρακτηρίζει τα προσομοιώματα αυτά. Αυτό επιτυγχάνεται (Reissner (1958), (1967)) με την προσθήκη στην δυστένεια, την οποία έχουν τα συστήματα συνεχώς κατανεμημένων μεταφορικών ελατηρίων, μιας ιδιότητας η οποία ονομάζεται διαφορική δυστμησία.

Έστω το ελαστικό υπόβαθρο του σχήματος 2.15, πάχους H, το οποίο εδράζεται πάνω σε ακλόνητη βάση. Η συμπεριφορά του ελαστικού αυτού υποβάθρου περιγράφεται από τις γενικές εξισώσεις της τρισδιάστατης ελαστικότητας.



Σχήμα 2.15. Το Προσομοίωμα του Reissner.

Οι εξισώσεις του προσομοιώματος ξεκινούν από τις γενικές αυτές εξισώσεις και με τη βοήθεια απλοποιητικών παραδοχών καταλήγουν στη ζητούμενη σχέση που συνδέει την εξωτερική φόρτιση με τις κατακόρυφες μετακινήσεις w στην επιφάνεια του υποβάθρου. Οι απλοποιητικές παραδοχές είναι οι εξής:

- Αγνοούνται οι μαζικές δυνάμεις.
- Οι τάσεις σ_{xx}, σ_{yy}, τ_{xy} θεωρούνται αμελητέες:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0 \tag{2.48}$$

Σύμφωνα με τις παραδοχές του προσομοιώματος, οι μόνες μη μηδενικές τάσεις είναι η ορθή τάση σ_{zz} που αντιπροσωπεύει την δυστένεια του υποβάθρου, και οι διατμητικές τάσεις τ_{xz}, τ_{yz} οι οποίες αντιπροσωπεύουν την «διαφορική» – κατά τον Reissner – δυστμησία.

- Οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$z=0: \quad u=\upsilon=w=0 \tag{2.49α}$$

$$z=H: \quad u=\upsilon=0 \tag{2.49β}$$

$$\sigma_{zz}=p \tag{2.49γ}$$

Δηλαδή, θεωρούνται μηδενικές όλες οι μετακινήσεις του υποβάθρου στη βάση του – όπου άλλωστε το ελαστικό υπόβαθρο θεωρείται ότι εδράζεται επί ακλόνητης βάσης – ενώ στην ελεύθερη επιφάνεια του θεωρούνται μηδενικές οι οριζόντιες μετακινήσεις κατά τους άξονες x, y. Επιπλέον, στην ελεύθερη επιφάνεια του προσομοιώματος οι κατακόρυφες τάσεις σ_{zz} είναι ίσες με την εξωτερική κατακόρυφη φόρτιση p(x,y).

Με βάση την (2.48), οι γενικές συνθήκες ισορροπίας του τρισδιάστατου ελαστικού μέσου γίνονται:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=0 \tag{2.50α}$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}=0 \tag{2.50β}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}=0 \tag{2.50γ}$$

Επιπλέον, οι σχέσεις που συνδέουν τις τάσεις με τις μετακινήσεις είναι:

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\sigma_{zz}}{E} \tag{2.51α}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\tau_{xz}}{G} \tag{2.51β}$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\tau_{yz}}{G} \tag{2.51γ}$$

Το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (2.50α) – (2.50γ) και (2.51α) – (2.51γ) με την βοήθεια των συνοριακών συνθηκών (2.49α) – (2.49γ).

Από τις εξισώσεις (2.50α) και (2.50β) καθίσταται σαφές ότι οι τάσεις τ_{zx}, τ_{yz} είναι ανεξάρτητες του βάθους z, ενώ η τάση σ_{zz} μεταβάλλεται γραμμικά με το βάθος. Με ολοκλήρωση της (2.50γ) και λαμβάνοντας υπόψη την (2.49γ) προκύπτει:

$$\sigma_{zz}=p+(H-z)\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right) \tag{2.52}$$

Από τις εξισώσεις (2.51α) – (2.51γ) και σε συνδυασμό με τις συνθήκες (2.49α) προκύπτουν οι εκφράσεις των μετακινήσεων w, u, υ:

$$Ew=pz+\left(Hz-\frac{1}{2}z^2\right)\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right) \tag{2.53α}$$

$$Gu=\tau_{xz}z-\frac{G}{E}\left[\frac{z^2}{2}\frac{\partial p}{\partial x}+\left(H\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{6}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right)\right] \tag{2.53β}$$

$$G\upsilon=\tau_{yz}z-\frac{G}{E}\left[\frac{z^2}{2}\frac{\partial p}{\partial y}+\left(H\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{6}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right)\right] \tag{2.53γ}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις οδηγούν με τη βοήθεια των συνοριακών συνθηκών (2.49β) και (2.49γ) σε συσχέτιση των τάσεων τ_{xz}, τ_{yz} με την εξωτερική φόρτιση p:

$$\tau_{xz} = \frac{G}{E}\left[\frac{H}{2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{H^3}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right)\right] \tag{2.54α}$$

$$\tau_{yz} = \frac{G}{E}\left[\frac{H}{2}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{H^3}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right)\right] \tag{2.54β}$$

Η εξίσωση (2.53α) για z=H δίνει:

$$Ew = Hp + \frac{H^2}{2}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right) \tag{2.55}$$

Με συνδυασμό των εξισώσεων (2.54α), (2.54β) και (2.55) είναι δυνατή η απαλοιφή των τάσεων τ_{xz}, τ_{yz} και η συσχέτιση των κατακορύφων μετακινήσεων w, με την εξωτερική φόρτιση p, η οποία αποτελεί την βασική εξίσωση του προσομοιώματος:

$$w - \left[\left(\frac{H^2}{3}\right)\left(\frac{G}{E}\right)\right]\nabla^2 w = \frac{H}{E}p - \left[\left(\frac{H^3}{12}\right)\left(\frac{G}{E^2}\right)\right]\nabla^2 p \tag{2.56}$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι ξεκινώντας από τις παραδοχές (2.48) και (2.49α) – (2.49γ), και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, προκύπτει μια διαφορετική εξίσωση εάν γίνει η επιπρόσθετη παραδοχή (η οποία δεν έγινε στη διαδικασία η οποία παρουσιάστηκε πιο πάνω), ότι το μέτρο ελαστικότητας E του ελαστικού υποβάθρου δεν είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το βάθος (Horvath (1983α)).

Τέλος, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η παρατήρηση ότι αντί της συνοριακής συνθήκης (2.49β), σύμφωνα με την οποία η οριζόντια μετακίνηση της επιφάνειας του υποστρώματος κατά την διεύθυνση x είναι ίση με το μηδέν, μπορεί να γίνει παραδοχή της δυνατότητας οριζόντιας μετακίνησης στη διεπιφάνεια δοκού – υποβάθρου. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να γίνει η παραδοχή της ύπαρξης οριζοντίων ελατηρίων, οπότε έναντι της (2.49β) θα τεθεί:

$$\tau_{zx}(x,H) = -k_x u(x,H)$$

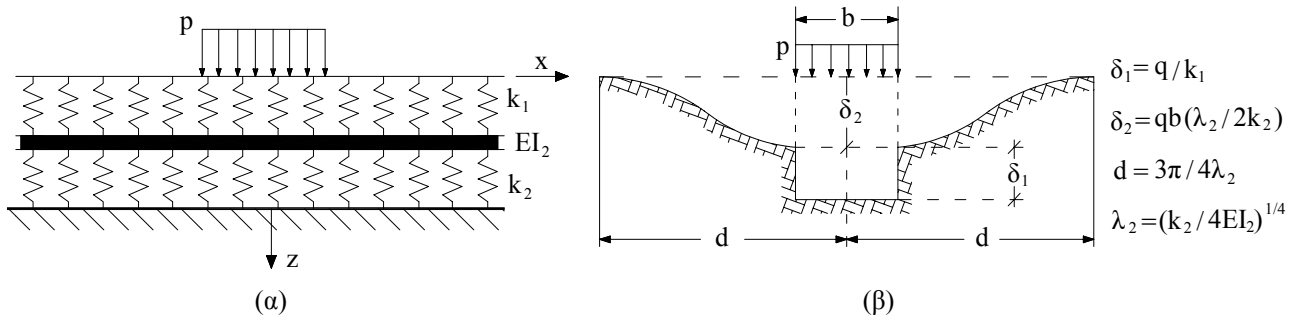
Ξεκινώντας από την παραπάνω παραδοχή και με μετασχηματισμούς ανάλογους με αυτούς που παρουσιάστηκαν πιο πάνω προκύπτει μαθηματική διατύπωση ανάλογη της (2.56) με διαφορετικούς όμως συντελεστές (Weitsman (1970)).

2.2.3.3. Το γενικευμένο προσομοίωμα του Hetényi

Το γενικευμένο προσομοίωμα του Hetényi είναι ένα προσομοίωμα που καταστρώθηκε με βάση την πρώτη κατηγορία μεθόδων ανάπτυξης προσομοιωμάτων του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου. Πιο συγκεκριμένα, το μηχανικό προσομοίωμα αποτελείται από δυο στρώσεις ελατηρίων με σταθερές k_1, k_2 (Σχήμα 2.16α) μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται μια δοκός Euler (δυσκαμψίας EI_2), μέσω της οποίας επιτυγχάνεται η κατανομή των αντιδράσεων στις περιοχές του εδάφους εκατέρωθεν της φορτιζόμενης περιοχής. Η υπόθεση αυτή είναι παρόμοιας φύσεως με την υπόθεση του Kerr, δεδομένου ότι ξεκινά από την παραδοχή της μερικής συνέχειας της παραμορφωμένης επιφάνειας του εδάφους (Σχήμα 2.16β).

Στην αρχική της διατύπωση η υπόθεση του Hetényi (Hetényi M. (1946), (1950)) στηρίχθηκε στη θεώρηση του επίπεδου προβλήματος, όπως θα παρουσιαστεί παρακάτω. Παράλληλα, η κατάστρωση της εξίσωσης του προσομοιώματος έγινε με την θεώρηση μιας δοκού επί του μηχανικού προσομοιώματος. Έτσι, η διατύπωση της συσχέτισης εξωτερικής φόρτισης (p) – κατακόρυφων μετακινήσεων (w) δεν έχει τη γενική μορφή f(w)=g(p) των υπολοίπων προσομοιωμάτων που παρουσιάστηκαν έως τώρα.

Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιαστεί πρώτα η αρχική διατύπωση και η φιλοσοφία της υπόθεσης του Hetényi. Κατόπιν, με βάση την αρχική αυτή διατύπωση, θα σχηματιστεί η εξίσωση συσχέτισης εξωτερικής φόρτισης – κατακόρυφων μετακινήσεων με τη μορφή f(w)=g(p) τόσο για το επίπεδο όσο και για το τρισδιάστατο πρόβλημα. Έτσι θα αποδειχθεί ότι με τη μορφή αυτή το προσομοίωμα έχει σε γενικές γραμμές την ίδια μορφή με τις εξισώσεις των υπολοίπων προσομοιωμάτων τριών παραμέτρων.

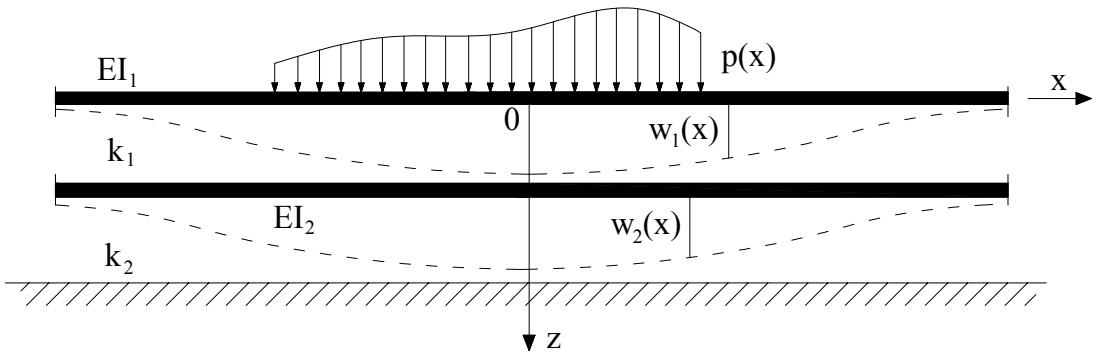


Σχήμα 2.16. Το μηχανικό προσομοίωμα του Hetényi (α) και η μερική ασυνέχεια που προσδίδει στην παραμορφωμένη επιφάνεια του εδάφους (β).

Αρχική διατύπωση της υπόθεσης του Hetényi

Η αρχική διατύπωση της υπόθεσης του Hetényi ξεκινά με τη θεώρηση μιας σταθερής φόρτισης q σε εύρος b επί της επιφάνειας του εδάφους. Το μηχανικό προσομοίωμα χαρακτηρίζεται από τις ελαστικές σταθερές k_1, k_2, EI_2 οι οποίες μπορούν να συσχετιστούν με τα γεωματρικά μεγέθη δ_1, δ_2, d (Σχήμα 2.16β) τα οποία σύμφωνα με το Hetényi μπορούν να προκύψουν από πειραματικές μετρήσεις. Σημειώνεται ότι οι εκφράσεις του σχήματος 2.16β προκύπτουν από την επίλυση του προβλήματος κάμψης δοκού «απείρου» μήκους επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Winkler (Hetényi (1946)).

Εν συνεχεία τίθεται το πρόβλημα της κάμψης δοκού Euler «απείρου» μήκους και δυσκαμψίας EI_1 (στο εξής θα αναφέρεται ως άνω δοκός σύμφωνα με την ορολογία που χρησιμοποιεί ο Hetényi) η οποία εδράζεται επί του μηχανικού προσομοιώματος που περιγράφηκε στην εισαγωγή της παραγράφου (Σχήμα 2.17).



Σχήμα 2.17. Δοκός «άπειρου» μήκους επί του γενικευμένου προσομοιώματος του Hetényi.

Έστω ότι η κατακόρυφη μετακίνηση της άνω δοκού είναι $w_1(x)$, ενώ η αντίστοιχη μετακίνηση της δοκού του μηχανικού προσομοιώματος (κάτω δοκός σύμφωνα με τον Hetényi) είναι $w_2(x)$ (Σχήμα 2.17). Είναι προφανές ότι η κατανεμημένη αντίδραση που αναπτύσσεται κάτω από την άνω δοκό είναι ίση με:

$$p_1 = k_1(w_1 - w_2) \tag{2.57α}$$

ενώ η αντίστοιχη αντίδραση της κάτω δοκού είναι:

$$p_2 = k_2 w_2 \tag{2.57β}$$

Επομένως η συνισταμένη αντίδραση της κάτω δοκού θα είναι ίση με την διαφορά της p_2 από την p_1:

$$p_2 - p_1 = (k_1 + k_2)w_2 - k_1 w_1 \tag{2.57γ}$$

Δεδομένου ότι η κάμψη τόσο της άνω όσο και της κάτω δοκού διέπονται από την θεωρία του Euler, και εφόσον η κατανομή των αντιδράσεων επί αυτών είναι συνεχώς κατανεμημένη, θα ισχύουν:

$$EI_1 \frac{d^4 w_1}{dx^4} = -p_1 = -k_1(w_1 - w_2) \tag{2.58α}$$

$$EI_2 \frac{d^4 w_2}{dx^4} = -(p_2 - p_1) = -(k_1 + k_2)w_2 + k_1 w_1 \tag{2.58β}$$

Λύνοντας την (2.58α) ως προς w_2 προκύπτει:

$$w_2 = \left(\frac{EI_1}{k_1}\right)\frac{d^4 w_1}{dx^4} + w_1 \tag{2.58γ}$$

Εισάγοντας την παραπάνω έκφραση αλλά και την τέταρτη παράγωγο της στην (2.58β) προκύπτει τελικά:

$$\frac{d^8 w_1}{dx^8} + \left[\frac{k_1(I_1 + I_2) + k_2 I_1}{EI_1 I_2}\right]\frac{d^4 w_1}{dx^4} + \left[\left(\frac{k_1}{EI_1}\right)\left(\frac{k_2}{EI_2}\right)\right]w_1 = 0 \tag{2.59}$$

Τονίζεται ότι στην παραπάνω εξίσωση έγινε η θεώρηση ότι το μέτρο ελαστικότητας της άνω δοκού (δηλαδή της δοκού θεμελίωσης) είναι ίσο με το μέτρο ελαστικότητας της κάτω δοκού (δηλαδή μιας από τις τρεις παραμέτρους του μηχανικού προσομοιώματος).

Η εξίσωση (2.59) αποτελεί την αρχική διατύπωση της υπόθεσης του Hetényi και αφορά την κάμψη δοκού Euler «απείρου μήκους». Η επίλυση της για την περίπτωση φόρτισης αποτελούμενης από μοναχικό κατακόρυφο φορτίο είναι διαθέσιμη στην βιβλιογραφία (Hetényi (1946)), ενώ η επέκταση των αποτελεσμάτων για δοκούς πεπερασμένου μήκους μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της μεθόδου της επαλληλίας (Hetényi (1950)).

Γενική διατύπωση της υποθέσεως του Hetényi

Η γενική διατύπωση της υπόθεσης του Hetényi θα παρουσιαστεί με βάση το τρισδιάστατο πρόβλημα. Επομένως, το μηχανικό προσομοίωμα στην περίπτωση αυτή συνίσταται από δυο επίπεδα στρώματα γραμμικών ελατηρίων τα οποία συνδέονται μεταξύ τους μέσω μιας «επίπεδης πλάκας» η οποία κάμπτεται χωρίς διατμητικές παραμορφώσεις (θεωρία Kirchhoff) έτσι ώστε να είναι ανάλογη με της δοκού Euler που χρησιμοποιείται στο αντίστοιχο επίπεδο πρόβλημα.

Η κατακόρυφη μετακίνηση w(x,y) κάθε σημείου της φορτιζόμενης, από κατακόρυφο κατανεμημένο φορτίο p(x,y), επιφάνειας του εδάφους είναι αποτέλεσμα της παραμόρφωσης των δυο στρωμάτων των ελατηρίων και δίνεται από τη σχέση:

$$w(x,y)=w_1(x,y)+w_2(x,y) \tag{2.60}$$

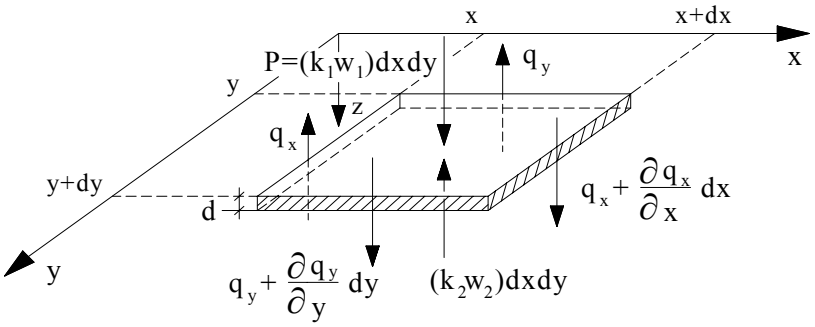
(Στο σημείο αυτό – για λόγους αποφυγής παρανοήσεων – θα πρέπει να τονιστεί ότι στην αρχική διατύπωση το w_1 είναι η ολική μετακίνηση της επιφάνειας και όχι το τμήμα που οφείλεται στην παραμόρφωση της άνω στρώσης των ελατηρίων).

Επειδή το άνω στρώμα των ελατηρίων αποτελείται από ανεξάρτητα ελατήρια, η σχέση που συνδέει την παραμόρφωση τους με το εξωτερικό φορτίο είναι η κλασική σχέση του Winkler:

$$p(x,y)=k_1w_1(x,y) \tag{2.61α}$$

Αντίστοιχα, οι κατακόρυφες μετακινήσεις του κάτω στρώματος δίνονται από την παρακάτω σχέση:

$$p_1(x,y)=k_2w_2(x,y) \tag{2.61β}$$



Σχήμα 2.18. Η ισορροπία του απειροστού στοιχείου του μηχανικού προσομοιώματος κατά τον κατακόρυφο άξονα.

Η γνωστή διαφορική εξίσωση που διέπει την κάμψη λεπτών πλακών σύμφωνα με τη θεωρία Kirchhoff προκύπτει από την συνθήκη ισορροπίας των κατακορύφων δυνάμεων που δρουν επί του απειροστού στοιχείου του μηχανικού προσομοιώματος (Σχήμα 2.18) και δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$D\left(\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4}\right)=p_{\varepsilon\xi}(x,y) \quad \text{ή} \quad D\left(\nabla^4 w_2\right)=p_{\varepsilon\xi}(x,y) \tag{2.62}$$

όπου D είναι η ακαμψία της «πλάκας» και δίνεται από τη σχέση: $D=Ed^3/[12(1-v^2)]$, όπου E, ν είναι οι ελαστικές σταθερές της «πλάκας» και d το πάχος της.

Ο γενικός φορτιστικός όρος $p_{εξ}(x,y)$ που υπεισέρχεται στην (2.62) συντίθεται στην συγκεκριμένη περίπτωση από τη διαφορά της εξωτερικής φόρτισης p(x,y) από την δύναμη $p_1(x,y)$ που μεταβιβάζει στην «πλάκα» ως αντίδραση η κάτω στρώση των ελατηρίων (Σχέση 2.61β).

Εισάγοντας στην (2.62) τις εκφράσεις (2.61α) και (2.61β), και μετά από κατάλληλους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς, επιτυγχάνεται η απαλοιφή της w_2 και έτσι προκύπτει η σχέση που συνδέει την εξωτερική φόρτιση p(x,y), με την ολική κατακόρυφη μετακίνηση w(x,y):

$$(1+\frac{k_2}{k_1})p+\left(\frac{D}{k_1}\right)\nabla^4 p = k_2 w + D\nabla^4 w \qquad (2.63α)$$

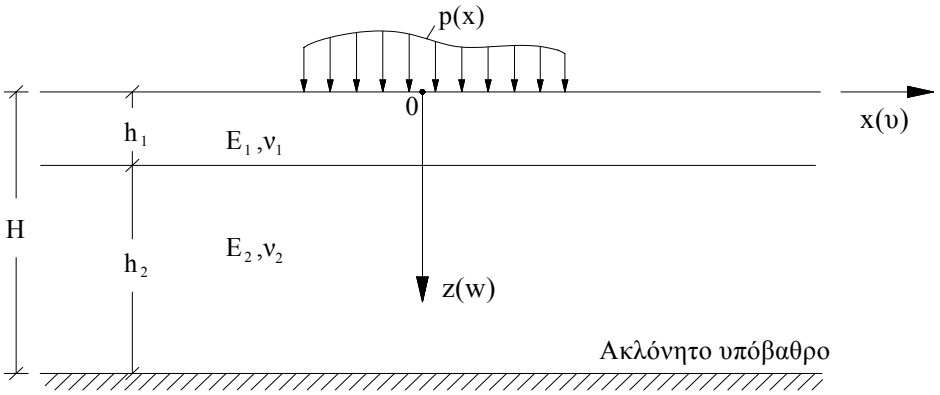
Προφανώς, σε επίπεδα προβλήματα η «πλάκα» μετατρέπεται σε δοκό και η εξίσωση (2.63α) γίνεται:

$$(1+\frac{k_2}{k_1})p+\left(\frac{EI}{k_1}\right)\frac{d^4 p}{dx^4} = k_2 w + EI\frac{d^4 w}{dx^4} \qquad (2.63β)$$

Αν στην (2.63α), και κατ' επέκταση και στην (2.63β), σχηματιστεί το όριο για $k_1 \to \infty$, προκύπτουν οι αντίστοιχες εξισώσεις του προσομοιώματος δυο παραμέτρων του Hetényi (Σχέσεις 2.11α, και 2.11β). Τέλος θα πρέπει να τονιστεί ότι από την (2.63β) προκύπτει με απλούς αλγεβρικούς μετασχηματισμούς η (2.59).

2.2.3.4. Προσομοίωμα Vlasov με δυο ελαστικά στρώματα

Το προσομοίωμα του Vlasov με δυο ελαστικά στρώματα είναι μια υποπερίπτωση της γενικής διατύπωσης του Vlasov (η οποία παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 2.2.2.5) και όχι ένα διαφορετικό, όσον αφορά τη βασική του σύλληψη, προσομοίωμα. Ωστόσο, επειδή με την κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων του ταυτίζεται σε επίπεδο εξισώσεων με το προσομοίωμα του Kerr (όπως θα αποδειχθεί παρακάτω), θα γίνει στην παρούσα παράγραφο μια σύντομη παρουσίαση του. Πέραν τούτου, η ειδίκευση του προσομοιώματος είναι χρήσιμη για την περίπτωση κατασκευών εδραζόμενων επί ελαστικού υποβάθρου το οποίο αποτελείται από ένα επιφανειακό λεπτό εδαφικό στρώμα και από ένα δεύτερο στρώμα αρκετά πιο παχύ το οποίο εδράζεται επί ακλόνητης βάσης (Σχήμα 2.19). Το προσομοίωμα χαρακτηρίζεται από τέσσερις παραμέτρους οι οποίες είναι οι ελαστικές σταθερές E, ν των δυο στρωμάτων που αποτελούν το ελαστικό υπόβαθρο. Επομένως, πρόκειται για ένα προσομοίωμα τεσσάρων παραμέτρων.



Σχήμα 2.19. Ελαστικό υπόβαθρο δυο στρωμάτων επί ακλόνητης βάσης.

Οι εξισώσεις του προσομοιώματος

Έστω το ελαστικό υπόβαθρο του σχήματος 2.19 το οποίο αποτελείται από:

- Ένα επιφανειακό στρώμα μικρού πάχους h_1, με ελαστικές σταθερές E_1, ν_1, και
- το υποκείμενο στρώμα μεγάλου πάχους h_2, με ελαστικές σταθερές E_2, ν_2.

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία της γενικής διατύπωσης του Vlasov γίνονται οι παρακάτω παραδοχές για τις μετακινήσεις των σημείων του υποβάθρου:

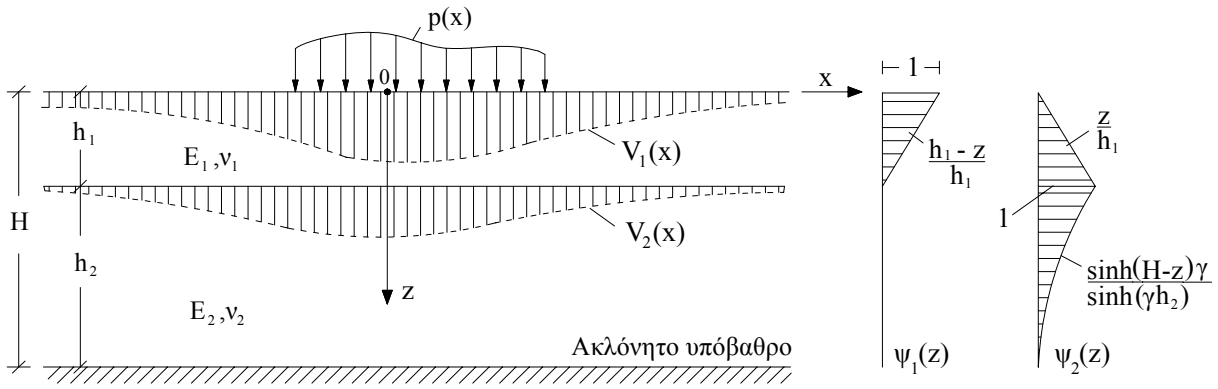
$$\upsilon(x,z)=0 \tag{2.64α}$$

$$w(x,z)=V_1(x)\psi_1(z)+V_2(x)\psi_2(z) \tag{2.64β}$$

Στη σχέση (2.64β) οι συναρτήσεις $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ καθορίζουν την κατανομή των κατακόρυφων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποστρώματος, ενώ οι $V_1(x)$, $V_2(x)$ είναι οι γενικευμένες μετακινήσεις. Για την επιλογή των συναρτήσεων $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ έχουν δοθεί κάποιες λεπτομέρειες στην Παράγραφο 2.2.2.5. Με βάση τις παρατηρήσεις αυτές και με δεδομένο ότι το ανώτερο εδαφικό στρώμα είναι λεπτό, ενώ το υποκείμενο είναι αρκετά παχύ, μπορούν να γίνουν οι παρακάτω επιλογές (Σχήμα 2.20):

- Για το άνω στρώμα ($0\le z\le h_1$) : $\psi_1(z)=\dfrac{h_1-z}{h_1}$, $\psi_2(z)=\dfrac{z}{h_1}$ (2.65α)
- Για το κάτω στρώμα ($h_1\le z\le H$) : $\psi_1(z)=0$, $\psi_2(z)=\dfrac{\sinh[\gamma(H-z)]}{\sinh(zh_2)}$ (2.65β)

Για την ερμηνεία του συντελεστή γ δίνονται λεπτομέρειες στην Παράγραφο 2.2.2.5, ενώ θα πρέπει να τονιστεί ότι οι γενικευμένες μετακινήσεις $V_1(x)$, $V_2(x)$ ορίζουν τις κατακόρυφες μετακινήσεις στην επιφάνεια του ελαστικού υποβάθρου, και στο σύνορο μεταξύ των δυο στρωμάτων, αντίστοιχα.



Σχήμα 2.20. Η ερμηνεία των συναρτήσεων $V_1(x)$, $V_2(x)$ και $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$.

Με την εισαγωγή των σχέσεων (2.64α), (2.64β), (2.65α) και (2.65β) στις γενικές εξισώσεις ισορροπίας (2.20α), (2.20β) προκύπτει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$2t_1\frac{d^2V_1}{dx^2}-k_1V_1+t_1\frac{d^2V_2}{dx^2}+k_1V_2+p=0 \tag{2.66α}$$

$$t_1\frac{d^2V_1}{dx^2}+k_1V_1+2(t_1+t_2)\frac{d^2V_2}{dx^2}-(k_1+k_2)V_2=0 \tag{2.66β}$$

από την επίλυση του οποίου επιτυγχάνεται ο υπολογισμός των γενικευμένων μετακινήσεων. Στις παραπάνω εξισώσεις:

$$k_1 = \frac{bE_1}{h_1\left(1-\nu_1^2\right)} \qquad t_1 = \frac{bE_1 h_1}{12\left(1+\nu_1\right)} \tag{2.67α}$$

$$k_2 = \frac{bE_2\gamma H}{4h_2\left(1-\nu_2^2\right)}\left(\frac{\sinh(2\gamma H)+(2\gamma H)}{\sinh^2(\gamma H)}\right) \qquad t_2 = \frac{bE_2 h_2}{16\gamma H\left(1+\nu_2\right)}\left(\frac{\sinh(2\gamma H)-(2\gamma H)}{\sinh^2(\gamma H)}\right) \tag{2.67β}$$

Οι σχέσεις (2.67α) και (2.67β) μπορούν με κατάλληλη επιλογή των σταθερών E_1, ν_1, E_2, ν_2 να χρησιμοποιηθούν είτε για προβλήματα επίπεδης έντασης είτε για προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης (Σχέση 2.23στ).

Οι σταθερές k_1, k_2 οδηγούν στον προσδιορισμό των θλιπτικών τάσεων στο άνω και κάτω εδαφικό στρώμα αντίστοιχα, ενώ οι σταθερές t_1, t_2 στον προσδιορισμό των αντίστοιχων διατμητικών.

Για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (2.66α) και (2.66β) εφαρμόζεται η μέθοδος της βοηθητικής συνάρτησης προκειμένου να μετατραπεί το εν λόγω σύστημα σε μια εξίσωση. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται η συνάρτηση F(x), μέσω της οποίας αλλά και των παραγώγων της εκφράζονται οι γενικευμένες μετακινήσεις $V_1(x)$, $V_2(x)$. Ο μετασχηματισμός αυτός γίνεται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε αν οι εκφράσεις των $V_1(x)$, $V_2(x)$ ως προς την F(x) εισαχθούν στην εξίσωση (2.66β), η τελευταία μετατρέπεται σε ταυτότητα. Ο μετασχηματισμός που χρησιμοποιείται είναι ο ακόλουθος:

$$V_1(x) = \left(k_1+k_2\right)F(x) - 2\left(t_1+t_2\right)\frac{d^2F}{dx^2} \tag{2.68α}$$

$$V_2(x) = k_1F(x) + t_1\frac{d^2F}{dx^2} \tag{2.68β}$$

Η εισαγωγή των εκφράσεων (2.68α), (2.68β) στην (2.64α) οδηγεί στην βασική εξίσωση του προσομοιώματος:

$$t_1\left(3t_1+4t_2\right)\frac{d^4F}{dx^4} - 2\left(3t_1k_1+t_1k_2+t_2k_1\right)\frac{d^2F}{dx^2} + \left(k_1k_2\right)F(x) = p(x) \tag{2.69}$$

Οι απαιτούμενες συνοριακές συνθήκες για την επίλυση της (2.69) εισάγονται (σύμφωνα με τη μέθοδο που χρησιμοποιείται από τον Vlasov) με τη μορφή γενικευμένων διατμητικών δυνάμεων. Οι γενικευμένες αυτές δυνάμεις σύμφωνα με την (2.21β) είναι:

$$S_1 = \int_0^H \tau_{zx}\psi_1 dz \qquad \text{και} \qquad S_2 = \int_0^H \tau_{zx}\psi_2 dz \tag{2.70}$$

(Περισσότερες λεπτομέρειες για την επίλυση της (2.69) δίνονται από τους Vlasov και Leont'εν (1960)).

Θα πρέπει να τονιστεί ότι με μια διαφορετική παραδοχή για τις εξισώσεις προσδιορισμού του προφίλ των κατακορύφων μετακινήσεων στα δυο εδαφικά στρώματα αντί των εκφράσεων (2.65α) και (2.65β) είναι δυνατό να προκύψει μια διαφορετική εξίσωση αντί της (2.69) αλλά και διαφορετικές εκφράσεις για τις παραμέτρους k_1, k_2, t_1, t_2 αντί των (2.67α) και (2.67β).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση κατά την οποία τόσο το μέτρο ελαστικότητας E_1 όσο και το πάχος του άνω στρώματος h_1 λαμβάνουν πολύ μικρές τιμές. Στην περίπτωση αυτή, από τις σχέσεις (2.67α) προκύπτει ότι $t_1 \to 0$ και ταυτόχρονα η τιμή της παραμέτρου k_1 παραμένει πεπερασμένη. Οι παραπάνω υποθέσεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι στην περίπτωση αυτή το άνω στρώμα συμπεριφέρεται με τρόπο παρόμοιο με αυτόν τον οποίο συμπεριφέρεται το προσομοίωμα του Winkler. Δηλαδή, στο εσωτερικό του άνω στρώματος αναπτύσσονται μόνο θλιπτικές και όχι διατμητικές τάσεις. Επομένως, η εξίσωση που περιγράφει τη συμπεριφορά του ελαστικού υποβάθρου των δυο στρωμάτων προκύπτει από την (2.69) με την παραδοχή ότι $t_1 \to 0$:

$$-2t_2 \frac{d^2F}{dx^2} + k_2 F = \frac{p}{k_1} \tag{2.71}$$

Ένα ακόμα χαρακτηριστικό του προσομοιώματος των δυο ελαστικών στρωμάτων είναι η δυνατότητα του να μετασχηματίζεται στο προσομοίωμα του Kerr (Jones και Xenophontos (1976)). Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη βοήθεια κατάλληλης επιλογής εκφράσεων για τις συναρτήσεις $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$. Πράγματι αν για τις συναρτήσεις αυτές επιλεγούν οι εκφράσεις:

- Για το άνω στρώμα ($0 \le z \le h_1$) : $\psi_1(z) = \dfrac{h_1 - z}{h_1}, \quad \psi_2(z) = 1$
- Για το κάτω στρώμα ($h_1 \le z \le H$) : $\psi_1(z) = 0, \qquad \psi_2(z) = \dfrac{\sinh[\gamma(H - z)]}{\sinh[\gamma h_2]}$

τότε ξεκινώντας από τις εξισώσεις (2.66α), (2.66β) και ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία (Jones και Xenophontos (1976)) είναι δυνατό να καταλήξει κανείς σε εξίσωση ανάλογη της (2.46β), (βλέπε και Παράγραφο 2.2.7).

2.2.3.5. Φορμαλιστικές μέθοδοι ανάπτυξης προσομοιωμάτων

Η χρήση φορμαλιστικών μεθόδων προσφέρει τη δυνατότητα ανάπτυξης προσομοιωμάτων με τη βοήθεια των οποίων μπορεί να μελετηθεί η μηχανική συμπεριφορά της επιφάνειας του εδάφους υπό την επίδραση κατακορύφων φορτίων που δρουν σε κάποιο τμήμα της. Κύριο χαρακτηριστικό των προσομοιωμάτων αυτών είναι το γεγονός ότι δεν πρόκειται για μηχανικά προσομοιώματα (δηλαδή προσομοιώματα αποτελούμενα από ελατήρια συνδεόμενα μεταξύ τους με κάποιας μορφής σύνδεση, π.χ. διατμητικά επίπεδα) ούτε για προσομοιώματα που οι βασικές εξισώσεις τους είναι απλοποιημένες σχέσεις που στηρίζονται στις κλασσικές εξισώσεις της τρισδιάστατης (ή της δισδιάστατης) ελαστικότητας. Αντίθετα, πρόκειται για καθαρά μαθηματικά προσομοιώματα τα οποία στηρίζονται σε μαθηματικές μεθόδους, με βάση τις οποίες επιχειρείται ο προσδιορισμός σχέσεων οι οποίες συνδέουν τα φορτία που δρουν στην επιφάνεια του εδάφους με τις κατακόρυφες μετακινήσεις τις οποίες προκαλούν.

Άλλο ένα σημείο διαφοροποίησης των προσομοιωμάτων αυτής της μορφής είναι η πολυπαραμετρικότητά τους. Πρόκειται για τη δυνατότητα επιλογής του αριθμού των παραμέτρων που είναι επιθυμητό να ληφθούν υπόψη για την προσομοίωση του εδάφους (θεωρητικά είναι δυνατή και η θεώρηση «άπειρου» αριθμού παραμέτρων). Έτσι, π.χ., η βασική εξίσωση του προσομοιώματος του Winkler αλλά και οι εξισώσεις των

προσομοιωμάτων δυο (ή και των τριών) παραμέτρων αποτελούν υποπεριπτώσεις των γενικού τύπου εξισώσεων στις οποίες καταλήγουν οι φορμαλιστικές μέθοδοι. Η δυνατότητα αυτή όμως αποτελεί ταυτόχρονα και το σημείο στο οποίο τα προσομοιώματα αυτά εμφανίζουν μια μεγάλη αδυναμία η οποία έχει εμποδίσει την χρήση τους σε πρακτικές εφαρμογές. Η αδυναμία αυτή πηγάζει από το πρόβλημα του προσδιορισμού (αλλά και της φυσικής ερμηνείας) των παραμέτρων οι οποίες εισάγονται στις βασικές εξισώσεις των προσομοιωμάτων. Είναι γεγονός, ότι επιχειρώντας να αυξήσει κανείς την ακρίβεια ενός προσομοιώματος μέσω της αύξησης των εισαγόμενων παραμέτρων εισάγει πολύ μεγαλύτερες δυσκολίες εφόσον θα πρέπει ταυτόχρονα να επιτύχει έναν ρεαλιστικό προσδιορισμό τους μέσω πειραματικών μετρήσεων. Ωστόσο, η θεωρητική αξία των φορμαλιστικών μεθόδων δεν μπορεί να αμφισβητηθεί καθώς αποτελούν μια διαφορετικής μορφής (σε μαθηματικό επίπεδο) τεκμηρίωση της ορθότητας των εξισώσεων στις οποίες στηρίζονται τόσο το προσομοίωμα του Winkler όσο και τα προσομοιώματα των δυο (ή και των τριών) παραμέτρων.

Οι φορμαλιστικές μέθοδοι οι οποίες είναι διαθέσιμες στη βιβλιογραφία (όπως παρουσιάζονται από τον Kerr (1985)) δίνονται εν συντομία παρακάτω.

Η Μέθοδος του Ratzersdorfer

Επειδή στα πλαίσια των φορμαλιστικών μεθόδων τόσο οι μετακινήσεις της επιφανείας του υποβάθρου όσο και οι αντίστοιχες εξωτερικές κατακόρυφες φορτίσεις θεωρούνται ως συναρτήσεις, η μέθοδος του Ratzersdorfer στηρίζεται στον ολοκληρωτικό μετασχηματισμό της συνάρτησης φόρτισης p(x):

$$p(x) = \int P(|\xi - x|)w(\xi)d\xi \tag{2.72}$$

Στην παραπάνω σχέση ο «πυρήνας» του μετασχηματισμού P(|ξ-x|) είναι η συνάρτηση του Green (συνάρτηση επιρροής) η οποία αφορά τις κατακόρυφες δυνάμεις αλληλεπίδρασης. Εισάγοντας την βοηθητική παράμετρο $\overline{x} = \xi - x$ η (2.72) γίνεται:

$$p(x) = \int P(|\overline{x}|)w(x + \overline{x})d\overline{x} \tag{2.73}$$

Αναπτύσσοντας τη συνάρτηση $w(x + \overline{x})$ σε σειρά Taylor προκύπτει:

$$w(x + \overline{x}) = w(x) + \frac{dw}{dx}\overline{x} + \frac{1}{2}\frac{d^2w}{dx^2}\overline{x}^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3w}{dx^3}\overline{x}^3 + ... \tag{2.74}$$

και αντικαθιστώντας στην (2.73) ο Ratzersdorfer κατέληξε στη σχέση:

$$p(x) = \left[\int P(|\overline{x}|)d\overline{x}\right]w(x) + \left[\int \overline{x}P(|\overline{x}|)d\overline{x}\right]\frac{dw}{dx} + \left[\frac{1}{2}\int \overline{x}^2 P(|\overline{x}|)d\overline{x}\right]\frac{d^2w}{dx^2} + \left[\frac{1}{6}\int \overline{x}^3 P(|\overline{x}|)d\overline{x}\right]\frac{d^3w}{dx^3} + ... \tag{2.75}$$

Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι ο πυρήνας του μετασχηματισμού P είναι συμμετρικός ως προς το x=ξ, πρέπει να μηδενιστούν οι όροι που αντιστοιχούν σε παραγώγους των οποίων η τάξη είναι περιττός αριθμός. Επομένως η (2.75) παίρνει την τελική της μορφή:

$$p(x) = k_0 w(x) + k_1\frac{d^2w}{dx^2} + k_2\frac{d^4w}{dx^4} + ... \tag{2.76}$$

Όπου:

$$k_0 = \int P(\bar{x})d\bar{x},\ \ k_1 = \frac{1}{2}\int \bar{x}^2 P(\bar{x})d\bar{x} \ \ \text{και} \ \ k_2 = \frac{1}{24}\int \bar{x}^4 P(\bar{x})d\bar{x}$$

Η εξίσωση (2.76) αποτελεί και τη βασική εξίσωση της υπόθεσης του Ratzersdorfer. Εύκολα καταλήγει κανείς στο συμπέρασμα ότι εάν επιλεγεί η χρήση μιας παραμέτρου η εξίσωση του προσομοιώματος ταυτίζεται με την εξίσωση του προσομοιώματος του Winkler (Σχέση (2.1α)), ενώ εάν επιλεγεί η χρήση δυο παραμέτρων τότε υπάρχει ταύτιση με τις εξισώσεις των προσομοιωμάτων δυο παραμέτρων (Σχέσεις (2.4β), (2.8β), (2.25)). Πρέπει τέλος να επισημανθεί το γεγονός ότι ο Ratzersdorfer δεν αναφέρεται ούτε στην φυσική σημασία αλλά ούτε και στις ιδιότητες των παραμέτρων k_n.

Η Μέθοδος του Favre

Ο Favre (1960) έκανε την a priori παραδοχή ότι η εξωτερική φόρτιση p(x) είναι συνάρτηση τόσο των κατακορύφων μετακινήσεων w(x) όσο και των παραγώγων τους. Δηλαδή:

$$p(x) = f(w, \frac{dw}{dx}, \frac{d^2w}{dx^2}, \frac{d^3w}{dx^3}, ...) \tag{2.77}$$

Κατόπιν ανέπτυξε το δεξιό μέλος της (2.77) σε σειρές Maclaurin:

$$p(x) = f(0, 0, 0, ...) + \left[\frac{\partial f}{\partial w}w + \frac{\partial f}{\partial w'}w' + \frac{\partial f}{\partial w''}w'' + ...\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}w^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial w'}ww' + ...\right] + ... \tag{2.78}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη προφανή συνθήκη ότι όταν p(x)=0, τότε w(x)=w΄(x)=w΄΄(x)=…=0 και επομένως f(0, 0, ….)=0 και ταυτόχρονα απαλείφοντας τους μη γραμμικούς όρους από την (2.78) προκύπτει:

$$p(x) = \frac{\partial f}{\partial w}w(x) + \frac{\partial f}{\partial w'}w'(x) + \frac{\partial f}{\partial w''}w''(x) + ... \tag{2.79}$$

Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες συμμετρίας πρέπει να μηδενιστούν όλες οι παράγωγοι περιττής τάξης. Επομένως η τελική σχέση του Favre είναι:

$$p(x) = k_0 w(x) + k_1 w''(x) + ... \tag{2.80}$$

Όπου:

$$k_0 = \frac{\partial f}{\partial w} \ \ \text{και} \ \ k_1 = \frac{\partial f}{\partial w''}$$

Πρέπει επίσης να αναφερθεί το γεγονός ότι μελετώντας την επιρροή των φορτίων στα γειτονικά σημεία, ο Favre κατέληξε στο συμπέρασμα ότι $k_0>0$ και $k_1<0$. Το τελευταίο συμπέρασμα έρχεται σε πλήρη αντιστοιχία με τις σχέσεις (2.4β), (2.8β), (2.25) που διέπουν τα μηχανικά προσομοιώματα των δυο παραμέτρων.

Παρόμοια τεχνική με τον Favre εφάρμοσαν και οι Hermann, Fletcher (1971) οι οποίοι ξεκίνησαν από την a priori παραδοχή ότι οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ μιας δοκού και του εδάφους έχουν την ακόλουθη γραμμική σχέση:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{N} \bar{a}_n \frac{d^n w}{dx^n} \tag{2.81}$$

Στη σχέση (2.81) – η οποία είναι της ίδιας μορφής με την γενικού τύπου εξίσωσης (2.80) από την οποία ξεκίνησε το συλλογισμό του ο Favre – οι συντελεστές $\bar{a}_n$ αποτελούν τις παραμέτρους του προσομοιώματος.

Στο σημείο αυτό οι Hermann και Fletcher προχώρησαν σε μια επιπλέον παραδοχή η οποία είναι συνυφασμένη με την κλασσική εξίσωση του Euler για την κάμψη των δοκών. Πιο συγκεκριμένα, έκαναν την παραδοχή ότι εφόσον η εξίσωση κάμψης των δοκών είναι:

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} = q(x) - p(x)$$

και εφόσον η εξίσωση αυτή αποτελεί μια προσέγγιση της πραγματικής συμπεριφοράς, είναι λογικό να γίνει μια αντίστοιχη παραδοχή όμοιας τάξεως και για την μορφή της εξίσωσης που διέπει τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης p(x). Επομένως προχώρησαν στη θεώρηση n≤4 παραμέτρων στην εξίσωση (2.81):

$$p(x) = \bar{a}_0 w + \bar{a}_1 \frac{dw}{dx} + \bar{a}_2 \frac{d^2w}{dx^2} + \bar{a}_3 \frac{d^3w}{dx^3} + \bar{a}_4 \frac{d^4w}{dx^4} \tag{2.82}$$

Τέλος, κάνοντας τη θεώρηση του προβλήματος της κάμψης δοκών απείρου μήκους εδραζόμενων επί ελαστικού υποβάθρου του οποίου οι ελαστικές σταθερές δεν μεταβάλλονται κατά μήκος και κάνοντας τις βασικές παραδοχές του Favre, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι:

$\bar{a}_1 = \bar{a}_3$ και $\bar{a}_2 \le 0,\ \bar{a}_4 \le 0$

Επομένως, η (2.82) παίρνει την τελική μορφή:

$$p(x) = \bar{a}_0 w - \bar{a}_2 \frac{d^2w}{dx^2} - \bar{a}_4 \frac{d^4w}{dx^4} \tag{2.83}$$

η οποία είναι προφανές ότι έχει την ίδια μορφή με την εξίσωση (2.80) του Favre αν σ' αυτήν ληφθούν υπόψη τέσσερις όροι.

Η Μέθοδος των Levinson – Bharatha

Οι Levinson – Bharatha (1978) και (1980) πραγματοποίησαν μια γενικής μορφής προσέγγιση του προβλήματος προσομοίωσης του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου λαμβάνοντας υπόψη την ανισοτροπία, τη μη γραμμικότητα αλλά και την ανομοιογένεια του εδάφους. Για την προσέγγιση αυτή έκαναν χρήση μεθόδων βασισμένων σε αξιώματα της ορθολογιστικής μηχανικής (rational mechanics).

Για την ειδική περίπτωση της μελέτης υποστρώματος με αρχικά επίπεδη ελεύθερη επιφάνεια, έθεσαν το αξίωμα ότι η τιμή της δύναμης αλληλεπίδρασης p(x,y) σε ένα σημείο προσδιορίζεται από την κατακόρυφη μετακίνηση w(x,y) και τις μερικές παραγώγους της στο σημείο αυτό (Levinson – Bharatha (1978)). Επομένως ξεκίνησαν από την ίδια παραδοχή από την οποία ξεκίνησε και ο Favre, η εξίσωση του οποίου όμως αναφέρεται σε προβλήματα δύο διαστάσεων. Για την περίπτωση γραμμικώς ελαστικού και ομογενούς υποστρώματος – και θεωρώντας σύστημα συντεταγμένων με άξονες x, y να ταυτίζονται με την επιφάνεια του – η εξίσωση με βάση την οποία προσδιορίζονται οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης κατά τους Levinson – Bharatha, είναι:

$$p(x, y) = K_0 w(x, y) + K_1 \nabla^2 w + K_2 \nabla^4 w + ... \tag{2.84}$$

Όπου $\nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$, είναι ο τελεστής του Laplace.

Για τα προβλήματα δυο διαστάσεων η (2.84) γίνεται:

$$p(x) = k_0 w(x) + k_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + k_2 \frac{d^4 w}{dx^4} + ... + k_m \frac{d^{(2m)} w}{dx^{(2m)}} \tag{2.85}$$

Εξαιτίας του γεγονότος ότι το έργο το οποίο παράγουν οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης p(x) κατά την παραμόρφωση της επιφανείας του υποστρώματος w(x), πρέπει να είναι ποσότητα θετικά ορισμένη, εξάγεται το συμπέρασμα ότι: $(-1)^n k_n > 0$ για n=0, 1, 2, …., m –1. Επομένως: $k_0>0$, $k_1<0$, $k_2>0$,…..

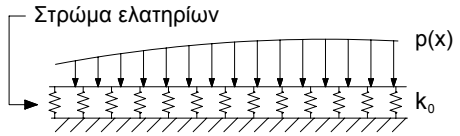
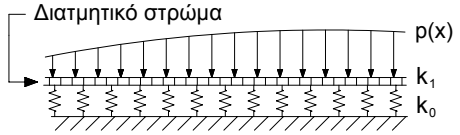
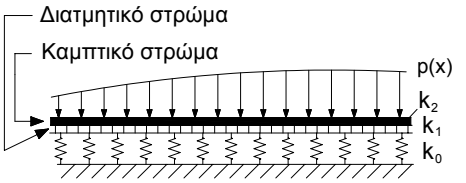
Οι Levinson – Bharatha προχώρησαν σε μια ταξινόμηση των εξισώσεων που προκύπτουν από τη γενική σχέση (2.85).

Η ταξινόμηση αυτή έγινε με βάση τον αριθμό των όρων οι οποίοι λαμβάνονται υπόψη. Ειδικότερα, για τα προβλήματα δυο διαστάσεων η ταξινόμηση είναι η εξής:

	n=0, 1	$p=k_0 w$	(2.86α)
	n=2, 3	$p= k_0 w+k_1 w''$	(2.86β)
Τάξη	n=4, 5	$p= k_0 w+k_1 w''+k_2 w^{(4)}$	(2.86γ)
	……	……..	
	n=2m, 2m+1	$p= k_0 w+k_1 w''+k_2 w^{(4)}+….+k_m w^{(2m)}$	(2.86δ)

Παρά το γεγονός ότι η ανάπτυξη των παραπάνω προσομοιωμάτων στηρίζεται σε καθαρά μαθηματική διατύπωση, είναι δυνατή η αντιστοίχηση των εξισώσεων (2.86α) – (2.86γ) σε μηχανικά προσομοιώματα τα οποία είναι διαθέσιμα στη βιβλιογραφία, ως εξής:

Η εξίσωση (2.86α) τάξεως n=0 αντιστοιχεί στο προσομοίωμα του Winkler, η εξίσωση (2.86β) τάξεως n=2 αντιστοιχεί στα προσομοιώματα των δυο παραμέτρων, ενώ τέλος η εξίσωση (2.86γ) τάξεως n=4 αντιστοιχεί σε προσομοίωμα το οποίο συνίσταται από ένα καμπτικό στρώμα προσαρτημένο στο προσομοίωμα δυο παραμέτρων του Pasternak (Σχήμα 2.21).

Τάξη	Μηχανικό Προσομοίωμα
0,1	
2,3	
4,5	

Σχήμα 2.21. Αντιστοίχιση των κλασσικών μηχανικών προσομοιωμάτων με τις εξισώσεις των Levinson – Bharatha.

Στα προσομοιώματα αυτά, k_0=k είναι η σταθερά του στρώματος των ελατηρίων, $-k_1$=G η δυστμησία του διατμητικού επιπέδου, και k_2=D_f είναι η δυσκαμψία του καμπτικού στρώματος.

Κλείνοντας, θα πρέπει να τονιστεί ότι τόσο η υπόθεση των Levinson – Bharatha όσο και οι αντίστοιχες υποθέσεις των Ratzersdorfer και Favre που παρουσιάστηκαν παραπάνω έχουν την ίδια γενική μορφή:

$$p = L(w) \tag{2.87}$$

όπου L είναι γραμμικός διαφορικός τελεστής που περιλαμβάνει μόνον παραγώγους άρτιας τάξης.

Η Μέθοδος των Kerr – Rhines

Οι Kerr – Rhines (1967), κατάφεραν να αποδείξουν ότι η ανάπτυξη της ακριβούς λύσης του προβλήματος ελαστικού συνεχούς μέσου πεπερασμένου πάχους το οποίο εδράζεται επί ακλόνητου υποβάθρου, οδηγεί σε εξίσωση αλληλεπίδρασης με γενική μορφή:

$$L_1(p) = L_2(w) \tag{2.88}$$

όπου L_1, L_2 είναι γραμμικοί διαφορικοί τελεστές.

Η προσέγγιση αυτή είναι διαφορετική από την προσέγγιση (2.87) και έτσι οδηγεί σε διαφορετική ακολουθία μαθηματικών προσομοιωμάτων από την αντίστοιχη ακολουθία των Levinson – Bharatha.

Η μέθοδος των Kerr – Rhines ξεκινά από τη θεώρηση ενός εδαφικού στρώματος πάχους H το οποίο υπόκειται σε κατακόρυφη φόρτιση p(x,y) στην ελεύθερη επιφάνεια του, και εδράζεται επί μιας λείας ακλόνητης βάσης. Γίνεται αρχικά η παραδοχή ότι το εδαφικό αυτό στρώμα φορτίζεται σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης. Όπως είναι γνωστό από τις εξισώσεις της επίπεδης ελαστικότητας, όταν μια συνάρτηση φ(x,y) ικανοποιεί την διαρμονική εξίσωση:

$$\nabla^4 \varphi = 0 \tag{2.89}$$

αλλά και τις απαιτούμενες συνοριακές συνθήκες που ορίζουν την παραμόρφωση ενός σώματος, τότε οι τάσεις στο εσωτερικό του σώματος αυτού μπορούν να υπολογιστούν από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \qquad \sigma_{zz} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \qquad \sigma_{xz} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \tag{2.90}$$

Επιπλέον, αν οριστεί η συνάρτηση μετακινήσεων ψ(x,y) η οποία ικανοποιεί τις εξισώσεις:

$$\nabla^2 \psi = 0 \text{ και } \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \tag{2.91}$$

τότε αποδεικνύεται ότι οι μετακινήσεις στις διευθύνσεις x και z – U(x,z) και W(x,z) αντίστοιχα – δίνονται από τις σχέσεις:

$$EU = (1-\nu^2)\frac{\partial \psi}{\partial z} - (1+\nu)\frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{2.92α}$$

$$EW = (1-\nu^2)\frac{\partial \psi}{\partial x} - (1+\nu)\frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{2.92β}$$

Για την συνάρτηση των τάσεων φ(x,y) μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει την εξής μορφή (Bosson (1938)):

$$\varphi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)\frac{z^n}{n!} \tag{2.93}$$

Εισάγοντας την (2.93) στις (2.90) προκύπτει μετά από ορισμένες συμπτύξεις, η εξής συμβολική μορφή:

$$\varphi(x,z)=\left[\cos(zD)+\frac{1}{2}zD\sin(zD)\right]X_0+\left[\frac{3}{2D}\sin(zD)-\frac{1}{2}z\cos(zD)\right]X_1+\left[\frac{z}{2D}\sin(zD)\right]X_2+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(zD)}{D^3}-\frac{z}{D^2}\cos(zD)\right]X_3+\ldots\ldots \tag{2.94}$$

Όπου: $D^n=d^n/dx^n$, n=1, 2, 3, …..

Η αντίστοιχη συνάρτηση των μετακινήσεων δίνεται από τη σχέση:

$$\psi(x,z)=\sin(zD)X_0-\frac{1}{D}\cos(zD)X_1+\frac{1}{D^2}\sin(zD)X_2-\frac{1}{D^3}\cos(zD)X_3+\ldots\ldots \tag{2.95}$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι:

Για z=-H (Βάση υποστρώματος): $\sigma_{xz}(x,-H)=0$ και $W(x,-H)=0$ (2.96α)

Για z=0 (Ελεύθερη επιφάνεια): $\sigma_{xz}(x,0)=0$ και $\sigma_{zz}(x,0)=-p(x)$ (2.96β)

Θέτοντας W(x,0)=-w(x), προκύπτει η ακόλουθη σχέση η οποία συνδέει τις κατακόρυφες εξωτερικές δυνάμεις p(x) που δρουν στην ελεύθερη επιφάνεια του υποστρώματος, με τις κατακόρυφες μετακινήσεις τις οποίες προκαλούν:

$$\left[2\sin^2(HD)\right]p(x)=\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\left[\frac{1}{D}\sin(HD)\cos(HD)+H\right]D^2\right\}w(x) \tag{2.97}$$

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις που υπεισέρχονται στην παραπάνω εξίσωση μπορούν να αναπτυχθούν με τη βοήθεια εκθετικών σειρών. Από τους μετασχηματισμούς προκύπτει η παρακάτω γενική εξίσωση η διερεύνηση της οποίας έγινε από τους Kerr – Rhines και θα παρουσιαστεί παρακάτω:

$$\left(\frac{H}{E^*}\right)\frac{d^2p}{dx^2}-\left(\frac{H^3}{3E^*}\right)\frac{d^4p}{dx^4}+\left(\frac{2H^5}{45E^*}\right)\frac{d^6p}{dx^6}-\left(\frac{H^7}{315E^*}\right)\frac{d^8p}{dx^8}+\ldots=\frac{d^2w}{dx^2}-\left(\frac{H^2}{3}\right)\frac{d^4w}{dx^4}+\left(\frac{H^4}{15}\right)\frac{d^6w}{dx^6}-\left(\frac{2H^6}{315}\right)\frac{d^8w}{dx^8}+\ldots \tag{2.98}$$

όπου $E^*=E/(1-\nu^2)$.

Εύκολα διαπιστώνεται ότι εάν στην σχέση (2.98) διατηρηθεί μόνον ο πρώτος όρος σε κάθε ένα από τα δυο μέλη της τότε προκύπτει:

$$\frac{d^2p}{dx^2}=\left(\frac{E^*}{H}\right)\frac{d^2w}{dx^2} \tag{2.99}$$

Ολοκλήρωση της (2.99) οδηγεί στη σχέση: $p(x)=(E^*/H)w+A_1x+A_2$. Εφόσον όμως για p(x)=0 θα πρέπει w(x)=0 συνάγεται το συμπέρασμα ότι $A_1=A_2=0$. Επομένως:

$$p=\left(\frac{E^*}{H}\right)w \tag{2.100}$$

Η σχέση (2.100) είναι ανάλογη της σχέσης (2.1β) του Winkler, στην οποία η ελατηριακή σταθερά k είναι ίση με:

$$k=\frac{E}{H(1-\nu^2)} \tag{2.101}$$

Διατηρώντας εκείνους τους όρους της (2.98) οι οποίοι περιέχουν το συντελεστή H υψωμένο σε δυνάμεις μικρότερες ή ίσες του 2, η γενική εξίσωση δίνει μετά από διαδικασία όμοια με εκείνη που ακολουθήθηκε προηγουμένως:

$$p = \left(\frac{E^*}{H}\right)w - \left(\frac{E^*H}{3}\right)\frac{d^2w}{dx^2} \tag{2.102}$$

Είναι φανερό, ότι η παραπάνω σχέση ταυτίζεται με την σχέση η οποία διέπει τα προσομοιώματα δυο παραμέτρων (βλ. π.χ. (2.4β) ή (2.8β)), με σταθερές:

$$k = \frac{E}{(1-\nu^2)H} \qquad G = \frac{EH}{3(1-\nu^2)} \tag{2.103}$$

Με όμοια διαδικασία, εάν διατηρηθούν εκείνοι οι όροι της (2.98) οι οποίοι περιέχουν δυνάμεις του H μέχρι τρίτης τάξης (H^3) προκύπτει η σχέση:

$$p - \left(\frac{H^2}{3}\right)\frac{d^2p}{dx^2} = \left(\frac{E^*}{H}\right)w - \left(\frac{E^*H}{3}\right)\frac{d^2w}{dx^2} \tag{2.104}$$

Η σχέση (2.104) ταυτίζεται – όπως τονίστηκε και στην παράγραφο 2.2.3.1 – με την εξίσωση (2.46β) στην οποία κατέληξε ο Kerr ξεκινώντας όμως από τη θεώρηση του μηχανικού προσομοιώματος που δίνεται στο σχήμα 2.13. Η διαφοροποίηση μεταξύ των εξισώσεων (2.46β) και (2.104) συνίσταται στον ορισμό των σταθερών οι οποίες υπεισέρχονται στις σχέσεις αυτές.

Εάν ληφθούν υπόψη και όροι της (2.98) οι οποίοι περιέχουν δυνάμεις του H μέχρι τέταρτης τάξης (H^4), προκύπτει η εξίσωση:

$$p - \left(\frac{H^2}{3}\right)\frac{d^2p}{d^2x} = \left(\frac{E^*}{H}\right)w - \left(\frac{E^*H}{3}\right)\frac{d^2w}{dx^2} + \left(\frac{E^*H^3}{15}\right)\frac{d^4w}{dx^4} \tag{2.105}$$

Αντιστοίχως αν ληφθούν υπόψη όροι του H υψωμένοι σε δύναμη μέχρι πέμπτης τάξης (H^5) προκύπτει:

$$p - \left(\frac{H^2}{3}\right)\frac{d^2p}{dx^2} + \left(\frac{2H^4}{45}\right)\frac{d^4p}{dx^4} = \left(\frac{E^*}{H}\right)w - \left(\frac{E^*H}{3}\right)\frac{d^2w}{dx^2} + \left(\frac{E^*H^3}{15}\right)\frac{d^4w}{dx^4} \tag{2.106}$$

Όπως και στην περίπτωση της μελέτης της μεθόδου των Levinson – Bharatha έτσι και στη μέθοδο των Kerr – Rhines υπάρχει μια αντιστοιχία των προσομοιωμάτων που προκύπτουν από την (2.98) και μιας σειράς μηχανικών προσομοιωμάτων. Όπως αποδείχθηκε η σχέση (2.100) αντιστοιχεί στο προσομοίωμα του Winkler, ενώ η (2.102) και η (2.104) είναι ανάλογες των εξισώσεων των προσομοιωμάτων δυο παραμέτρων και του προσομοιώματος τριών παραμέτρων του Kerr, αντίστοιχα.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι το μηχανικό προσομοίωμα του σχήματος (2.22α) περιγράφεται από τη σχέση:

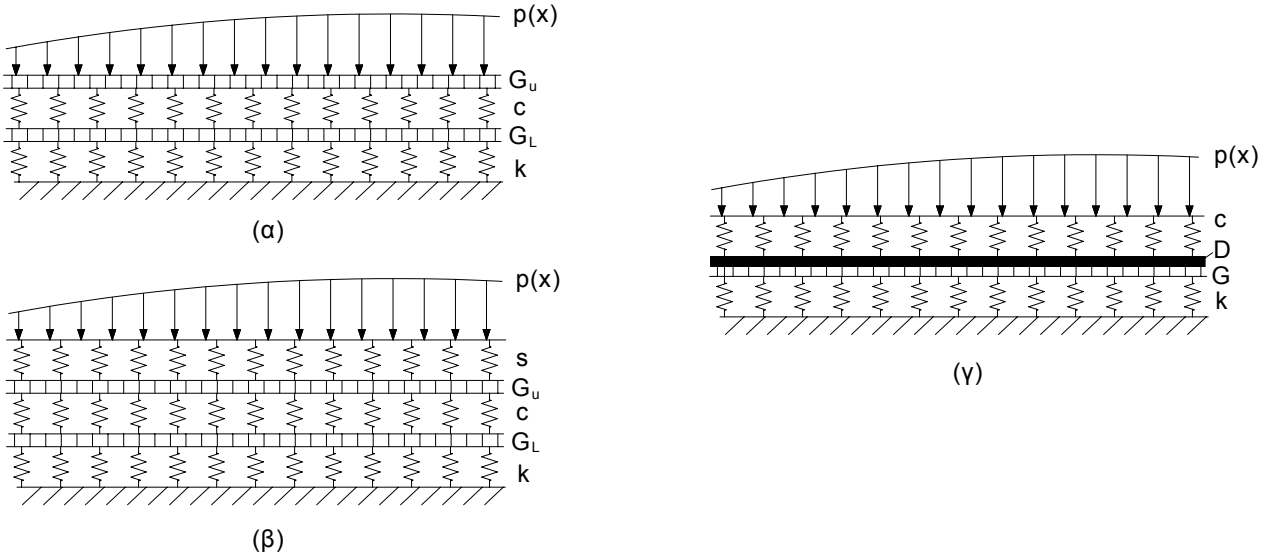
$$\left(1+\frac{k}{c}\right)p - \left(\frac{G_L}{c}\right)\frac{d^2p}{dx^2} = kw - G_u\left(1+\frac{k}{c}+\frac{G_L}{G_u}\right)\frac{d^2w}{dx^2} + \left(\frac{G_LG_u}{c}\right)\frac{d^4w}{dx^4} \tag{2.107}$$

Οι εξισώσεις (2.105) και (2.107) είναι όμοιες με μόνη διαφορά τις σταθερές που υπεισέρχονται σ' αυτές. Επομένως η εξίσωση (2.105) αντιστοιχεί στο μηχανικό προσομοίωμα του σχήματος (2.22α).

Ομοίως μπορεί να αποδειχθεί ότι τα μηχανικά προσομοιώματα των σχημάτων (2.22β) και (2.22γ) περιγράφονται από τις παρακάτω εξισώσεις αντιστοίχως:

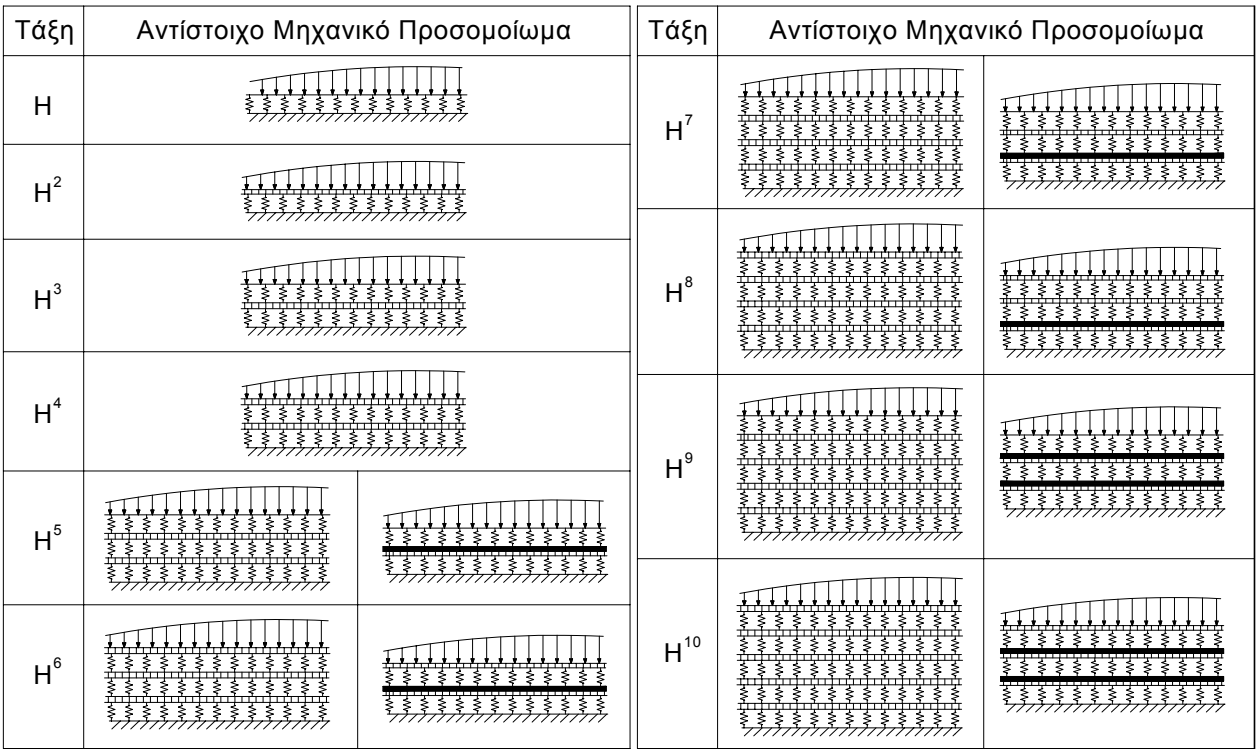
$$\left(1+\frac{k}{c}+\frac{k}{s}\right)p-\left[\frac{G_L}{c}+\frac{G_L+[(1+k)/c]G_u}{s}\right]\frac{d^2p}{dx^2}+\left(\frac{G_LG_u}{cs}\right)\frac{d^4p}{dx^4}=kw-\left[G_L+\left(1+\frac{k}{c}\right)G_u\right]\frac{d^2w}{dx^2}+\left(\frac{G_LG_u}{c}\right)\frac{d^4w}{dx^4} \quad (2.108\alpha)$$

$$\left(1+\frac{k}{c}\right)p-\left(\frac{G}{c}\right)\frac{d^2p}{dx^2}+\left(\frac{D}{c}\right)\frac{d^4p}{dx^4}=kw-G\frac{d^2w}{dx^2}+D\frac{d^4w}{dx^4} \quad (2.108\beta)$$



Σχήμα 2.22. Μηχανικά προσομοιώματα ανωτέρας τάξης.

Οι εξισώσεις (2.108α) και (2.108β) αλλά και η (2.106) των Kerr – Rhines είναι της ίδιας μορφής. Αυτό σημαίνει ότι τα προσομοιώματα μεγαλύτερης τάξης των Kerr – Rhines δεν αντιστοιχούν μονοσήμαντα σε ένα, αλλά σε δυο ισοδύναμα – όσον αφορά τις εξισώσεις που τα διέπουν – μηχανικά προσομοιώματα. Τα συμπεράσματα που βγαίνουν από τα παραπάνω εκτεθέντα, παραθέτονται εποπτικά στο Σχήμα 2.23.



Σχήμα 2.23. Η αντιστοίχιση εξισώσεων των προσομοιωμάτων των Kerr – Rhines σε μηχανικά προσομοιώματα.

Κλείνοντας την παρουσίαση των προσομοιωμάτων που αναπτύσσονται με φορμαλιστικές μεθόδους, αξίζει να γίνει μια αναφορά στα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν από τη μελέτη των μεθόδων αυτών:

- Όλες οι μέθοδοι συγκλίνουν στο γεγονός ότι η πρώτη προσέγγιση που μπορεί να γίνει για την προσομοίωση του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου είναι η προσομοίωση μέσω μιας στρώσης γραμμικών ελατηρίων ανεξάρτητων μεταξύ τους. Το προσομοίωμα, αυτό ως γνωστόν, αποτελεί το ευρέως διαδεδομένο προσομοίωμα του Winkler.
- Τα προσομοιώματα των δυο παραμέτρων αποτελούν την αμέσως πιο ακριβή προσέγγιση στο πρόβλημα μετά το προσομοίωμα του Winkler, ειδικά από μαθηματικής άποψης.
- Οι φορμαλιστικές μέθοδοι μπορούν να διακριθούν σε δυο γενικές κατηγορίες όσον αφορά την γενική μορφή των εξισώσεων στις οποίες στηρίζονται:
  1. Η πρώτη κατηγορία μεθόδων αποτελείται από τις μεθόδους των Ratzersdorfer, Favre, Hermann – Fletcher και Levinson – Bharatha. Όλες αυτές οι μέθοδοι ξεκινούν από την a priori υπόθεση ότι οι κατακόρυφες μετακινήσεις της επιφάνειας του εδάφους, συνδέονται με τις κατακόρυφες εξωτερικές δυνάμεις μέσω μιας σχέσης του τύπου:

$$p(x) = f(w, \frac{dw}{dx}, \frac{d^2w}{dx^2}, \frac{d^3w}{dx^3}, ...) \qquad (2.109\alpha)$$

  2. Η δεύτερη κατηγορία μεθόδων χαρακτηρίζεται από την μέθοδο των Kerr – Rhines, η οποία ξεκινά από τη θεώρηση ελαστικού υποστρώματος πάχους H υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης και από την παραδοχή ότι η σχέση μεταξύ δυνάμεων και μετακινήσεων στην επιφάνεια του εδάφους, έχει την γενική μορφή:

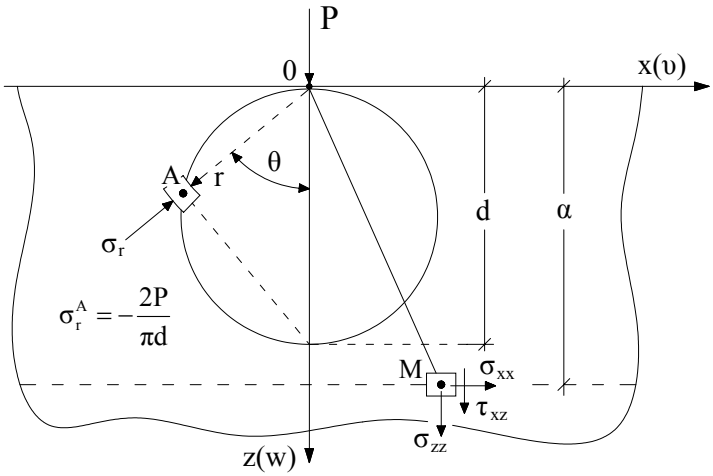
$$p(x) = f(w, \frac{dw}{dx}, \frac{d^2w}{dx^2}, \frac{d^3w}{dx^3}, ...p, \frac{dp}{dx}, \frac{d^2p}{dx^2}, \frac{d^3p}{dx^3}, ...) \qquad (2.109\beta)$$

- Το ζητούμενο για όλες τις φορμαλιστικές μεθόδους ανάπτυξης προσομοιωμάτων είναι η απόδειξη σύγκλισης τους προς την ακριβή λύση (την οποία στα πλαίσια της παραδοχής ελαστικής συμπεριφοράς, αντιπροσωπεύουν οι εξισώσεις της τρισδιάστατης ή της δισδιάστατης ελαστικότητας) όσο αυξάνει ο αριθμός των όρων που λαμβάνονται υπόψη στις γενικές εξισώσεις τους. Αν και μια τέτοια απόδειξη δεν έχει παρουσιαστεί παρά μόνον θεωρητικά (Kerr (1985)), το γεγονός ότι όλες οι μέθοδοι οδηγούν στην μαθηματική τεκμηρίωση των προσομοιωμάτων των Winkler, Pasternak κ.τ.λ. από διαφορετική σκοπιά, αποτελεί ένα σημείο ιδιαίτερου ενδιαφέροντος και αξίας.

2.2.4. Προσομοιώματα συνεχούς ελαστικού μέσου

Η προσομοίωση του εδάφους ως συνεχούς ελαστικού μέσου αποτελεί τον πιο ακριβή τρόπο προσομοίωσής του μέσα στα πλαίσια της παραδοχής ελαστικής συμπεριφοράς. Η θεώρηση του συνεχούς ελαστικού μέσου μπορεί να διακριθεί στη θεώρηση του ομογενούς ισότροπου ή ανισότροπου (κυρίως ορθότροπου) και στη θεώρηση του μη ομογενούς μέσου. Πέραν της παραπάνω διάκρισης, το πρόβλημα του συνεχούς ελαστικού μέσου διακρίνεται σε προβλήματα του ελαστικού ημιεπιπέδου (επίπεδα προβλήματα) και σε προβλήματα του ελαστικού ημιχώρου (χωρικά προβλήματα).

Τα προσομοιώματα του ελαστικού ημιεπιπέδου εκφράζονται μαθηματικώς από τις εξισώσεις της επίπεδης ελαστικότητας (επίπεδη ένταση ή επίπεδη παραμόρφωση) και έχουν ως βάση, τη λύση του Flamant (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε Timoshenko και Goodier (1970) σελ. 85). Η λύση του προβλήματος από τον Flamant αφορά τον υπολογισμό των τάσεων και των μετακινήσεων στο εσωτερικό και την επιφάνεια ελαστικού ημιεπιπέδου, φορτιζόμενου στην επιφάνεια του από κατακόρυφο μοναχικό φορτίο (Σχήμα 2.24). Με βάση την λύση αυτή καθίσταται δυνατή η επίλυση για κάθε μορφής κατακόρυφη φόρτιση με κατάλληλες ολοκληρώσεις (π.χ. Poulos και Davis (1974)).



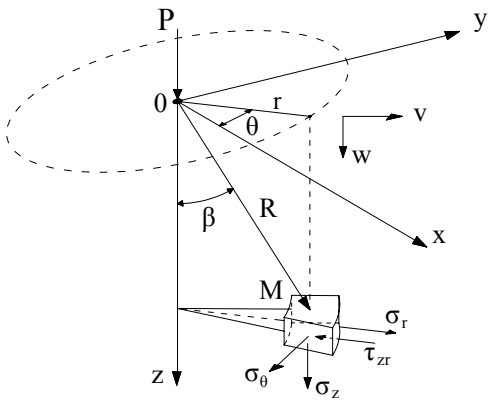
Τανυστής τάσης	
$\sigma_r = -\left(\frac{2P}{\pi}\right)\frac{\cos\theta}{r}$	$\sigma_{xx} = -\left(\frac{2P}{\pi\alpha}\right)\cos^4\theta$
$\sigma_\theta = 0$	$\sigma_{zz} = -\left(\frac{2P}{\pi\alpha}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta$
$\tau_{r\theta} = 0$	$\tau_{xz} = -\left(\frac{2P}{\pi\alpha}\right)\sin\theta\cos^3\theta$

Μετακινήσεις ελεύθερης επιφάνειας
$w_{z=0} = \left(\frac{2P}{\pi E}\right)\ln\left(\frac{d}{x}\right) - \frac{(1+\nu)P}{\pi E}$
$\upsilon_{z=0} = -\frac{(1-\nu)P}{2E}$

Σχήμα 2.24. Το πρόβλημα του Flamant.

Τα προσομοιώματα του ελαστικού ημιχώρου στηρίζονται στις γενικές εξισώσεις της τρισδιάστατης ελαστικότητας. Θεμελιώδη λύση για τα προβλήματα αυτά αποτελεί η λύση του Boussinesq (1885) για το πρόβλημα του ελαστικού ημιχώρου, ο οποίος φορτίζεται στην επιφάνεια του από κατακόρυφη μοναχική δύναμη (Σχήμα 2.25). Από την επίλυση του θεμελιώδους αυτού προβλήματος προκύπτουν οι λύσεις για διαφόρους τύπους κατανεμημένης κατακόρυφης φόρτισης σε οποιασδήποτε μορφής περιοχή της επιφάνειας του εδάφους. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται τεχνικές ολοκληρωτικών μετασχηματισμών (Selvadurai (1979)) ή η μέθοδος της επαλληλίας (Τσότσος (1991) σελ. 129). Η λύση του Boussinesq χρησιμοποιείται κυρίως σε προβλήματα πλακών ή δοκών πεπερασμένων διαστάσεων διότι στις περιπτώσεις αυτές η παραδοχή επίπεδης συμπεριφοράς δεν είναι ρεαλιστική.

Η θεώρηση του συνεχούς ελαστικού μέσου (ομογενούς ή όχι) δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε περιπτώσεις κατά τις οποίες το έδαφος συνίσταται από στρώσεις διαφορετικών υλικών πεπερασμένου πάχους. Στις περιπτώσεις αυτές θα πρέπει να γίνει εφαρμογή μεθόδων που αφορούν τα «πολυστρωματικά» ελαστικά συστήματα. Τα συστήματα αυτά διακρίνονται σε ελαστικά μέσα μιας στρώσης πεπερασμένου πάχους επί ακλόνητου υποβάθρου, σε ελαστικά μέσα μιας στρώσης πεπερασμένου πάχους επί ελαστικού ημιχώρου καθώς και σε ελαστικά μέσα πολλών στρώσεων. Για τις παραπάνω περιπτώσεις υπάρχουν διάφορες προσεγγιστικές λύσεις οι οποίες είναι διαθέσιμες στη βιβλιογραφία (π.χ. Burmister (1945), Lemcoe (1960), Poulos (1967)). Θα πρέπει να τονιστεί, ότι η λύση του προβλήματος του ελαστικού στρώματος πεπερασμένου πάχους επί ακλόνητου υποβάθρου παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς αποτελεί ένα άμεσο μέτρο σύγκρισης για τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του προσομοιώματος του Vlasov, το οποίο επίσης αναφέρεται σε αντίστοιχο πρόβλημα (Παράγραφος 2.2.2.5).



Τανυστής τάσης
$\sigma_r = \frac{P}{2\pi R^2}\left[-\frac{3r^2 z}{R^3} + \frac{(1-2\nu)R}{R+z}\right]$
$\sigma_\theta = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi R^2}\left[\frac{z}{R} - \frac{R}{R+z}\right]$
$\sigma_z = \frac{3Pz^3}{2\pi R^5} \qquad \tau_{rz} = -\frac{3Prz^2}{2\pi R^5}$

Μετακινήσεις ελεύθερης επιφάνειας
$v = \frac{P}{4\pi GR}\left[\frac{rz}{R^2} - \frac{(1-2\nu)r}{R+z}\right]$
$w = \frac{P}{4\pi GR}\left[2(1-\nu) + \frac{z^2}{R^2}\right]$

Σχήμα 2.25. Το πρόβλημα του Boussinesq.

Αν και είναι η πιο ακριβής μέθοδος, η προσομοίωση του εδάφους ως συνεχούς ελαστικού μέσου έχει το μειονέκτημα ότι είναι ένα ιδιαίτερα πολύπλοκο μαθηματικό πρόβλημα. Το γεγονός αυτό καθιστά προβληματική την χρήση του σε συνήθεις εφαρμογές, αν μάλιστα προστεθεί και το γεγονός της δυνατότητας χρήσης της ευρέως πλέον διαδεδομένης και εξαιρετικά ακριβούς μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων. Επιπλέον, το γεγονός ότι σε πραγματικές συνθήκες το έδαφος δεν συμπεριφέρεται ως ελαστικό μέσο καθιστά μη συμφέρουσα την χρήση μιας πολύπλοκης μαθηματικής μεθόδου, η οποία μάλιστα ξεκινά από παραδοχές που δεν ανταποκρίνονται πλήρως στην πραγματικότητα. Ωστόσο, πέραν των παραπάνω αρνητικών σημείων, η θεώρηση του εδάφους ως συνεχούς ελαστικού μέσου συνιστά μια αξιόπιστη λύση αναφοράς για τη σύγκριση των διαφόρων προσομοιωμάτων (μιας, δυο ή τριών παραμέτρων), των οποίων οι εξισώσεις στηρίζονται στην παραδοχή της ελαστικής συμπεριφοράς. Επιπλέον, η επίλυση του προβλήματος του συνεχούς ελαστικού μέσου απαιτεί την γνώση-προσδιορισμό των σταθερών E, ν για τις οποίες, σε αντίθεση με τις σταθερές που εισάγουν τα απλοποιημένα προσομοιώματα, υπάρχουν πολλά διαθέσιμα στοιχεία από εργαστηριακές και επί τόπου μετρήσεις (βλέπε π.χ. Bowles (1988)). Η τελευταία παρατήρηση

δίνει τη δυνατότητα συσχέτισης των κλασικών ελαστικών σταθερών E, ν με τις σταθερές των απλοποιημένων προσομοιωμάτων (π.χ. με το δείκτη εδάφους του Winkler). Αυτό επιτυγχάνεται με την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος τόσο με την μέθοδο του συνεχούς ελαστικού μέσου όσο και με κάποιο συγκεκριμένο προσομοίωμα και την σύγκριση των αποτελεσμάτων (Biot (1937) και Vesic (1961)). Περισσότερες λεπτομέρειες για θέμα αυτό δίνονται στην Παράγραφο 2.4.2.

2.2.5. Προσομοιώματα με χρήση επιφανειακών και χωρικών πεπερασμένων στοιχείων

Η προσομοίωση του ελαστικού υποβάθρου με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων προσεγγίζει το πρόβλημα του συνεχούς μέσου με έναν πεπερασμένο αριθμό στοιχείων (πεπερασμένα στοιχεία) στα οποία προσδίδονται οι ιδιότητες του μέσου και τα οποία συνδέονται μεταξύ τους σε διακριτά σημεία (κόμβοι). Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μια γενικής εφαρμογής αριθμητική-προσεγγιστική μέθοδος επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, η οποία είναι κατά κανόνα αρκετά ακριβής για τις απαιτήσεις που θέτουν οι περισσότερες πρακτικές εφαρμογές. Ως μέθοδος ανήκει στην κατηγορία των ενεργειακών μεθόδων, στα πλαίσια των οποίων οι συνθήκες ισορροπίας διατυπώνονται με τη βοήθεια των μεθόδων μεταβολών, όπως π.χ. η μέθοδος Ritz (βλέπε π.χ. Νιτσιώτα (1985)), η οποία και αποτελεί και το θεωρητικό υπόβαθρο της αρχικής διατύπωσης της μεθόδου. Η εφαρμογή της είναι αλληλένδετη με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή και το γεγονός αυτό της προσδίδει μεγάλες δυνατότητες αντιμετώπισης εξαιρετικά σύνθετων προβλημάτων.

Με δεδομένες τις δυσκολίες στην πρακτική εφαρμογή των προσομοιωμάτων που στηρίζονται στις εξισώσεις του συνεχούς ελαστικού μέσου, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί την πιο ακριβή, ρεαλιστική και ταυτόχρονα εύχρηστη μέθοδο επίλυσης προβλημάτων που αφορούν, μεταξύ άλλων, και την έδραση δοκών ή πλακών επί ελαστικού υποβάθρου. Επομένως, οι λύσεις που προκύπτουν από τη χρήση της μεθόδου μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως λύσεις αναφοράς για την αξιολόγηση της ακρίβειας και της αξιοπιστίας άλλων προσομοιωμάτων, όπως αυτά που παρουσιάστηκαν στις πρώτες παραγράφους του παρόντος κεφαλαίου.

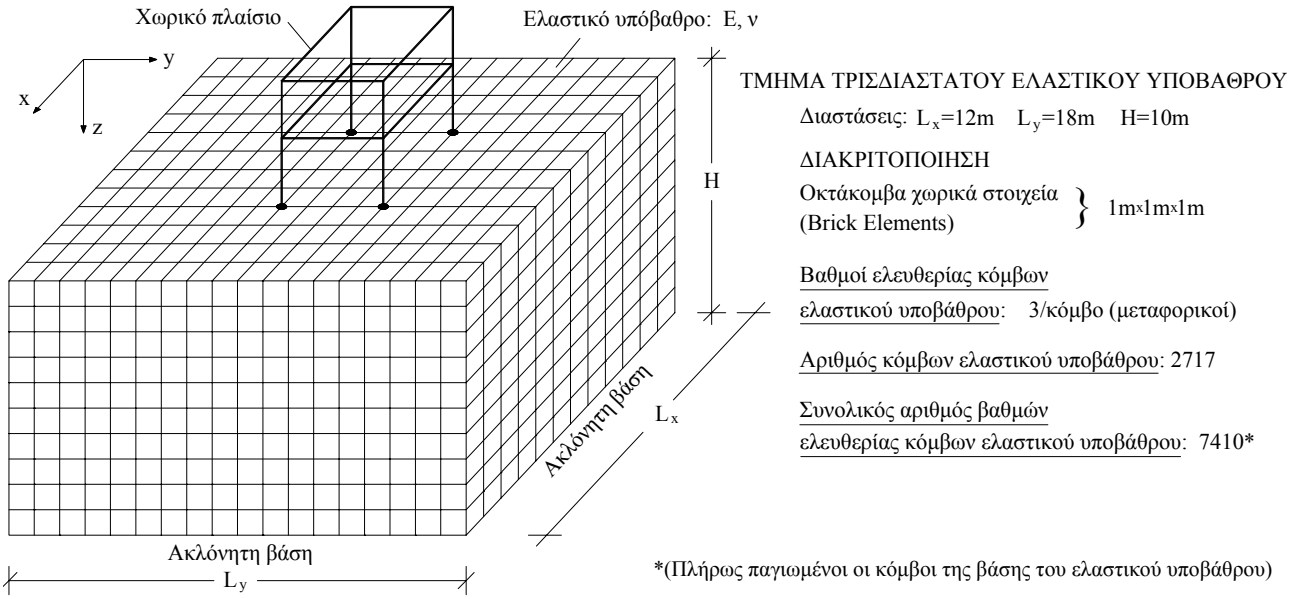
Τα πλεονεκτήματα της μεθόδου, που την καθιστούν την πλέον κατάλληλη για την αντιμετώπιση σχεδόν όλων των προβλημάτων που εντάσσονται στο γνωστικό αντικείμενο της ανάλυσης των κατασκευών και ειδικότερα στα προβλήματα δοκών και πλακών επί ελαστικού υποβάθρου, μπορούν να συνοψιστούν στα εξής:

- η αξιοπιστία της μεθόδου,
- η ευελιξία της μεθόδου, δηλαδή η δυνατότητα προσομοίωσης σύνθετων κατασκευών με πολύπλοκη γεωμετρία,
- η ευκολία προγραμματιστικής υλοποίησης, που στηρίζεται στην μητρωική διατύπωση, και η ύπαρξη μεγάλου αριθμού σχετικών προγραμμάτων,
- η ύπαρξη στη βιβλιογραφία μεγάλου αριθμού επιφανειακών και χωρικών στοιχείων,
- η δυνατότητα προσομοίωσης τόσο ισότροπων όσο και ανισότροπων και μη ομογενών ελαστικών μέσων
- η δυνατότητα αντιμετώπισης γραμμικών και μη γραμμικών προβλημάτων.

Επικεντρώνοντας την προσοχή στα προβλήματα δοκών και πλακών επί ελαστικού υποβάθρου, θα πρέπει να γίνει η βασική διάκριση μεταξύ δυο βασικών κατηγοριών ανάλυσης:

1. Στα πλαίσια της πρώτης κατηγορίας, οι δοκοί ή οι πλάκες διακριτοποιούνται με τη βοήθεια πεπερασμένων στοιχείων μιας ή δυο διαστάσεων αναλόγων του τύπου του προβλήματος, ενώ η συμπεριφορά του εδάφους προσομοιώνεται με τη βοήθεια ενός από τα προσομοιώματα που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους του παρόντος κεφαλαίου (ακόμα και με τις εξισώσεις του συνεχούς ελαστικού ημιχώρου του Boussinesq: βλέπε π.χ. Cheung και Zienkiewicz (1965) ή Cheung και Nag (1968)). Αυτή η κατηγορία αναλύσεων χρησιμοποιείται περισσότερο σε κοινές πρακτικές εφαρμογές εξαιτίας κυρίως της ευκολίας με την οποία επιτυγχάνεται η εισαγωγή της γεωμετρίας και γενικότερα των δεδομένων του προβλήματος. Επιπλέον, η κατηγορία αυτή αποτελεί το αντικείμενο της συντριπτικής πλειοψηφίας των εργασιών και εφαρμογών που αφορούν το πρόβλημα της έδρασης δοκών ή πλακών επί ελαστικού υποβάθρου (βλέπε Selvadurai (1979)).

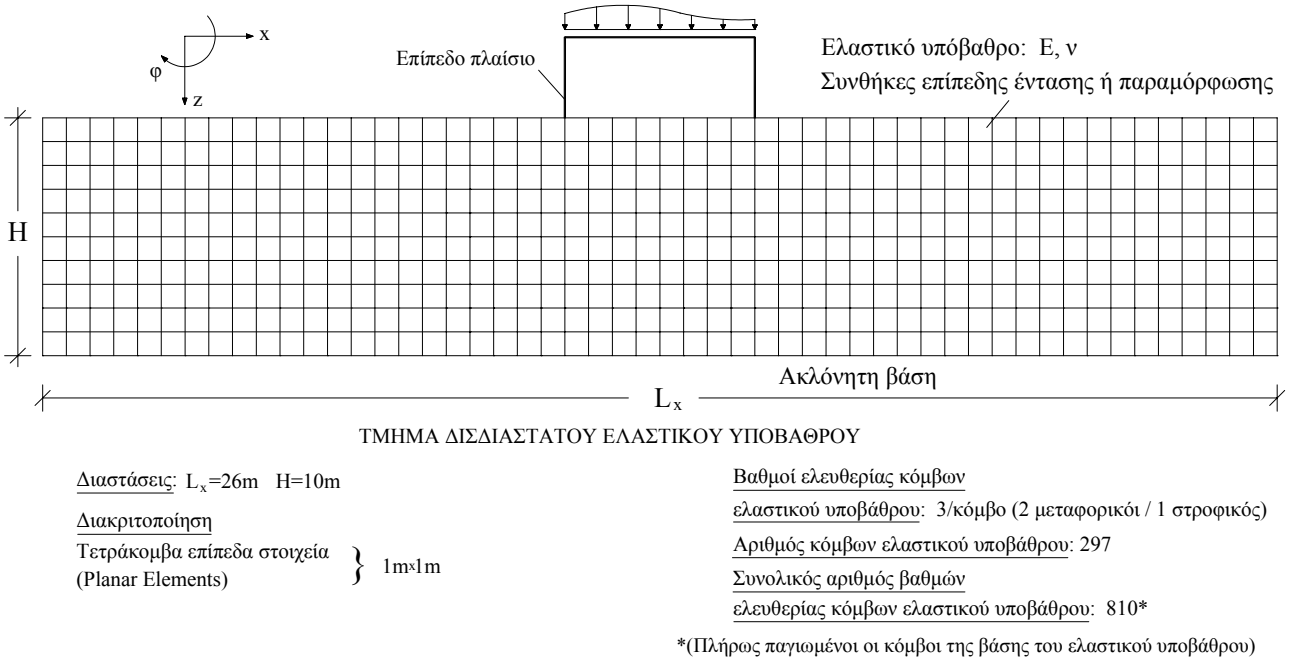
2. Στα πλαίσια της δεύτερης κατηγορίας αναλύσεων – η οποία αποτελεί το αντικείμενο της παρούσας παραγράφου – τόσο η συμπεριφορά των δοκών ή των πλακών όσο και η συμπεριφορά του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου προσομοιώνονται με τη βοήθεια καταλλήλων πεπερασμένων στοιχείων. Επομένως, ως συνεχές – τουλάχιστον μακροσκοπικά – μέσο τριών διαστάσεων το έδαφος θα πρέπει να προσομοιωθεί με τη βοήθεια χωρικών πεπερασμένων στοιχείων ή με τη βοήθεια επιφανειακών, όταν η φύση του προς επίλυση προβλήματος το επιτρέπει (προβλήματα επίπεδης έντασης ή παραμόρφωσης). Τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας αναλύσεων εστιάζονται κυρίως στην περίπτωση προσομοίωσης του υποβάθρου με τρισδιάστατα – χωρικά στοιχεία. Στην περίπτωση αυτή αυξάνει πολύ ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας του συστήματος κατασκευή – ελαστικό υπόστρωμα, με αποτέλεσμα την αύξηση και των προς επίλυση εξισώσεων (βλέπε ενδεικτικά Σχήμα 2.26).



Σχήμα 2.26. Ενδεικτικό παράδειγμα προσομοίωσης χωρικού πλαισίου επί τρισδιάστατου ελαστικού υποβάθρου.

Παρά το γεγονός ότι με τις σύγχρονες δυνατότητες των ηλεκτρονικών υπολογιστών είναι εφικτή η επίλυση συστημάτων με χιλιάδες εξισώσεις, μια τέτοια επίλυση δεν παύει να είναι δύσκολη και χρονοβόρα, (Vallabhan και Das (1991α)), καθώς στον καθαρό χρόνο επίλυσης θα πρέπει να προστεθεί και ο χρόνος προετοιμασίας του προσομοιώματος και επεξεργασίας των αποτελεσμάτων. Η διαδικασία αυτή θα μπορούσε να δικαιολογηθεί μόνο σε εξαιρετικές περιπτώσεις, στις οποίες μάλιστα θα πρέπει να γίνει χρήση ειδικών προγραμμάτων – αυτομάτων γεννητριών τρισδιάστατων κανάβων (π.χ. Τσαμασφύρος (1994), σελ. 135). Θα πρέπει πάντως να τονιστεί, ότι αποτελέσματα από την χρήση χωρικών προσομοιωμάτων είναι διαθέσιμα στην βιβλιογραφία (π.χ. Kolar και Nemec (1989)), χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η χρήση τους έχει επικρατήσει στην καθημερινή πρακτική του μηχανικού.

Η αντίστοιχη περίπτωση επίλυσης με επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία δεν προκαλεί παρομοίου μεγέθους προβλήματα, καθώς ακόμα και στην περίπτωση διακριτοποίησης μεγάλων επιφανειών δεν αυξάνει υπερβολικά ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας του συστήματος (Βλέπε ενδεικτικά Σχήμα 2.27).



Σχήμα 2.27. Ενδεικτικό παράδειγμα προσομοίωσης επίπεδου πλαισίου επί ελαστικού υποβάθρου δυο διαστάσεων.

(Πρέπει να τονιστεί μάλιστα, ότι στα παραπάνω σχήματα οι αριθμοί των βαθμών ελευθερίας υπολογίστηκαν με βάση κανάβους στους οποίους δεν πραγματοποιήθηκαν πυκνώσεις – ως είθισται – στις περιοχές πλησίον των πλαισίων. Μια τέτοια πύκνωση είναι συνήθως απαραίτητη και προκαλεί ακόμα μεγαλύτερη αύξηση του αριθμού των βαθμών ελευθερίας ειδικά στο τρισδιάστατο πρόβλημα).

Ένα ακόμα πρόβλημα που ανακύπτει από τη χρήση προσομοιωμάτων με χωρικά αλλά και επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία είναι η επιλογή των διαστάσεων του τμήματος του εδάφους που θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη στις αναλύσεις. Το πρόβλημα αυτό είναι μεγαλύτερο στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο δεν συνίσταται από μια ελαστική στρώση πεπερασμένου πάχους – όπως οι περιπτώσεις των Σχημάτων 2.26 και 2.27 – αλλά είναι «ημιάπειρο» μέσο. Για περιπτώσεις κατακόρυφης στατικής ή σεισμικής – με οριζόντια ψευδο-στατικά φορτία – φόρτισης το μέγεθος του εδαφικού όγκου που θα πρέπει

να ληφθεί υπόψη μπορεί να προκύψει από μια σειρά δοκιμαστικών επιλύσεων. Κατά τις επιλύσεις αυτές ελέγχονται διαδοχικά προσομοιώματα στα οποία αυξάνεται συνεχώς το εύρος του εδαφικού όγκου που λαμβάνεται υπόψη. Όταν αποδειχθεί από έναν έλεγχο μετακινήσεων ότι η περαιτέρω αύξηση των διαστάσεων του κανάβου δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα, τότε η επαναληπτική αυτή διαδικασία σταματά (Μορφίδης και Αβραμίδης (2002)). Αντίθετα, στην περίπτωση κατά την οποία μελετάται το πρόβλημα της δυναμικής αλληλεπίδρασης εδάφους – κατασκευής, τότε η εισαγωγή της φόρτισης στην κατασκευή πραγματοποιείται υπό μορφή κυμάτων. Στις περιπτώσεις αυτές τίθεται το πρόβλημα της μελέτης διάδοσης κυμάτων εντός ημιάπειρου συνεχούς ελαστικού ή όχι μέσου. Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών είναι διαθέσιμες στη βιβλιογραφία ειδικές τεχνικές που εντάσσονται μέσα στα πλαίσια της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων. Πέραν αυτών των τεχνικών μπορεί να γίνει χρήση και της «μεθόδου απείρου στοιχείου» (infinite element method), η οποία είναι εξειδικευμένη στην αντιμετώπιση τέτοιου τύπου προβλημάτων (βλέπε π.χ. Bettess (1980), Beer και Meek (1981)).

Ένα ακόμα θέμα που εισάγει η χρήση των επιφανειακών και χωρικών προσομοιωμάτων για την προσομοίωση του εδάφους είναι η απαίτηση – σε ορισμένες περιπτώσεις – χρήσης ειδικών στοιχείων διασύνδεσης (interface elements), τα οποία θα πρέπει να παρεμβάλλονται μεταξύ των πεπερασμένων στοιχείων που προσομοιώνουν το έδαφος και των πεπερασμένων στοιχείων των δοκών, όταν τα στοιχεία αυτά είναι ασύμβατα λόγω των διαφορετικών βαθμών ελευθερίας που έχουν (βλέπε π.χ. Liao (1995)). Μια τέτοια περίπτωση μπορεί να προκύψει, π.χ., όταν επιλύεται το πρόβλημα κάμψης δοκού επί ελαστικού υποβάθρου που προσομοιώνεται με επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία επίπεδης έντασης ή παραμόρφωσης. Στην περίπτωση αυτή, τα στοιχεία δοκού έχουν ένα μεταφορικό και ένα στροφικό βαθμό ελευθερίας, ενώ τα δισδιάστατα στοιχεία επίπεδης έντασης δυο μεταφορικούς. Για την περίπτωση αυτή έχουν αναπτυχθεί ειδικά ισοπαραμετρικά στοιχεία για την αντιμετώπιση του προβλήματος (βλέπε π.χ. Viladkar et al (1994) και Babie, Salmon (1996), (1997)).

Σε γενικές γραμμές και κλείνοντας την αναφορά στα προσομοιώματα χωρικών πεπερασμένων στοιχείων, θα πρέπει να τονιστεί ότι δεν μπορούν να κατηγοριοποιηθούν αυστηρά οι περιπτώσεις κατά τις οποίες είναι αποδοτική ή απαραίτητη η χρήση τους. Ταυτόχρονα, τα οφέλη μιας τέτοιας ανάλυσης δεν είναι προφανή και ανάλογα της πολυπλοκότητας της ανάλυσης ειδικά στις συνήθεις εφαρμογές. Επιπλέον, δεν είναι διαδεδομένα στην πράξη εξειδικευμένα προγράμματα για τέτοιου είδους αναλύσεις και επομένως οι όποιες εφαρμογές περιορίζονται αποκλειστικά σε αναλύσεις ειδικών έργων. Ειδικότερα όμως για την περίπτωση χρήσης επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων, μπορεί να θεωρηθεί ότι η χρήση τους είναι πιο εύκολα εφαρμόσιμη καθώς τα αντίστοιχα υπολογιστικά εργαλεία είναι πιο διαδεδομένα και για τις πρακτικές εφαρμογές. Η χρήση τους μάλιστα είναι και πιθανώς επιβεβλημένη όταν:

- η μελετούμενη θεμελίωση έχει πολύπλοκη γεωμετρία,
- η ύπαρξη γειτονικών κατασκευών ή γεωκατασκευών επηρεάζει την μελετούμενη θεμελίωση (π.χ. όταν πλησίον της θεμελίωσης υπάρχει κάποιος τοίχος αντιστήριξης γαιών),
- το ελαστικό υπόβαθρο έχει πολύπλοκο επιφανειακό προφίλ, και
- το ελαστικό υπόβαθρο αποτελείται από διάφορες στρώσεις πολύπλοκης γεωμετρίας.

2.2.6. Άλλες προσεγγίσεις του προβλήματος

Στις προηγούμενες παραγράφους έγινε μια αναλυτική παρουσίαση των προσομοιωμάτων της συμπεριφοράς του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου, όπως έχουν καταγραφεί σε μια σειρά από βιβλιογραφικές πηγές μετά την πρώτη προσέγγιση του προβλήματος από τους Winkler και Zimmermann. Πέραν των προσομοιωμάτων αυτών είναι επίσης γνωστά και άλλα προσομοιώματα, τα οποία όμως δεν έχουν γίνει ευρύτερα γνωστά. Πρόκειται στην ουσία για υποθέσεις, οι οποίες ενώ δεν ξεφεύγουν από τις βασικές αρχές στις οποίες στηρίζονται και τα παραπάνω προσομοιώματα, θα παρουσιαστούν κυρίως για λόγους πληρότητας.

- Η υπόθεση του Loof: Η υπόθεση του Loof (1965) στηρίζεται στη βασική παραδοχή των προσομοιωμάτων δύο παραμέτρων, τα οποία ξεκινούν από θεώρηση διασύνδεσης μεταξύ των μεταφορικών ελατηρίων της υπόθεσης του Winkler, και καταλήγει σε μαθηματική διατύπωση ανάλογη των σχέσεων (2.4β), (2.8β), (2.13) και (2.25). Πιο συγκεκριμένα, το μηχανικό προσομοίωμα του Loof είναι παρόμοιας «σύλληψης» με το αντίστοιχο μηχανικό προσομοίωμα του Pasternak (Παράγραφος 2.2.2.2), καθώς στη διατύπωση του αναφέρεται ότι η διασύνδεση μεταξύ των μεταφορικών ελατηρίων επιτυγχάνεται μέσω ειδικών στοιχείων τα οποία μεταβιβάζουν διατμητικές δυνάμεις T που δίνονται από τη σχέση: $T=A(dw/dx)$. Η σχέση αυτή είναι παρόμοια με την (2.5α), γεγονός που σημαίνει ότι και η υπόθεση του Loof ξεκινά από την υπόθεση «διατμητικής» διασύνδεσης μεταξύ των μεταφορικών ελατηρίων. Η υπόθεση του Loof μπορεί να επεκταθεί και σε τρισδιάστατα προβλήματα, οπότε προκύπτει μαθηματική διατύπωση ανάλογη των (2.4α) και (2.8α).

- Το ανάλογο της εφελκυόμενης ράβδου: Το ανάλογο της εφελκυόμενης ράβδου (beam – column analogy) προτάθηκε από τον Horvarth (1993). Δεν πρόκειται για μια διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος, αλλά για μαθηματική διαπίστωση που στηρίζεται στο προσομοίωμα των Filonenko – Borodich (Παράγραφος 2.2.2.1). Πρόκειται για την μελέτη της διαφορικής εξίσωσης που διέπει το πρόβλημα της κάμψης εφελκυόμενης δοκού Euler επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Winkler στα πλαίσια της θεωρίας δεύτερης τάξης. Η συγκεκριμένη εξίσωση είναι όμοια με την εξίσωση που διέπει το πρόβλημα της κάμψης δοκού Euler επί του ελαστικού υποβάθρου των Filonenko – Borodich. Η ομοιότητα αυτή οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η μελέτη της κάμψης των δοκών επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων μπορεί να γίνει με την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης που διέπει την κάμψη δοκού επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Winkler στα πλαίσια της θεωρίας δεύτερης τάξης. Αυτό επιτυγχάνεται προσθέτοντας στην πραγματική αξονική δύναμη που καταπονεί τη δοκό μια ιδεατή σταθερή εφελκυστική δύναμη, το μέγεθος της οποίας εξαρτάται από τα ελαστικά χαρακτηριστικά του εδάφους.

- Απλοποιημένο συνεχές ελαστικό μέσο δυο παραμέτρων: Η έννοια του απλοποιημένου συνεχούς μέσου δυο παραμέτρων οφείλεται στους Kerr και Rhines (1967). Πρόκειται για την κατάστρωση της διαφορικής εξίσωσης του προσομοιώματος του Pasternak ξεκινώντας όχι από τη θεώρηση του μηχανικού προσομοιώματος του σχήματος (2.5), αλλά από τις γενικές εξισώσεις του τρισδιάστατου ελαστικού μέσου

πεπερασμένου πάχους. Επομένως πρόκειται για μια διαφορετική προσέγγιση της γνωστής έννοιας του ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων μέσα στα πλαίσια της δεύτερης κατηγορίας μεθόδων ανάπτυξης ελαστικών προσομοιωμάτων (Παράγραφος 2.2.2). Η διαφοροποίηση αυτής της προσέγγισης συνίσταται κυρίως στο γεγονός ότι με την προτεινόμενη από τον Kerr διαδικασία επιτυγχάνεται ταυτόχρονα με την κατάστρωση της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος και η συσχέτιση των δυο παραμέτρων του με τις ελαστικές σταθερές του υποβάθρου E, ν. Πάντως, ενώ η εγκυρότητα της μεθόδου όσον αφορά την εξίσωση στην οποία καταλήγει είναι δεδομένη, η συσχέτιση των παραμέτρων του προσομοιώματος με τις ελαστικές σταθερές E, ν είναι αμφιβόλου αξιοπιστίας και επιδέχεται κριτικής (Kerr (1965)).

2.2.7. Γενικές παρατηρήσεις και συγκρίσεις μεταξύ των προσομοιωμάτων

Στην παράγραφο αυτή θα γίνει μια σύνοψη των ιδιοτήτων των προσομοιωμάτων που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους. Παράλληλα, θα γίνει η κατάταξη με βάση την μαθηματική τους διατύπωση καθώς και με βάση την χρονολογία εμφάνισης τους στη διεθνή βιβλιογραφία. Τέλος, θα επιχειρηθεί μια συνοπτική καταγραφή των πλεονεκτημάτων και των μειονεκτημάτων τους και θα παρουσιαστούν κάποιες σχέσεις μέσω των οποίων επιτυγχάνεται η συσχέτιση ορισμένων από αυτά.

Ένα από τα βασικότερα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν από τα όσα εκτέθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους του παρόντος κεφαλαίου είναι ότι η διαδικασία προσομοίωσης της συμπεριφοράς του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου υπό κατακόρυφη φόρτιση «οριοθετείται» από δυο προσομοιώματα τα οποία αντιπροσωπεύουν το άνω και το κάτω «όριο» της ακρίβειας που μπορεί να επιτευχθεί εντός των περιορισμών της παραδοχής ομοιογενούς ελαστικής συμπεριφοράς. Πρόκειται για το προσομοίωμα του Winkler – Zimmermann, το οποίο αποτελεί την πιο χονδροειδή προσέγγιση του προβλήματος, και για το προσομοίωμα του ομογενούς ελαστικού συνεχούς μέσου το οποίο αποτελεί την ακριβέστερη δυνατή προσέγγιση. (Τα προσομοιώματα των επιφανειακών και των χωρικών πεπερασμένων στοιχείων – τα οποία επίσης παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους – αποτελούν μια μέθοδο προσεγγιστικής επίλυσης των εξισώσεων του συνεχούς ελαστικού μέσου και όχι μια ανεξάρτητη και αυτοτελή προσέγγιση του προβλήματος). Το μεταξύ των δυο αυτών προσομοιωμάτων «χάσμα ακρίβειας» γεφυρώνεται με την εισαγωγή των προσομοιωμάτων δυο ή και περισσοτέρων παραμέτρων. Στις προηγούμενες παραγράφους παρουσιάστηκαν διάφορες υποθέσεις οι οποίες οδηγούν σε τέτοιου τύπου προσομοιώματα.

Στις προηγούμενες παραγράφους έγινε και μια αναφορά σε φορμαλιστικές μεθόδους με τις οποίες επιτυγχάνεται:

- η αυστηρά μαθηματική τεκμηρίωση της δυνατότητας των προσομοιωμάτων πολλαπλών παραμέτρων να καλύπτουν το χάσμα ακρίβειας μεταξύ του προσομοιώματος του Winkler και του προσομοιώματος του συνεχούς ελαστικού μέσου, και
- η διατύπωση μαθηματικών προσομοιωμάτων με περισσότερες των τριών παραμέτρους (Σχήμα 2.23).

Πιο συγκεκριμένα, οι Kerr και Rhines (Kerr (1984)) απέδειξαν αναπτύσσοντας σε σειρές την τασική συνάρτηση – λύση του ελαστικού συνεχούς μέσου πεπερασμένου πάχους, ότι η σχέση μεταξύ κατακόρυφων

δυνάμεων και μετακινήσεων στην επιφάνεια του εδάφους έχει τη γενική μορφή της σχέσης (2.109β) (Παράγραφος 2.2.3.5). Από τη σχέση αυτή προκύπτουν οι μαθηματικές διατυπώσεις όλων των προσομοιωμάτων δυο ή τριών παραμέτρων αλλά και του προσομοιώματος του Winkler. Αυτό επιτυγχάνεται, αν στην (2.109β) διατηρηθεί συγκεκριμένος αριθμός όρων στα δυο μέλη της, όπως συνοπτικά δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 2.1. Ταξινόμηση των βασικών εδαφικών προσομοιωμάτων με βάση τη χρονολογία, τη μεθοδολογία, και τη μορφή της μαθηματικής τους διατύπωσης.

Προσομοίωμα/Υπόθεση	**Χρονολογία**	**Μέθοδος**	**Τάξεις παραγώγων κατακορύφων δυνάμεων**			**Τάξεις παραγώγων κατακορύφων μετακινήσεων**		
			0	**2**	**4**	**0**	**2**	**4**
Winkler (Zimmermann)	1867 (1888)	M/E[1]	*			*		
Wieghardt[2]	1922							
Γενικευμένο προσομοίωμα εδάφους[3]	1937	M	*			*	*	
Filonenko - Borodich	1940	M	*			*	*	
Hetenyi	1946	M	*			*		*
Hetenyi (Γενικευμένο)	1950	M	*		*	*		*
Pasternak	1954	M/E[1]	*			*	*	
Reissner	1958	E	*	*		*	*	
Vlasov (ένα ελαστικό στρώμα)	1960	E	*			*	*	
Vlasov (δυο ελαστικά στρώματα)	1960	E	*	*		*	*	
Kerr	1964	M/Φ	*	*		*	*	
Loof	1965	M	*			*	*	

Υπόμνημα

[M]: Μηχανικό προσομοίωμα

[E]: Προσομοίωμα Απλοποιημένου Ελαστικού Μέσου

[Φ]: Φορμαλιστικό Προσομοίωμα

Παρατηρήσεις

(1) Προκύπτει και με απλοποιητικές παραδοχές στις εξισώσεις του συνεχούς ελαστικού μέσου (Kerr (1985)).

(2) Ολοκληρωτικός μετασχηματισμός.

(3) Παραδοχή αλληλεπίδρασης εδάφους – κατασκευής με κατακόρυφες δυνάμεις και ροπές. Η χρονολογία που αναφέρεται αντιστοιχεί σε σχετική εργασία του Pasternak χωρίς να είναι σίγουρο ότι την πρότεινε πρώτος.

Από τον Πίνακα 2.1 προκύπτει το συμπέρασμα, ότι ο αριθμός των πραγματικά διαφορετικών μαθηματικών διατυπώσεων του προβλήματος είναι σημαντικά μικρότερος σε σχέση με τον αριθμό των υποθέσεων που κατά καιρούς έχουν γίνει. Τα προσομοιώματα που εμφανίζονται στον πίνακα αυτό μπορούν να ομαδοποιηθούν σε τρεις βασικές κατηγορίες, οι οποίες ταυτίζονται με τον αριθμό των παραμέτρων που υπεισέρχονται στις μαθηματικές διατυπώσεις τους. Διαφοροποίηση υφίσταται στην φυσική σημασία των παραμέτρων αυτών ανάλογα με την αρχική υπόθεση του προσομοιώματος. Πρέπει βέβαια να τονιστεί, ότι φυσική σημασία έχουν μόνον οι παράμετροι των προσομοιωμάτων που στηρίζονται σε μηχανικά

προσομοιώματα, αν και η σημασία αυτή δεν είναι ξεκάθαρη και άμεσα ανταποκρινόμενη στην πραγματική συμπεριφορά του εδάφους (περισσότερες λεπτομέρειες δίνονται στην Παράγραφο 2.4).

Πέραν της παραπάνω ομαδοποίησης, έχει αποδειχθεί και η περαιτέρω συσχέτιση ορισμένων από τα προσομοιώματα του Πίνακα 2.1. Πιο συγκεκριμένα, συσχέτιση υφίσταται μεταξύ των προσομοιωμάτων:

- **<u>Προσομοίωμα Kerr – Προσομοίωμα Reissner</u>** (Kerr (1965)): Όπως μπορεί να αποδειχθεί εύκολα από την σύγκριση των σχέσεων (2.46α) και (2.56), οι δυο αυτές σχέσεις ταυτίζονται, εάν στην μαθηματική διατύπωση του Kerr (2.46α) τεθούν:

$$C = 3K \tag{2.110α}$$

$$K = \frac{4}{3}\left(\frac{E_s}{H}\right) \tag{2.110β}$$

$$G = \frac{4}{9}\left(HG_s\right) \tag{2.110γ}$$

όπου στις παραπάνω σχέσεις E_s είναι το μέτρο ελαστικότητας και G_s το μέτρο διάτμησης του εδάφους και H το πάχος του ελαστικού υποστρώματος (Παράγραφος 2.2.3.2.).

- **<u>Προσομοίωμα Kerr – Προσομοίωμα Vlasov</u>** (Jones και Xenophontos (1976)): Όπως αναφέρθηκε και στην Παράγραφο 2.2.3.4, το προσομοίωμα του Vlasov με δυο ελαστικά στρώματα και το προσομοίωμα του Kerr ταυτίζονται αν γίνει συγκεκριμένη επιλογή των συναρτήσεων για το προφίλ των κατακορύφων μετακινήσεων. Η σύγκλιση μεταξύ των δυο προσομοιωμάτων επιτυγχάνεται αν θεωρηθεί ότι το ανώτερο από τα δυο στρώματα του προσομοιώματος του Vlasov πάχους h_1 (Σχήμα 2.20) είναι εξαιρετικά λεπτό και ταυτόχρονα θεωρηθεί ότι το μέτρο ελαστικότητας του E_1 είναι επίσης πολύ μικρό. Η ταυτόχρονη εκπλήρωση των δυο αυτών συνθηκών οδηγεί σύμφωνα με τη σχέση (2.67α) στην συνθήκη $t_1 \rightarrow 0$, ενώ η σταθερά k_1 αποκτά πεπερασμένη μη μηδενική τιμή. Στην ειδική αυτή περίπτωση, το άνω στρώμα του ελαστικού υποβάθρου συμπεριφέρεται όπως ακριβώς προβλέπει η υπόθεση του Winkler, ενώ το κάτω εξακολουθεί να ανταποκρίνεται στις εξισώσεις των προσομοιωμάτων δυο παραμέτρων (βλέπε σχέση 2.67β). Με βάση το σκεπτικό αυτό αποδεικνύεται, ότι τα προσομοιώματα των Kerr και Vlasov ταυτίζονται, και μάλιστα οι σταθερές του εξίσωσης του προσομοιώματος του Kerr (εξίσωση 2.46β) αποκτούν στην περίπτωση αυτή τις παρακάτω τιμές (Jones και Xenophontos (1976)):

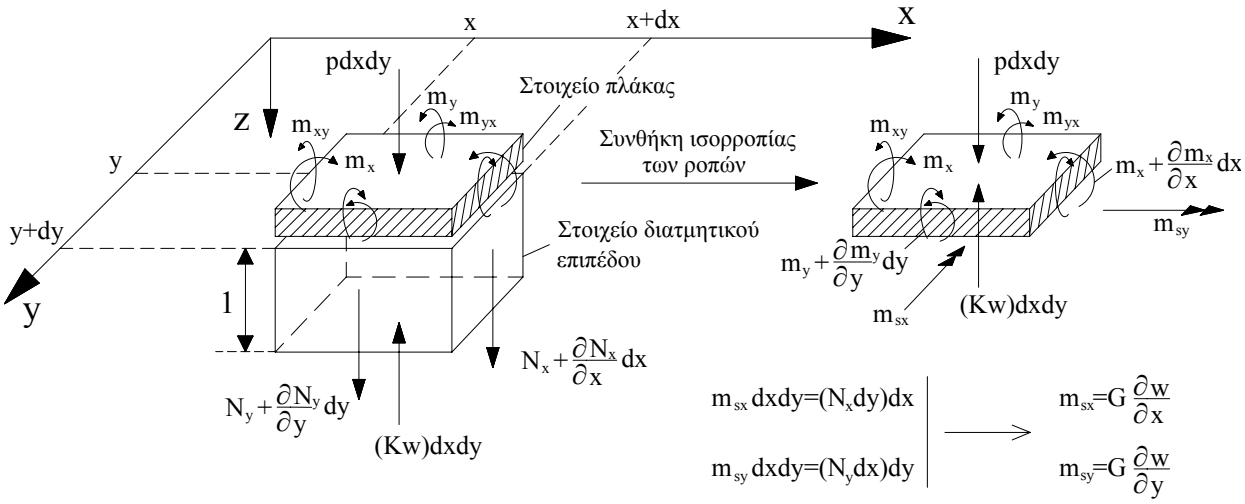
$$K = \frac{E_2 \gamma b[\sinh(\gamma h_2)\cosh(\gamma h_2) + \gamma h_2]}{2(1-\nu_2^2)\sinh^2(\gamma h_2)} \tag{2.111α}$$

$$G = \frac{E_2 b[\sinh(\gamma h_2)\cosh(\gamma h_2) - \gamma h_2]}{4\gamma(1+\nu_2)\sinh^2(\gamma h_2)} \tag{2.111β}$$

$$C = \frac{E_1 b}{h_1(1-\nu_1^2)} \tag{2.111γ}$$

Η επεξήγηση των συμβόλων που υπεισέρχονται στις παραπάνω σχέσεις δίνεται στην Παράγραφο 2.2.3.4, ενώ πρέπει επίσης να τονιστεί ότι οι σχέσεις αυτές ισχύουν για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης.

- **<u>Προσομοίωμα Pasternak – Γενικευμένο Προσομοίωμα εδάφους</u>**: (Kerr (1964)): Στην Παράγραφο 2.2.2.4 παρουσιάστηκε το γενικευμένο προσομοίωμα του εδάφους. Η προσέγγιση του προβλήματος με βάση το προσομοίωμα αυτό είναι η μοναδική (μεταξύ των υπολοίπων που παρουσιάστηκαν) που στηρίζεται στην υπόθεση ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ εδάφους και δοκού (ή πλάκας) εκδηλώνεται όχι μόνον με κατακόρυφες δυνάμεις αλλά και με ροπές. Αν και η παραδοχή αυτή είναι μια de facto παραδοχή που δεν απορρέει από την μελέτη ενός μηχανικού προσομοιώματος, ούτε από την απλοποίηση των εξισώσεων του συνεχούς ελαστικού μέσου, μπορεί να αποδειχθεί ότι τεκμηριώνεται με βάση το μηχανικό προσομοίωμα του Pasternak (Παράγραφος 2.2.2.2). Για το σκοπό αυτό θεωρείται η κατάσταση ισορροπίας ροπών του απειροστού στοιχείου πλάκας επί ελαστικού υποβάθρου Pasternak.



Σχήμα 2.28. Ισορροπία ροπών του απειροστού στοιχείου πλάκας επί ελαστικού υποβάθρου Pasternak.

Όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, εάν καταστρωθούν οι συνθήκες ισορροπίας ροπών τότε στις ροπές που δρουν επί του απειροστού στοιχείου της πλάκας θα πρέπει να προστεθούν και οι ροπές m_{sx} και m_{sy} οι οποίες προκύπτουν από τις δυνάμεις N_x και N_y του διατμητικού επιπέδου. Αν ληφθούν υπόψη οι σχέσεις (2.6α) και (2.6β) τότε προκύπτουν οι σχέσεις του σχήματος (2.28). Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι οι ροπές που μεταβιβάζονται από διατμητικό επίπεδο στην πλάκα είναι ανάλογες των αντιστοίχων κλίσεων (που ταυτίζονται με τις γωνίες στροφής $\partial w/\partial x$ και $\partial w/\partial y$). Επομένως από τη σύγκριση των σχέσεων αυτών με την (2.12γ) προκύπτει το συμπέρασμα ότι η σταθερά k_1 που υπεισέρχεται στη σχέση αυτή ταυτίζεται με τη σταθερά του διατμητικού επιπέδου G.

- **<u>Προσομοίωμα Pasternak – Προσομοίωμα Vlasov</u>** (Ting (1973α)): Όπως τονίστηκε στις παραγράφους 2.2.2.2 (εξίσωση 2.8β) και 2.2.2.5 (εξίσωση 2.25), τα δυο αυτά προσομοιώματα διέπονται από όμοιες μαθηματικές διατυπώσεις, έστω και αν βασίζονται σε διαφορετικές φιλοσοφίες σχηματισμού των διατυπώσεων αυτών. Εύκολα όμως μπορεί να αποδειχθεί ότι το μηχανικό προσομοίωμα του Pasternak, το οποίο συνίσταται από ένα σύστημα μεταφορικών ελατηρίων – διατμητικού στρώματος (Σχήμα 2.5), είναι εργικά ισοδύναμο με το ελαστικό υπόστρωμα του Vlasov, το πεδίο μετατοπίσεων του οποίου διέπεται από τις σχέσεις (2.22α) και (2.22β). Από την θεώρηση της ισότητας της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης του απειροστού τμήματος του μηχανικού προσομοιώματος του σχήματος 2.5 με την

αντίστοιχη ενέργεια του απειροστού τμήματος του ελαστικού υποβάθρου του Vlasov, προκύπτουν αφενός οι εξισώσεις (2.26α) και (2.26β) και αφετέρου η σχέση (2.8β). Επομένως με τη διαδικασία αυτή αποδεικνύεται ότι οι βασικές εξισώσεις του προσομοιώματος του Vlasov μπορούν να προκύψουν και χωρίς την πολύπλοκη διαδικασία που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 2.2.2.5, ενώ παράλληλα επιτυγχάνεται ο συσχετισμός των παραμέτρων των δυο προσομοιωμάτων (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε Ting (1973α)).

- *Σχόλια επί των προσομοιωμάτων και πεδία εφαρμογής τους*

Κλείνοντας την παρούσα παράγραφο θα γίνει μια συνοπτική αναφορά στα πλεονεκτήματα και στα μειονεκτήματα των προσομοιωμάτων καθώς και στα πεδία εφαρμογής τους.

Προσομοίωμα Winkler: Το παλαιότερο και απλούστερο προσομοίωμα κατέχει και το μεγαλύτερο μέρος της έρευνας που αφορά το πρόβλημα της συμπεριφοράς των κατασκευών επί ελαστικού υποβάθρου. Ωστόσο έχει υποστεί και πολύ μεγάλη κριτική η οποία έχει ξεκινήσει από πολύ παλαιά (Wieghardt (1922)) και έχει ως κύριο στόχο την αδυναμία του στην απόδοση των παραμορφώσεων της παράπλευρης στην φορτιζόμενη περιοχή επιφάνειας του εδάφους. Η υπόθεση του Winkler αποδεικνύεται ανεπαρκής και στον υπολογισμό των αναπτυσσομένων εντατικών μεγεθών στα άκρα δοκών και πλακών (Vlasov και Leont'ev (1960)). Στις αδυναμίες του προσομοιώματος θα πρέπει να προστεθεί και το παράδοξο που προκύπτει από την ανάλυση δοκών ή πλακών επί ελαστικού υποβάθρου με ελεύθερα άκρα και ομοιόμορφη φόρτιση: όταν η ανάλυση αυτή πραγματοποιείται με βάση το προσομοίωμα του Winkler δεν προκύπτει ένταση στη δοκό ή την πλάκα καθώς κάτω από τέτοιες συνθήκες η μαθηματική διατύπωση του προσομοιώματος οδηγεί σε κίνηση απολύτως στερεού σώματος. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού, αλλά και για να ληφθεί υπόψη έστω και προσεγγιστικά η σύζευξη των ελατηρίων η οποία οδηγεί σε πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα προτείνεται (Bowles (1988) σελ. 418, ACI Structural Journal (1988) σελ. 322) ο διπλασιασμός των τιμών των μεμονωμένων ελατηρίων στις περιοχές κοντά στα άκρα των φορέων θεμελίωσης. Εξάλλου έχει επίσης προταθεί και η τροποποίηση της υπόθεσης της σταθερής τιμής του δείκτη εδάφους, και η αντικατάσταση της με την υπόθεση του μεταβλητού δείκτη εδάφους προκειμένου να επιτευχθούν πιο αξιόπιστα αποτελέσματα (Liao (1995)).

Σύμφωνα με τον Vesic (1961) τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη χρήση του προσομοιώματος του Winkler συγκλίνουν με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του συνεχούς ελαστικού μέσου στην περίπτωση δοκών «απείρου» ή μεγάλου μήκους. Προϋπόθεση για αυτή την σύγκλιση αποτελεί η κατάλληλη επιλογή της τιμής του δείκτη εδάφους K (βάσει π.χ. των αναλυτικών μεθόδων των Biot (1937) και Vesic (1961)). Αντιθέτως για δοκούς μεσαίου μήκους (δηλαδή για τις συνήθεις δοκούς) ή για δοκούς δύσκαμπτες σε σχέση με το υπόβαθρο, η προσέγγιση των αποτελεσμάτων του προσομοιώματος του Winkler στα αποτελέσματα του συνεχούς ελαστικού μέσου είναι πολύ μικρή. Τα συμπεράσματα αυτά επιβεβαιώθηκαν και πειραματικά από τον ίδιο (Vesic και Johnson (1963)) ειδικά για την περίπτωση αργιλικών εδαφών. Πέραν τούτων πάντως, έχει αποδειχθεί ότι για την ταυτόχρονη επίτευξη ακριβούς προσέγγισης των μεγεθών έντασης και

μετακίνησης δεν αρκεί η επιλογή μιας μόνον συγκεκριμένης τιμής του δείκτη εδάφους, αλλά η επιλογή δυο ή περισσοτέρων (βλέπε Vesic και Saxena (1970)).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η παρατήρηση ότι το προσομοίωμα του Winkler αποδίδει πολύ καλά την κατανομή των αναπτυσσομένων τάσεων στη περίπτωση μελέτης φορέα θεμελίωσης σχετικά μεγάλης δυσκαμψίας εδραζόμενου επί μη συνεκτικού – αμμώδους εδάφους. Στην περίπτωση αυτή όμως επιβάλλεται η θεώρηση μεταβλητού δείκτη εδάφους, με μεγαλύτερες τιμές στο κέντρο και μικρότερες στα άκρα του στοιχείου θεμελίωσης (βλέπε π.χ. ACI Structural Journal (1988) σελ. 308, ή Selvadurai (1979) σελ. 436). Για το πρόβλημα αυτό η κατανομή που προβλέπεται από την προσομοίωση με το συνεχές ελαστικό μέσο (εξισώσεις Boussinesq) είναι τελείως εσφαλμένη (βλέπε π.χ. Βαλαλά (1991) σελ. 83). Αλλά και στην περίπτωση προβλήματος εύκαμπτου φορέα θεμελίωσης επί αμμώδους εδάφους το προσομοίωμα του Winkler μπορεί να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Αντίθετα, στην περίπτωση έδρασης επί συνεκτικού εδάφους το προσομοίωμα του Winkler κρίνεται ανεπαρκές όταν το στοιχείο θεμελίωσης είναι σχετικά δύσκαμπτο, ενώ όταν είναι σχετικά εύκαμπτο τότε η αποτελεσματικότητα του εξαρτάται από τη μορφή της φόρτισης και είναι πιο μεγάλη στην περίπτωση στοιχείων φορτιζόμενων στο κέντρο τους από τοπικά φορτία (Selvadurai (1979), σελ. 437).

Τεκμηρίωση για την ισχύ της υπόθεσης του Winkler προκύπτει από τη μελέτη για την συμπεριφορά ασυμπίεστου μη ομογενούς ελαστικού μέσου (Gibson (1967)). Πιο συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι η υπόθεση του Winkler εκπληρώνεται όταν το υπόβαθρο είναι ασυμπίεστο, έχει γραμμικά μεταβαλλόμενο σε σχέση με το βάθος μέτρο ελαστικότητας, του οποίου η τιμή στην ελεύθερη επιφάνεια είναι ίση με το μηδέν. Τονίζεται ότι εδάφη θεμελίωσης που συνίστανται από συμπιεσμένη άργιλο (consolidated clay) και φορτίζονται υπό συνθήκες σταθερού όγκου, προσεγγίζουν σε πολύ μεγάλο βαθμό τις προϋποθέσεις αυτές.

Η υπόθεση του Winkler εκτός από την εφαρμογή της σε προβλήματα έδρασης δοκών ή πλακών επί του εδάφους, δίνει αξιόπιστες λύσεις για μια σειρά από προβλήματα όπως η μελέτη πλωτών γεφυρών και γενικότερα πλωτών κατασκευών, καθώς η βασική παραδοχή του ταυτίζεται στην περίπτωση αυτή με την αρχή του Αρχιμήδη (βλέπε π.χ. Korenev (1960)). Μπορεί να αντιμετωπίσει επίσης το πρόβλημα μιας δοκού η οποία εδράζεται επί συστήματος εγκαρσίων δοκών ομοιόμορφα και σχετικά πυκνά τοποθετημένων. Τέτοιου τύπου συστήματα συναντώνται στις κατασκευές των σιδηροτροχιών των σιδηροδρόμων αλλά και στις κατασκευές των πλοίων (βλέπε π.χ. Hetenyi (1966)). Σημαντικές είναι και οι εφαρμογές του προσομοιώματος στην ανάλυση των ρηγματωμένων πλακών (βλέπε Selvadurai (1979), σελ. 15 – 16). Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι οι εξισώσεις που προκύπτουν από την υπόθεση του Winkler αποτελούν την ακριβή μαθηματική διατύπωση και για το πρόβλημα των αξονοσυμμετρικά φορτισμένων κυκλικών λεπτότοιχων σωλήνων (π.χ. Hetenyi (1946) σελ. 179, Penzien (1960), και Huang, Shi (1998)). Τέλος μια εξαιρετικά σπάνια εφαρμογή αφορά την μελέτη της συμπεριφοράς κοχλιών που χρησιμοποιούνται στις ξύλινες κατασκευές (Hetényi (1966)). Στην περίπτωση αυτή ο κοχλίας είναι ενσωματωμένος στο σώμα του ξύλου το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως ελαστικό υπόβαθρο.

Πέραν των αδυναμιών αλλά και των εφαρμογών που εκτέθηκαν παραπάνω θα πρέπει να τονιστεί ότι το προσομοίωμα του Winkler κατέχει το σημαντικό πλεονέκτημα της απλότητας στη μαθηματική του

διατύπωση, γεγονός που δίνει τη δυνατότητα σχηματισμού κλειστών αναλυτικών λύσεων για πολύ μεγάλη κατηγορία προβλημάτων δοκών με διάφορους τύπους φόρτισης και συνθήκες στήριξης. Έτσι καθίσταται εύκολος ο προγραμματισμός του προσομοιώματος σε ηλεκτρονικό υπολογιστή (βλέπε επισκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας στην Παράγραφο 1.2.1.1). Δεν θα πρέπει επίσης να παραβλέπεται το γεγονός ότι ανεξαρτήτως των αστοχιών του, δεν παύει να αποτελεί μια σε γενικές γραμμές ικανοποιητική προσέγγιση του προβλήματος τουλάχιστον σε συνήθεις πρακτικές εφαρμογές.

Το προσομοίωμα του Winkler τέλος υπερτερεί των προσομοιωμάτων δυο ή και περισσοτέρων παραμέτρων, και όσον αφορά το γεγονός ότι για την εφαρμογή του απαιτείται η γνώση μιας μόνον παραμέτρου (του δείκτη εδάφους) η φυσική σημασία της οποίας είναι πλήρως ξεκαθαρισμένη, ενώ ταυτόχρονα για τον προσδιορισμό της υπάρχει πληθώρα βιβλιογραφικών πηγών και μεθόδων πειραματικών και αναλυτικών (βλέπε Παράγραφο 2.4.2).

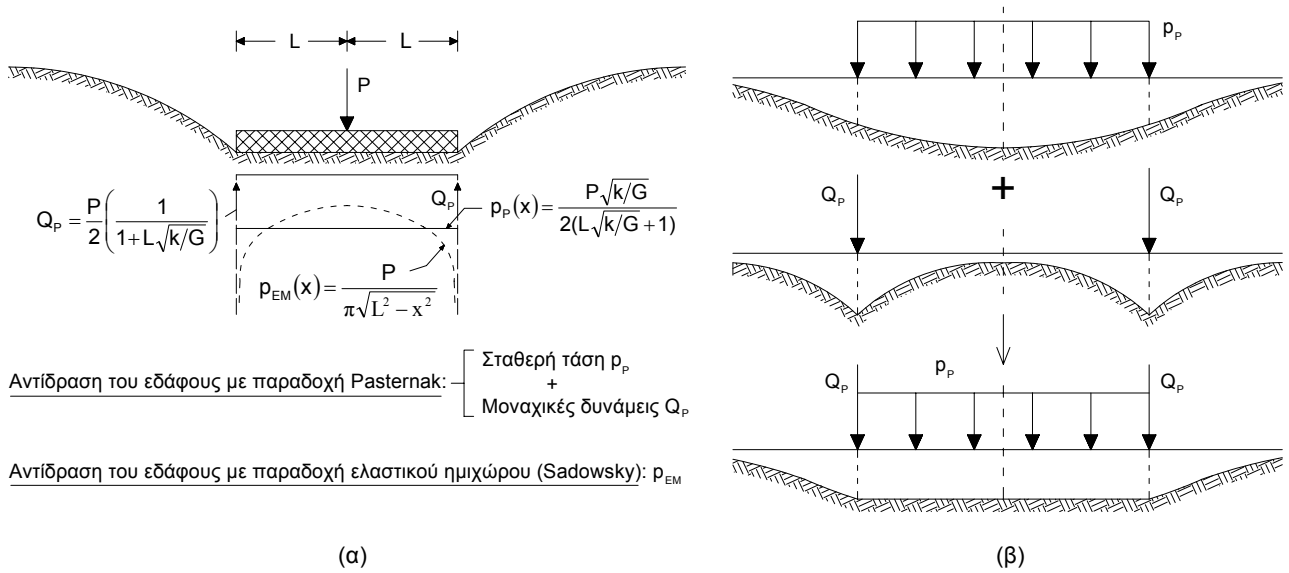
Προσομοιώματα δυο παραμέτρων: Προκειμένου αφενός να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της ασυνέχειας των κατακορύφων μετακινήσεων της επιφάνειας του εδάφους και αφετέρου να αποφευχθεί η προσφυγή στις πολύπλοκες εξισώσεις του συνεχούς ελαστικού μέσου, έχει προταθεί μια σειρά προσομοιωμάτων δυο παραμέτρων τα οποία παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους (Πίνακας 2.1). Απόρροια της "συνεχούς φύσης" των προσομοιωμάτων αυτών αποτελεί η δυνατότητα που έχουν να λαμβάνουν υπόψη την τρισδιάστατη φύση του προβλήματος δηλαδή την επιρροή των παραμορφώσεων της επιφάνειας του εδάφους σε δυο κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις (Selvadurai (1979), σελ. 57 και 103).

Αν και τα προσομοιώματα των δυο παραμέτρων χαρακτηρίζονται από μαθηματική διατύπωση σχετικά πιο σύνθετη από την αντίστοιχη του προσομοιώματος του Winkler παρέχουν ωστόσο την δυνατότητα σχηματισμού κλειστών αναλυτικών λύσεων τόσο για το στατικό όσο και για το δυναμικό πρόβλημα των δοκών (ενδεικτικά αναφέρονται Zhaohua και Cook (1983), Wang και Stephens (1977)). Το γεγονός αυτό έδωσε την ώθηση για μια εκτενή διερεύνηση του προσομοιώματος από πολλούς ερευνητές (βλέπε Παράγραφο 1.2.1.2). Ωστόσο, βασικό μειονέκτημα των προσομοιωμάτων αποτελεί η αδυναμία του αξιόπιστου προσδιορισμού της τιμής της δεύτερης παραμέτρου. Αν εξαιρεθεί το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov (Jones και Xenophontos (1977), Vallabhan και Das (1988)) και η προσέγγιση του Vartanyan (1966) – για την οποία γίνεται αναφορά στην Παράγραφο 2.4.3. – καμία άλλη αναλυτική μέθοδος προσδιορισμού της παραμέτρου αυτής δεν είναι διαθέσιμη όπως τονίστηκε και στην Παράγραφο 2.2.2.5, ενώ αντίστοιχο κενό εμφανίζεται και σε πειραματικά δεδομένα (βλέπε π.χ. Scott (1981), σελ. 141). Η αδυναμία αυτή αποτελεί ένα σημείο υστέρησης των έναντι του προσομοιώματος του Winkler.

Θα πρέπει επίσης να επισημανθεί η αδυναμία των προσομοιωμάτων στην προσέγγιση της κατανομής των τάσεων κάτω από σχετικά δύσκαμπτους φορείς θεμελίωσης που εδράζονται επί μη συνεκτικού / αμμώδους εδάφους (Selvadurai (1979), σελ. 436). Στον αντίποδα, εμφανίζονται αποτελεσματικά στην ανάλυση δύσκαμπτων φορέων θεμελίωσης επί συνεκτικού εδάφους. Η αποτελεσματικότητα τους αυτή οφείλεται και στο χαρακτηριστικό τους γνώρισμα – που θα παρουσιαστεί αναλυτικά παρακάτω – να αποδίδουν έστω και με καθαρά προσεγγιστικό τρόπο την συγκέντρωση των τάσεων στα όρια σχετικώς δύσκαμπτων φορέων που εδράζονται επί συνεκτικού εδάφους. (Αντίστοιχη ιδιότητα κατέχει και το προσομοίωμα του συνεχούς

ελαστικού μέσου (βλέπε π.χ. Βαλαλά (1991), σελ. 83). Αλλά και στην περίπτωση σχετικά εύκαμπτων φορέων θεμελίωσης επί συνεκτικού εδάφους, τα προσομοιώματα αυτά αποδίδουν πιο σωστά τα μεγέθη έντασης και μετακίνησης από το προσομοίωμα του Winkler, ειδικότερα όταν η φόρτιση του φορέα είναι σχεδόν ομοιόμορφη ή συνίσταται από φορτία κοντά στα ελεύθερα άκρα του (Selvadurai (1979), σελ. 436).

Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά των προσομοιωμάτων δυο παραμέτρων αποτελεί η εμφάνιση μοναχικών δυνάμεων – αντιδράσεων στα ελεύθερα άκρα των δοκών ή των πλακών (κυρίως των σχετικώς δύσκαμπτων), η οποία οφείλεται στις παραδοχές επάνω στις οποίες στηρίζονται οι εξισώσεις του προσομοιώματος (Vlasov (1960), Kerr (1964)). Πιο συγκεκριμένα, ενώ το προσομοίωμα του Winkler χαρακτηρίζεται από την πλήρη ασυνέχεια των κατακορύφων μετακινήσεων στα άκρα των δομικών στοιχείων (δοκών ή πλακών), τα προσομοιώματα των δυο παραμέτρων χαρακτηρίζονται από την ασυνέχεια (γόνατο) της κλίσης της παραμορφωμένης επιφάνειας του εδάφους στα άκρα αυτά. Η ασυνέχεια αυτή προκαλεί την εμφάνιση μοναχικών αντιδράσεων οι οποίες είναι ιδεατές μη υπαρκτές δυνάμεις που η θεώρηση τους όμως είναι απαραίτητη για την εκπλήρωση των συνθηκών ισορροπίας των κατακορύφων δυνάμεων (Morfidis, Avramidis (2002)). Η εμφάνιση των δυνάμεων αυτών οφείλεται σε φαινόμενο ανάλογο με αυτό το οποίο προκαλεί την εμφάνιση μοναχικών αντιδράσεων στις γωνίες των πλακών (Νιτσιώτα (1985), σελ. 76) και είναι από μαθηματικής άποψης ένα ασυμπτωτικό φαινόμενο (Kerr (1965), Friedrichs (1955)). Μια άλλης φύσεως εξήγηση μπορεί να δοθεί με βάση το πρόβλημα της φόρτισης της επιφάνειας του συνεχούς ελαστικού ημιχώρου μέσω απολύτως στερεού σώματος πεπερασμένων διαστάσεων. Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 2.29α η συνάρτηση της κατανομής των τάσεων που αναπτύσσονται στην επιφάνεια επαφής, εμφανίζει κοντά στα άκρα του στερεού σώματος ραγδαία αύξηση (Sadowsky (1928)).



Σχήμα 2.29. Επεξήγηση του φαινομένου εμφάνισης συγκεντρωμένων δυνάμεων – αντιδράσεων στο προσομοίωμα του Pasternak, (α) με βάση τη σύγκριση με τη μελέτη του συνεχούς ελαστικού μέσου, (β) με βάση την υπόθεση του Vlasov.

Η αύξηση αυτή έχει ως αποτέλεσμα τον «απειρισμό» των τάσεων ακριβώς στα άκρα. Η εμφάνιση των μοναχικών αντιδράσεων στα πλαίσια της μαθηματικής διατύπωσης των προσομοιωμάτων δυο παραμέτρων μπορεί να θεωρηθεί ως η απόδοση του φαινομένου αυτού. Μια επιπλέον εξήγηση δίνει ο Vlasov (1960),

σύμφωνα με την οποία η απουσία των συγκεντρωμένων αυτών αντιδράσεων θα οδηγούσε στο παράδοξο της πρόκλησης μη σταθερών μετακινήσεων κάτω από απολύτως στερεό σώμα το οποίο φορτίζεται κεντρικά (Σχήμα 2.29β). Επομένως η σταθερή παραμόρφωση επιτυγχάνεται μόνον από την επαλληλία της ομοιόμορφης αντίδρασης και τον δυο συγκεντρωμένων αντιδράσεων. Τέλος, η εμφάνιση των δυνάμεων αυτών προβλέπεται και από την εφαρμογή της αρχής της στάσιμης τιμής της ελαστικής ενέργειας του συστήματος δοκός – ελαστικό υπόβαθρο (Kerr (1976), Vallabhan και Das (1988)), από την οποία προκύπτει ότι οι δυνάμεις αυτές αντιπροσωπεύουν την επιρροή των παραμορφώσεων του εδάφους πέρα από τα όρια των δοκών (ή πλακών).

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να γίνει μια ειδική αναφορά στο προσομοίωμα του Vlasov το οποίο εμφανίζει διαφοροποίηση από τα υπόλοιπα προσομοιώματα δυο παραμέτρων (Παράγραφος 2.2.2.5). Το προσομοίωμα αυτό με την αρχική του διατύπωση δεν έτυχε της ευρύτερης χρήσης σε πρακτικές εφαρμογές γεγονός που πιθανώς να οφείλεται στην δυσκολία αξιόπιστου προσδιορισμού της παραμέτρου γ, στην δυσκολία επίλυσης των εξισώσεων του (με βάση τα υπολογιστικά εργαλεία εκείνης της εποχής), στο γεγονός ότι αναφέρεται σε υποστρώματα πεπερασμένου πάχους με μη μεταβαλλόμενες ελαστικές σταθερές καθ' όλο το πάχος τους, γεγονός που γενικά δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, και τέλος στο γεγονός ότι δεν είναι ευρέως διαδεδομένες και εύκολα εφαρμόσιμες ακριβέστερες λύσεις του ίδιου προβλήματος προκειμένου να χρησιμοποιηθούν ως μέτρα σύγκρισης των αποτελεσμάτων (Vallabhan και Das (1991α), (1991β)). Ωστόσο θα πρέπει να τονιστεί ότι η ακρίβεια του προσομοιώματος είναι και πειραματικά τεκμηριωμένη – από περιορισμένης έκτασης πάντως πειράματα – από τους Jones και Xenophontos (Jones και Xenophontos (1977)). Τα πειράματα αυτά τεκμηρίωσαν επίσης και τις σχέσεις προσδιορισμού του προφίλ των κατακορύφων μετακινήσεων (2.28) και (2.29). Παράλληλα όπως θα τονιστεί και παρακάτω τα αποτελέσματα του προσομοιώματος συγκλίνουν προς τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη θεωρία ελαστικότητας με κατάλληλη εκλογή τιμών των παραμέτρων του.

Κλείνοντας την αναφορά στα προσομοιώματα των δυο παραμέτρων θα πρέπει να σημειωθεί ότι μετά από έρευνα όσων δημοσιευμένων μελετών κατέστη δυνατό να εντοπιστούν πάνω στο αντικείμενο των προσομοιωμάτων δυο παραμέτρων, προκύπτει το συμπέρασμα ότι πέραν της αρχικής εργασίας του Vlasov (στην οποία παρουσιάζονται οι βασικές εξισώσεις του προσομοιώματος), λίγες εργασίες προχωρούν σε άμεση σύγκριση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την χρήση του προσομοιώματος με την θεωρητικά ακριβέστερη λύση του συνεχούς ελαστικού ημιχώρου ή έστω με την επίσης ακριβή λύση των επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων. Εξαίρεση αποτελούν οι εργασίες των Vallabhan, Das (1988), (1991α), Vallabhan, Daloglou (1999), και Morfidis, Avramidis (2002), χωρίς βέβαια να σημαίνει ότι δεν υπάρχουν πιθανόν και άλλες που δεν κατέστη δυνατό να εντοπιστούν. Η γενική αυτή τάση οφείλεται προφανώς στην αδυναμία αξιόπιστου προσδιορισμού της δεύτερης παραμέτρου. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται και από το γεγονός ότι στις μοναδικές εργασίες – πέραν της αρχικής εργασίας του Vlasov – στις οποίες πραγματοποιείται μια τέτοια σύγκριση γίνεται χρήση του τροποποιημένου προσομοιώματος του Vlasov το οποίο είναι το μοναδικό προσομοίωμα της κατηγορίας που δεν απαιτεί τον εξαρχής προσδιορισμό της δεύτερης παραμέτρου.

Ο Vlasov (1960) στην αρχική του εργασία, προχωρά σε μια σειρά παραμετρικών διερευνήσεων – συγκρίσεων των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από τη μελέτη απολύτως στερεάς δοκού, αλλά και ελαστικών δοκών πεπερασμένου και «απείρου» μήκους αφενός με βάση το προτεινόμενο προσομοίωμα, και αφετέρου με βάση τη θεωρητικά ακριβέστερη μέθοδο του συνεχούς ελαστικού ημιεπιπέδου. Από τις συγκρίσεις αυτές εξάγεται το συμπέρασμα ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το προσομοίωμα των δυο παραμέτρων εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από την παράμετρο που καθορίζει την κατανομή των μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου, και με κατάλληλη εκλογή της τιμής της επιτυγχάνεται η σύγκλιση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της δισδιάστατης ελαστικότητας. Ωστόσο θα πρέπει να επισημανθεί ότι η εύρεση της τιμής της παραμέτρου για την οποία σύμφωνα με τον Vlasov επιτυγχάνεται η σύγκλιση αυτή είναι σε γενικές γραμμές αυθαίρετη καθώς δεν προκύπτει από κάποια ορθολογική διαδικασία.

Στις εργασίες των Vallabhan και Das (1988, 1991α) επιχειρείται μια σύγκριση του τροποποιημένου προσομοιώματος του Vlasov με προσομοιώματα επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων. Από τη σύγκριση αυτή προκύπτει το γενικό συμπέρασμα της καλής σύγκλισης των αποτελεσμάτων που προκύπτουν και από τις δυο προσομοιώσεις. Στην εργασία των Μορφίδη και Αβραμίδη (2002) γίνεται σύγκριση του προσομοιώματος των δυο παραμέτρων, με και χωρίς την επιρροή των παραμορφώσεων εκατέρωθεν του φορέα θεμελίωσης, με προσομοίωμα επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων. Από την σύγκριση αυτή προκύπτει το βασικό συμπέρασμα ότι είναι κεφαλαιώδους σημασίας η θεώρηση των παραμορφώσεων του εδάφους εκατέρωθεν του φορέα θεμελίωσης η οποία εκφράζεται με τη θεώρηση μεταφορικών ελατηρίων στα ελεύθερα άκρα του. Το συμπέρασμα αυτό έρχεται σε πλήρη συμφωνία με το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν και οι Vallabhan et al (1991γ) από τη μελέτη πλακών επί του τροποποιημένου προσομοιώματος του Vlasov.

<u>Προσομοιώματα τριών παραμέτρων</u>: Τα προσομοιώματα των τριών παραμέτρων έχουν την ιδιότητα να αποδίδουν την μερική ασυνέχεια που εμφανίζεται στις κατακόρυφες μετακινήσεις του υποβάθρου (Παράγραφος 2.2.3 – Σχήμα 2.13) γύρω από την φορτιζόμενη περιοχή όπως έχει διαπιστωθεί και πειραματικά Föppl (1909), Soldini (1965). Είναι γεγονός ότι δεν έτυχαν εκτενούς διερεύνησης, αν και η πρώτη μαθηματική τους διατύπωση χρονολογείται από το 1946 (Πίνακας 2.1). Η συστηματική έρευνα της βιβλιογραφίας οδήγησε στο συμπέρασμα ότι μετά τις αρχικές δημοσιεύσεις των Hetenyi, Reissner και Kerr, δεν ακολούθησε ενασχόληση με τα αντίστοιχα προσομοιώματα πλην ορισμένων εξαιρέσεων. Οι εξαιρέσεις αυτές αναφέρονται στους Rhines (1967), Weitsman (1970), Rades (1971) και Horvath (1983α), (1993), και γι αυτές θα γίνει μια σύντομη αναφορά παρακάτω.

Χρονολογικά πρώτος ο Hetenyi (1946) – τουλάχιστον με βάση τις βιβλιογραφικές αναφορές που κατέστη δυνατό να εντοπιστούν – έθεσε το πρόβλημα της προσομοίωσης της μερικής συνέχειας των μετακινήσεων της επιφάνειας του εδάφους, ως γεφύρωση του «χάσματος» μεταξύ του προσομοιώματος του Winkler και των προσομοιωμάτων που θεωρούν πλήρη συνέχεια. Για το σκοπό αυτόν πρότεινε το προσομοίωμα που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 2.2.3.3 (Σχήμα 2.16). Από την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων του

προσομοιώματος (εξίσωση 2.59) σχημάτισε τις εκφράσεις των μεγεθών έντασης και μετακίνησης για δοκούς «απείρου», και πεπερασμένου μήκους. Παράλληλα σημείωσε (μέσω παραδειγμάτων) την ευελιξία της σύλληψης της μερικής συνέχειας όσον αφορά τη δυνατότητα επιλογής του βαθμού της ανάλογα με την κατηγορία του εδάφους θεμελίωσης και τις τοπικές συνθήκες. Πρέπει πάντως να τονιστεί ότι πέραν της εργασίας αυτής δεν επακολούθησε η περαιτέρω ενασχόληση με το προσομοίωμα.

Ο Kerr (1965) στη θεμελιώδη εργασία του για την ανάπτυξη της δικής του εκδοχής για την προσομοίωση της μερικής συνέχειας των μετακινήσεων της επιφάνειας του εδάφους ασχολήθηκε αποκλειστικά με τον υπολογισμό των μεγεθών έντασης και μετακίνησης απολύτως στερεού σώματος υπό στατική φόρτιση. Τα βασικά συμπεράσματα της εργασίας αυτής είναι:

- Το προτεινόμενο μηχανικό προσομοίωμα (Σχήμα 2.13) αποτελεί την «φυσική» επέκταση του προσομοιώματος του Pasternak (Σχήμα 2.5). Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι από τις εξισώσεις των μεγεθών έντασης και μετακίνησης του προσομοιώματος του Kerr προκύπτουν οι αντίστοιχες εξισώσεις του προσομοιώματος του Pasternak με σχηματισμό της οριακής τιμής τους όταν η σταθερά του άνω στρώματος των ελατηρίων λαμβάνει τιμές που τείνουν στο άπειρο.
- Λόγω της άνω στρώσης των ελατηρίων, αποφεύγεται η ανάπτυξη μεμονωμένων αντιδράσεων (περίπτωση προσομοιωμάτων δυο παραμέτρων) αλλά και ο «απειρισμός» κατακορύφων τάσεων (περίπτωση συνεχούς ελαστικού μέσου) στα άκρα των δομικών στοιχείων.
- Ο αριθμός των παραμέτρων του προσομοιώματος μπορεί να μειωθεί στις δυο. Αυτό επιτυγχάνεται εάν στις εξισώσεις του προσομοιώματος, τεθεί C=3K. Η συνθήκη αυτή είναι διαπιστωμένο πειραματικά ότι ισχύει για κοκκώδη (Siemonsen (1942)), και συνεκτικά εδάφη (για τις παραμορφώσεις που προκαλούνται αμέσως μετά την επιβολή της φόρτισης), (Faber (1933)).
- Από την σύγκριση πειραματικών αποτελεσμάτων, με αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του προσομοιώματος, εξάγεται το συμπέρασμα ότι το προσομοίωμα αποδίδει με ικανοποιητική ακρίβεια, τα αποτελέσματα που προκύπτουν από δοκιμές φόρτισης με άκαμπτη πλάκα.
- Οι βασικές εξισώσεις του προσομοιώματος μπορούν πολύ εύκολα να προσαρμοστούν και σε προβλήματα όπου λαμβάνεται υπόψη και η επιρροή του χρόνου στην εξέλιξη των παραμορφώσεων του εδάφους (βισκοελαστικά προσομοιώματα, βλέπε επίσης Reissner (1958) και Hetenyi (1966)).

Το μηχανικό προσομοίωμα του Kerr πλεονεκτεί σαφώς του αντιστοίχου προσομοιώματος του Hetenyi, για δυο βασικούς λόγους:

α. Από τις εξισώσεις του Kerr μπορούν να προκύψουν οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις των προσομοιωμάτων των δυο παραμέτρων ενώ το προσομοίωμα του Hetenyi στηρίζεται σε διαφορετική φιλοσοφία μη συμβατή με τα προσομοιώματα αυτά. Επομένως τα μητρώα δυσκαμψίας ή φόρτισης για δοκούς επί του ελαστικού υποβάθρου του Hetenyi δεν μπορούν να τύχουν γενικής εφαρμογής.

β. Η διαφορική εξίσωση του προσομοιώματος του Hetenyi είναι κατά δυο τάξεις μεγαλύτερη από την αντίστοιχη εξίσωση του Kerr (βλέπε σχέσεις (2.46β) και (2.63β)). Επομένως εάν οι εξισώσεις αυτές συνδυαστούν με τις κλασσικές εξισώσεις ισορροπίας των δοκών οδηγούν σε διαφορικές εξισώσεις ογδόης και έκτης τάξης αντίστοιχα. Η επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης όγδοης τάξης είναι σαφώς πιο

πολύπλοκη από μια αντίστοιχη έκτης τάξης όχι μόνον γιατί αυξάνει σε μεγάλο βαθμό τον όγκο των εκφράσεων των λύσεων, αλλά και γιατί εισάγει την ανάγκη προσδιορισμού δυο επιπλέον συνοριακών συνθηκών.

Ο Rhines (1967) ξεκινώντας από τις βασικές υποθέσεις του Reissner (1958) επέκτεινε τη μαθηματική διατύπωση του προσομοιώματος λαμβάνοντας υπόψη προβλήματα στα οποία το έδαφος θεμελίωσης εκτείνεται και παραπλεύρως του φορέα θεμελίωσης (πλάκα). Ωστόσο τόσο στην εργασία αυτή όσο και στη μεταγενέστερη εργασία του Reissner (1967) – η οποία έγινε με κίνητρο την εργασία του Rhines – γίνεται μόνον μια αναλυτικότερη κατάστρωση και τεκμηρίωση των απαραίτητων συνοριακών συνθηκών και όχι επίλυση και εφαρμογή των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος.

Ο Weitsman (1970) ασχολήθηκε κυρίως με το πρόβλημα της μονόπλευρης στήριξης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Winkler και Reissner. Αν και τα προβλήματα αποκόλλησης δεν αποτελούν αντικείμενο της παρούσας διατριβής, ωστόσο η αναφορά γίνεται διότι ο Weitsman προχώρησε στην κατάστρωση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας δοκού επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Reissner και έδωσε κάποιες λεπτομέρειες για την επίλυσή της προσανατολισμένος κυρίως προς το πρόβλημα των μονόπλευρων στηρίξεων, και χωρίς να ασχοληθεί με τη μητρωική διατύπωση του προβλήματος (μητρώα δυσκαμψίας και φόρτισης δοκών).

Από την εργασία του Rades (1971) για τη δυναμική συμπεριφορά απολύτως στερεού σώματος επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων προκύπτει το συμπέρασμα ότι και για την μελέτη του δυναμικού (όπως και για τη μελέτη του στατικού) προβλήματος που αφορά την εξαναγκασμένη ταλάντωση, η προσέγγιση του Kerr υπερτερεί των υπολοίπων απλοποιημένων προσομοιωμάτων. Ωστόσο ο Rades εξέφρασε και κάποιους προβληματισμούς όσον αφορά την δυνατότητα του προσομοιώματος στην μελέτη των δυναμικών προβλημάτων που αφορούν την μετάδοση επιφανειακών κυμάτων. Τέλος διατύπωσε και κάποια συμπεράσματα για το πεδίο εφαρμογής του προσομοιώματος, τονίζοντας ότι μπορεί να εφαρμοστεί και να οδηγήσει σε αξιόπιστα αποτελέσματα στην περίπτωση υποστρωμάτων λεπτού πάχους με χαμηλές τιμές του λόγου του Poison, αλλά και στην περίπτωση μελέτης συγκεκριμένων σχημάτων ελαστομερών υποστρωμάτων (rubber pads and carpets) που χρησιμοποιούνται για σκοπούς μόνωσης έναντι ταλαντώσεων (π.χ. σεισμική μόνωση).

Ο Horvath (1983α), (1993) διερεύνησε συστηματικά την αξιοπιστία και τη δυνατότητα εφαρμογής του προσομοιώματος του Reissner, ασχολούμενος όμως καθαρά με την εδαφοτεχνική πλευρά του προβλήματος. Ο ίδιος επέκτεινε το προσομοίωμα διατυπώνοντας εξισώσεις με τη βασική παραδοχή μη σταθερού μέτρου ελαστικότητας σε σχέση με το βάθος του υποβάθρου. Μετά από μια σειρά διερευνήσεων και έχοντας ως λύση αναφοράς την λύση που προκύπτει από τη χρήση της θεωρίας ελαστικότητας (Poulos και Davis (1974)), κατέληξε σε δυο βασικά συμπεράσματα:

– Το προσομοίωμα του Reissner είναι πάρα πολύ αξιόπιστο κατά τη μελέτη προβλημάτων όπου το ελαστικό υπόβαθρο είναι μικρού βάθους που αποτελείται από υλικό του οποίου ο λόγος του Poisson είναι κοντά στο μηδέν, συμπέρασμα που έρχεται σε πλήρη συμφωνία με την παρατήρηση του Rades όπως αναφέρθηκε πιο πάνω.

– Σε κάθε περίπτωση συγκρίσεων που πραγματοποιήθηκαν, το προσομοίωμα του Reissner αποδεικνύεται πιο αξιόπιστο από το προσομοίωμα του Winkler κατά τη σύγκριση με λύσεις βασισμένες στην ακριβή επίλυση προβλημάτων ελαστικότητας (Poulos και Davis (1974)).

Κλείνοντας την αναφορά στα προσομοιώματα των τριών παραμέτρων θα πρέπει να τονιστεί συμπερασματικά ότι ειδικά το προσομοίωμα του Kerr αποτελεί μια πολύ «ευέλικτη» και γενική προσέγγιση του προβλήματος της έδρασης δοκών ή πλακών επί ελαστικού υποβάθρου. Ο σχηματισμός μητρώων δυσκαμψίας και φόρτισης δοκών (αλλά και η ανάπτυξη κατάλληλων επιφανειακών στοιχείων πλάκας) επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων αποτελεί μια πολύ χρήσιμη εφαρμογή, καθώς η δυνατότητα να μετατρέπεται με κατάλληλους μετασχηματισμούς των εξισώσεων του είτε σε προσομοίωμα μίας είτε σε προσομοίωμα δυο παραμέτρων, το καθιστά κατάλληλο για την προσομοίωση ενός μεγάλου εύρους τύπων εδάφους, αλλά και διαφόρων επιπέδων δυσκαμψίας των φορέων θεμελίωσης. Η παρατήρηση αυτή θα πρέπει να συνδυαστεί και από το συμπέρασμα (που προκύπτει από την κριτική που προηγήθηκε) ότι τα προσομοιώματα της μιας και των δυο παραμέτρων, εμφανίζονται να είναι αλληλοσυμπληρούμενα τόσο στις κατηγορίες εδαφών όσο και στους τύπους φόρτισης των φορέων θεμελίωσης που είναι σε θέση να αντιμετωπίσουν επαρκώς. Επιπλέον των παραπάνω το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων αποτελεί ένα «εργαλείο» αντιμετώπιση προβλημάτων όπου η επιρροή της πλήρους συνέχειας ή ασυνέχειας των μετακινήσεων στην παράπλευρη προς την φορτιζόμενη επιφάνεια του εδάφους στα μεγέθη έντασης και μετακίνησης των φορέων θεμελίωσης είναι αντικείμενο «παραμετρικής» διερεύνησης.

2.3. Η προσομοίωση της μορφής αλληλεπίδρασης εδάφους – θεμελίωσης

Προκειμένου να οριστεί πλήρως το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης του εδάφους με τη θεμελίωση, είναι απαραίτητος – όπως τονίστηκε και στην Παράγραφο 2.1 – ο ορισμός συγκεκριμένων συνθηκών που σχετίζονται με τη μηχανική συμπεριφορά της επιφάνειας επαφής εδάφους – θεμελίωσης. Τα προσομοιώματα του εδάφους που παρουσιάστηκαν πιο πάνω βασίζονται στις εξής παραδοχές:

- Μικρές παραμορφώσεις: Η παραδοχή αυτή έχει ως αποτέλεσμα να είναι ρεαλιστική η θεώρηση της ελαστικής συμπεριφοράς του εδάφους.
- Λεία και αμφίπλευρη επαφή εδάφους – φορέα θεμελίωσης: Η παραδοχή αυτή έχει ως αποτέλεσμα την αγνόηση αφενός των δυνάμεων τριβής, και αφετέρου των φαινομένων αποκόλλησης,
- Στιγμιαία ανάπτυξη των παραμορφώσεων: Με βάση την παραδοχή αυτή γίνεται η θεώρηση ότι κατά την επιβολή των φορτίων αναπτύσσεται το σύνολο των μετακινήσεων.

Οι παραπάνω παραδοχές καθιστούν το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης εδάφους – κατασκευής γραμμικό. Ωστόσο σε πραγματικές συνθήκες οι παραπάνω παραδοχές πολλές φορές καταστρατηγούνται, καθώς:

- Σε περίπτωση που το έδαφος φορτίζεται από υψηλού επιπέδου τάσεις, αναπτύσσονται μεγάλες παραμορφώσεις γεγονός που οδηγεί σε πλαστικοποιήσεις. Στην περίπτωση αυτή δεν ισχύει η «ελαστική» προσέγγιση του προβλήματος, και απαιτείται η ανάλυση με μεθόδους μέσω των οποίων προσδιορίζεται η φέρουσα ικανότητα του εδάφους (βλέπε π.χ. Βαλαλάς (1985) ή Τσότσος (1991)).
- Το έδαφος ως υλικό δεν έχει την ικανότητα παραλαβής εφελκυστικών τάσεων. Αυτό το γεγονός καθιστά γενικά μη ισχύουσα την παραδοχή της αμφίπλευρης επαφής εδάφους – θεμελίωσης. Ενώ όμως υπό συνθήκες κατακόρυφης φόρτισης είναι σχεδόν απίθανη η εμφάνιση εφελκυστικών τάσεων, στην περίπτωση υψηλών σεισμικών δράσεων οι δυνάμεις ανατροπής είναι πολύ πιθανό να προκαλέσουν την εμφάνιση αδρανών περιοχών στην διεπιφάνεια εδάφους – θεμελίωσης.
- Στην περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης είναι αργιλικό και μάλιστα χαλαρό και κορεσμένο, η παραδοχή της στιγμιαίας ανάπτυξης του συνόλου των παραμορφώσεων δεν είναι ρεαλιστική, καθώς σημαντικό τμήμα των τελικών καθιζήσεων αναπτύσσεται με την πάροδο του χρόνου. Πρόκειται για το φαινόμενο της στερεοποίησης και η μελέτη του αποτελεί αντικείμενο ειδικών θεωριών και προσομοιωμάτων.

Τα παραπάνω προβλήματα συνθέτουν μια σειρά προβλημάτων που ανακύπτουν κατά τη μελέτη των επιφανειακών θεμελιώσεων. Αν και τα προβλήματα αυτά δεν αποτελούν αντικείμενο της παρούσας διατριβής θα παρουσιαστούν συνοπτικά παρακάτω για λόγους πληρότητας.

2.3.1. Χρονική μεταβλητότητα της εδαφικής συμπεριφοράς

Στην περίπτωση κατά την οποία το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από υψηλής διαπερατότητας κοκκώδη και μη συνεκτικά εδάφη (π.χ. αμμώδη εδάφη) τότε με την επιβολή της φόρτισης επέρχεται εκτόνωση της αρχικής υπερπίεσης του νερού των πόρων και έτσι το φορτίο παραλαμβάνεται αμέσως από τον εδαφικό σκελετό. Έτσι οι καθιζήσεις είναι άμεσες και ελαστικές (βλέπε π.χ. Αναγνωστόπουλος, Γεωργιάδης, Πιτιλάκης, (1994)). Επομένως στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει χρονική μεταβλητότητα στην εδαφική

συμπεριφορά και είναι ρεαλιστική η εφαρμογή ελαστικών μεθόδων – καθώς και των προσομοιωμάτων που παρουσιάστηκαν στο παρών Κεφάλαιο – για τον υπολογισμό των μετακινήσεων.

Στην περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από λεπτόκκοκα συνεκτικά εδάφη που παρουσιάζουν χαμηλή διαπερατότητα, η αναπτυσσόμενη υπερπίεση του νερού των πόρων αργεί πολύ να εκτονωθεί και έτσι η διαδικασία ανάληψης του φορτίου από τον εδαφικό σκελετό εξελίσσεται με πολύ αργό ρυθμό. Όπως είναι φυσικό με παρόμοιο ρυθμό εξελίσσονται και οι μετακινήσεις. Επομένως πέραν των αρχικών μετακινήσεων η απομάκρυνση του νερού των πόρων προκαλεί πρόσθετες μετακινήσεις οι οποίες εξελίσσονται σταδιακά και επομένως αποτελούν φαινόμενο εξαρτώμενο από το χρόνο. Όπως είναι γνωστό από πολλά συγγράμματα εδαφομηχανικής οι μετακινήσεις των λεπτόκοκκων εδαφών δίνονται από τη σχέση:

$$w_{ολ} = w_{αρχ} + w_{σ1} + w_{σ2} \tag{2.112}$$

Όπου:

$w_{αρχ}$ είναι το τμήμα των μετακινήσεων που προκαλείται αμέσως μετά την επιβολή των φορτίων. Οι μετακινήσεις αυτές οφείλονται στην ελαστική παραμόρφωση του εδάφους, και μπορούν να υπολογιστούν με βάση τη θεωρία ελαστικότητας.

$w_{σ1}$ είναι το τμήμα των μετακινήσεων που οφείλεται στην στερεοποίηση του εδάφους. Οι μετακινήσεις αυτές προκαλούνται από τη μεταβολή του δείκτη πόρων λόγω της σταδιακής απομάκρυνσης του νερού, δηλαδή οφείλονται στην στερεοποίηση του εδάφους

$w_{σ2}$ είναι το τμήμα των μετακινήσεων που πραγματοποιείται υπό σταθερές ενεργές τάσεις, και οφείλονται στον ερπυσμό του εδάφους. Για προβλήματα συνήθων κατασκευών και για χρονικά διαστήματα ανάλογα της διάρκειας ζωής τους, οι μετακινήσεις αυτές είναι μικρές και δεν υπολογίζονται.

Τα δυο τελευταία τμήματα των μετακινήσεων είναι χρονικά εξαρτώμενα και ο υπολογισμός τους εντάσσεται σε μια κατηγορία προβλημάτων που ονομάζονται προβλήματα στερεοποίησης. Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών πρέπει να γίνει χρήση της θεωρίας στερεοποίησης πρώτη προσέγγιση της οποίας έγινε από τον Terzaghi (1925), και για την οποία υπάρχει εκτενής βιβλιογραφία και ένας σημαντικός αριθμός μεθόδων (βλέπε π.χ. Bowles (1988), Τσότσος (1991), και Αναγνωστόπουλος, Γεωργιάδης, Πιτιλάκης, (1994)).

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να γίνει και μια μικρή αναφορά στα βισκοελαστικά προσομοιώματα τα οποία αποτελούν μια προσέγγιση του προβλήματος της στερεοποίησης. Πρόκειται για μηχανικά προσομοιώματα τα οποία αποτελούνται από συνδυασμούς μεταφορικών ελατηρίων και αποσβεστήρων ιξώδους αποσβέσεως (βλέπε π.χ. Christensen (1982)). Θα πρέπει μάλιστα να τονιστεί ότι όλα τα προσομοιώματα του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου που παρουσιάστηκαν στο παρών κεφάλαιο έχουν τη δυνατότητα με την προσθήκη αποσβεστήρων να μετατραπούν σε βισκοελαστικά προσομοιώματα με δυνατότητα εκτίμησης των χρονικά μεταβαλλόμενων μετακινήσεων (βλέπε π.χ. Kerr (1964), Viladkar et al (1993)). Τα βισκοελαστικά προσομοιώματα μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν και για την μελέτη της εξέλιξης των φαινομένων ερπυσμού. Εκτενής βιβλιογραφική αναφορά επί του αντικειμένου είναι διαθέσιμη μεταξύ άλλων και στις παρακάτω πηγές: Hetényi (1966), Selvadurai (1979, σελ. 40 – 42) και Dutta (2002).

2.3.2. Μονόπλευρες στηρίξεις – προβλήματα αποκόλλησης και τριβής

Στις συνήθεις πρακτικές εφαρμογές η επαφή μεταξύ του εδάφους και της θεμελίωσης θεωρείται αμφίπλευρη. Αυτό σημαίνει ότι γίνεται η παραδοχή πως η συμπεριφορά του εδάφους είναι ίδια και κατά την εφαρμογή θλιπτικών αλλά και εφελκυστικών τάσεων. Η παραδοχή αυτή είναι επαρκής στην περίπτωση μελέτης κατασκευών με φορείς θεμελίωσης μικρών διαστάσεων. Επιπλέον η θεώρηση και του ιδίου βάρους των δομικών στοιχείων οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ακόμα και στην περίπτωση κατά την οποία εμφανιστούν περιοχές αποκόλλησης εδάφους – θεμελίωσης είναι πολύ μικρές και επομένως η αγνόηση τους δεν οδηγεί σε σοβαρά λάθη.

Ωστόσο όταν μελετώνται κατασκευές υπό δυναμική – σεισμική καταπόνηση (ή ακόμα και από στατικού τύπου σεισμική καταπόνηση) υπάρχει περίπτωση κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες όπως π.χ. κατά την υψηλή σεισμική διέγερση υψηλών – εύκαμπτων κτηρίων, να εμφανιστούν αδρανείς περιοχές στην επιφάνεια επαφής εδάφους θεμελίωσης (Yim και Chopra (1984), Song και Lee (1993)). Μάλιστα στην περίπτωση αυτή η αποκόλληση έχει σημαντική επιρροή στην απόκριση των κτηρίων καθώς μεταβάλλει την αναπτυσσόμενη τέμνουσα βάσης, και επομένως θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη. Ένα άλλο πεδίο εφαρμογής της διερεύνησης της πιθανότητας αποκολλήσεων είναι και η μελέτη των ραγών των σιδηροδρομικών δικτύων (Kerr (1974)).

Η θεώρηση της επαφής εδάφους – θεμελίωσης ως μονόπλευρης αποτελεί ένα μη γραμμικό πρόβλημα, καθώς η περιοχή στην οποία μπορεί να εμφανιστεί η αποκόλληση δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή. Επομένως η μεθοδολογία επίλυσης θα πρέπει να είναι αριθμητική. Τρεις είναι σε γενικές γραμμές οι κύριες κατηγορίες αριθμητικών μεθόδων επίλυσης του προβλήματος: η μέθοδος των πολλαπλασιαστών του Lagrange, η μέθοδος των συναρτήσεων ποινής (penalty method), και μέθοδοι μαθηματικού προγραμματισμού όπως ο γραμμικός και ο τετραγωνικός προγραμματισμός. Λύσεις μπορούν να βρεθούν και με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (π.χ. Cheung και Nag (1968), Svec (1974)), ή και με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων (π.χ. Katsikadelis και Kallivokas (1986), Hu και Hartley (1994)). Τέλος θα πρέπει να σημειωθεί ότι στα σύγχρονα προγράμματα ανάλυσης κατασκευών είναι ενσωματωμένοι ειδικοί σύνδεσμοι οι οποίοι επιτρέπουν την μελέτη αναλόγων προβλημάτων (π.χ. ο σύνδεσμος NLLink του SAP V7.42 (2000)). Σημαντικός είναι ο αριθμός των δημοσιεύσεων επάνω στο αντικείμενο της μονόπλευρης επαφής εδάφους – θεμελίωσης. Ενδεικτικά αναφέρονται οι εργασίες των Tsai και Westmann (1967), του Gecit (1980) για το πρόβλημα μονόπλευρης έδρασης δοκών επί του ελαστικού ημιχώρου, των Pavlovic και Tsikkos (1982), των Lin και Adams (1987) και των Kaschev και Mikhajlov (1995) για το πρόβλημα μονόπλευρης έδρασης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Winkler, και οι εργασίες των Ting (1973) και Kerr (1976) για το αντίστοιχο πρόβλημα δοκών επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων. Τέλος για το πρόβλημα μονόπλευρης επαφής εδάφους – πλακών βιβλιογραφικές αναφορές δίνονται μεταξύ άλλων και από τους Selvadurai (1979) και Silva et al (2001).

Άλλη μια κατηγορία προβλημάτων επαφής εδάφους – θεμελίωσης είναι τα προβλήματα τριβής. Στη γενική τους διατύπωση, τα προβλήματα τριβής μεταξύ δυο εν επαφή ελαστικών ή μη σωμάτων είναι πολύπλοκα μαθηματικά προβλήματα, των οποίων η αντιμετώπιση γίνεται πολλές φορές σε συνδυασμό με τα

προβλήματα αποκόλλησης και με ανάλογες αριθμητικές μεθόδους (βλέπε π.χ. Mitsopoulou και Doudoumis, 1987). Η θεώρηση των δυνάμεων τριβής προκαλεί την αλληλεπίδραση μεταξύ εδάφους και θεμελίωσης όχι μόνον με δυνάμεις κάθετες στην εφαπτομένη σε κάθε σημείο επαφής, αλλά ταυτόχρονα και με δυνάμεις παράλληλες σε αυτήν. Επομένως, η προσομοίωση – τουλάχιστον προσεγγιστικά – της αλληλεπίδρασης εδάφους και θεμελίωσης στην περίπτωση κατά την οποία λαμβάνονται υπόψη και οι δυνάμεις τριβής απαιτεί την θεώρηση και καταλλήλων ελατηρίων η διεύθυνση των οποίων είναι παράλληλη της εφαπτομένης σε κάθε σημείο του άξονα του στοιχείου θεμελίωσης (βλέπε π.χ. Babie και Salmon (1996), (1997)). Στις συνήθεις επιφανειακές θεμελιώσεις η επιρροή των δυνάμεων τριβής δεν είναι αναγκαίο να ληφθεί υπόψη. Αντίθετα ο υπολογισμός των δυνάμεων τριβής είναι απαραίτητος κατά την μελέτη πασσάλων ή τοίχων αντιστήριξης. Στις περιπτώσεις αυτές υπάρχουν κατάλληλες γραμμικές ή μη μέθοδοι εκτίμησης των αναπτυσσόμενων δυνάμεων πλευρικής τριβής (Αναγνωστόπουλος, Γεωργιάδης, Πιτιλάκης (1994)).

2.4. Φυσική σημασία και προσδιορισμός των παραμέτρων των προσομοιωμάτων του εδάφους

2.4.1. Γενικά

Στις προηγούμενες παραγράφους παρουσιάστηκε μια σειρά από μοντέλα προσομοίωσης του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου, με τα οποία επιτυγχάνεται η σχετικά εύκολη αντιμετώπιση ενός μεγάλου αριθμού προβλημάτων αλληλεπίδρασης εδάφους – φορέων θεμελίωσης. Η αποτελεσματικότητα των προσομοιωμάτων αυτών εξαρτάται από τους παρακάτω παράγοντες:

- την ευκολία και την ακρίβεια με την οποία είναι δυνατός ο υπολογισμός των παραμέτρων που εισάγονται από τα προσομοιώματα αυτά, είτε από εργαστηριακές είτε από επί τόπου μετρήσεις, και
- την αξιοπιστία και την ακρίβεια των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την χρήση τους σε σύγκριση με εργαστηριακά ή πειραματικά δεδομένα.

Ο πρώτος εκ των δυο παραπάνω παραγόντων οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ακόμα και τα προσομοιώματα που διέπονται από κατάλληλη μαθηματική διατύπωση, έτσι ώστε να λαμβάνουν υπόψη μεγάλο αριθμό παραγόντων που επηρεάζουν την εδαφική συμπεριφορά, είναι πρακτικά αναποτελεσματικά, όταν οι παράμετροι που υπεισέρχονται στην διατύπωσή τους εκτιμηθούν λανθασμένα. Θα πρέπει επίσης να τονιστεί, ότι από μεγάλο αριθμό εργαστηριακών ή επί τόπου δοκιμών είναι διαπιστωμένο ότι οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων που περιγράφουν την εδαφική συμπεριφορά δεν προσδιορίζονται μονοσήμαντα. Επί παραδείγματι, η εκτιμώμενη τιμή του δείκτη εδάφους δεν εξαρτάται μόνον από τον τύπο του εδάφους, αλλά και από τη μορφή της φορτιζόμενης επιφάνειας και το μέγεθος των τάσεων που επιβάλλονται για τον προσδιορισμό του. Επιπλέον, οι ελαστικές σταθερές Ε, ν εξαρτώνται μεταξύ άλλων παραγόντων και από το μέγεθος και την ιστορία φόρτισης. Το γεγονός της μη μονοσήμαντης εκτίμησης των παραμέτρων της εδαφικής συμπεριφοράς αποτελεί ένα σημαντικό μειονέκτημα το οποίο καθιστά την εφαρμογή των προσομοιωμάτων μια διαδικασία που θα πρέπει να γίνεται με κριτικό πνεύμα και με συνείδηση της μεγάλης διασποράς των πραγματικών τιμών.

Επιπλέον, ο μη μονοσήμαντος προσδιορισμός των εδαφικών παραμέτρων έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη μιας σειράς μεθόδων εκτίμησής τους, πειραματικών, αναλυτικών ή και υβριδικών. Οι μέθοδοι αυτές κατατάσσονται στις παρακάτω κατηγορίες (βλέπε π.χ. Selvadurai (1979), Kerr (1985)):

1. Μέθοδοι βασισμένες σε επί τόπου μετρήσεις (π.χ. δοκιμαστικές φορτίσεις πλάκας),
2. Μέθοδοι με βάση τις οποίες τα μεγέθη παραμόρφωσης ενός φορέα θεμελίωσης, που υπολογίζονται με βάση κάποιο συγκεκριμένο εδαφικό προσομοίωμα, συγκρίνονται με αποτελέσματα που προκύπτουν από επί τόπου μετρήσεις,
3. Μέθοδοι στα πλαίσια των οποίων αποτελέσματα υπολογισμών με βάση τα απλά προσομοιώματα συγκρίνονται με αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από την προσομοίωση του εδάφους ως συνεχούς ελαστικού μέσου (π.χ. Biot (1937), Vecic (1961), Vardanyan (1966)). Με τον τρόπο αυτό οι παράμετροι των απλοποιημένων προσομοιωμάτων συσχετίζονται με τις κλασσικές ελαστικές σταθερές E, ν, για τις οποίες υπάρχει μια σειρά αξιόπιστων εργαστηριακών μεθόδων προσδιορισμού.
4. Μέθοδοι σύμφωνα με τις οποίες οι εδαφικές παράμετροι υπολογίζονται απευθείας από τις γενικές εξισώσεις του ελαστικού συνεχούς μέσου με τη βοήθεια απλοποιητικών παραδοχών, οι οποίες αφορούν τα μεγέθη έντασης και μετακίνησης, ή με τη χρήση μεθόδων στα πλαίσια των οποίων τα μεγέθη αυτά αναπτύσσονται σε σειρές Taylor ή Maclaurin. Πρόκειται για καθαρά αναλυτικές μεθόδους που στηρίζονται στις εξισώσεις των προσομοιωμάτων του Reissner (1958), του Vlasov (1960), αλλά και των προσομοιωμάτων που στηρίζονται σε φορμαλιστικές μεθόδους (Παράγραφος 2.2.3.5). Όπως και στην προηγούμενη κατηγορία μεθόδων, και οι μέθοδοι αυτές καταλήγουν σε συσχέτιση των παραμέτρων των προσομοιωμάτων με τις κλασσικές ελαστικές σταθερές E, ν. Πάντως, για τις μεθόδους αυτές έχουν εκφραστεί αμφιβολίες όσον αφορά την εγκυρότητα τους (βλέπε π.χ. Kerr (1985)).

Στην παρούσα παράγραφο θα γίνει μια συνοπτική παρουσίαση των μεθόδων προσδιορισμού των εδαφικών παραμέτρων των απλοποιημένων προσομοιωμάτων μιας, δυο ή τριών παραμέτρων. Οι μέθοδοι πειραματικού προσδιορισμού των κλασσικών ελαστικών σταθερών E, ν δεν αποτελούν αντικείμενο ενδιαφέροντος της παρούσας διατριβής και δεν θα γίνει ιδιαίτερη αναφορά γι' αυτές.

2.4.2. Το μέτρο αντίστασης του εδάφους – Πρώτη παράμετρος των προσομοιωμάτων

Το μέτρο αντίστασης του εδάφους ή πιο απλά ο δείκτης εδάφους K (coefficient of subgrade reaction) αποτελεί την μοναδική παράμετρο η οποία υπεισέρχεται στους υπολογισμούς των κατακόρυφων μετακινήσεων της επιφάνειας του εδάφους, όταν αυτές υπολογίζονται με το προσομοίωμα του Winkler. Για το λόγο αυτόν άλλωστε εμφανίζεται σε μεγάλο τμήμα τις βιβλιογραφίας και με την ονομασία «σταθερά του Winkler». Ο δείκτης εδάφους είναι ίσος με το λόγο της δύναμης που εφαρμόζεται σε ένα συγκεκριμένο σημείο της επιφάνειας του εδάφους προς την αντίστοιχη κατακόρυφη μετακίνηση στο σημείο αυτό (βλέπε Σχέση 2.1α), και έχει διαστάσεις δύναμης (π.χ. kN) ανά μονάδα όγκου (π.χ. m^3). Οι τιμές του δείκτη εδάφους εξαρτώνται όχι μόνον από τις μηχανικές ιδιότητες του εδάφους, αλλά και από τις διαστάσεις και τη γεωμετρική μορφή της φορτιζόμενης επιφάνειας, και το επίπεδο της επιβαλλόμενης φόρτισης (Terzaghi (1955)). Επομένως, ο δείκτης εδάφους δεν μπορεί να θεωρηθεί ως μια καθαρά εδαφική ιδιότητα.

Τέλος, οφείλει να τονιστεί ότι ο δείκτης εδάφους K δεν θα πρέπει να συγχέεται με τον συντελεστή της αντίδρασης του εδάφους (modulus of subgrade reaction) k, ο οποίος στην περίπτωση της μελέτης γραμμικών φορέων θεμελίωσης (π.χ. συνδετήριων δοκών ή πεδιλοδοκών) συνδέεται με τον δείκτη εδάφους με την σχέση k=Kb, όπου b το πλάτος του φορέα.

Μέθοδοι προσδιορισμού του δείκτη εδάφους

Οι τιμές του δείκτη εδάφους – όπως και των υπολοίπων εδαφικών παραμέτρων – μπορούν να προσδιοριστούν είτε με πειραματικές είτε με αναλυτικές μεθόδους. Παρακάτω θα γίνει μια σύντομη αναφορά στις μεθόδους αυτές και ειδικότερα στην μέθοδο της δοκιμαστικής φόρτισης πλάκας.

- <u>Πειραματικές μέθοδοι</u>

Οι πειραματικές μέθοδοι με τις οποίες μπορεί να γίνει εκτίμηση του δείκτη εδάφους είναι οι τριαξονικές δοκιμές (π.χ. Bowles (1988), Τσότσος (1991)), η δοκιμή CBR (π.χ. Selvadurai (1979)), η δοκιμασία στερεοποίησης (Consolidation test), και η δοκιμαστική φόρτιση πλάκας.

Δοκιμαστική φόρτιση πλάκας

Η πιο συνήθης από τις παραπάνω μεθόδους είναι η επί τόπου δοκιμαστική φόρτιση πλάκας. Με βάση τη μέθοδο αυτή εφαρμόζεται στο έδαφος προοδευτικά αυξανόμενη πίεση μέσω μιας διάταξης πλακών. Από την καταμέτρηση της εξέλιξης των βυθίσεων σχηματίζονται διαγράμματα δύναμης (p) – μετακίνησης (w) τα οποία είναι γενικώς μη γραμμικά. Συνήθως ως τιμή του δείκτη εδάφους χρησιμοποιείται είτε η αρχική κλίση της καμπύλης p – w (εφαπτομενική τιμή), είτε η κλίση μιας ευθείας που τέμνει την καμπύλη p – w σε ένα σημείο που αντιστοιχεί σε μια προκαθορισμένη τιμή των μετακινήσεων (secant modulus). Οι διαστάσεις των πλακών που χρησιμοποιούνται για τις δοκιμές επηρεάζουν πολύ τα αποτελέσματα των μετρήσεων, καθώς μεταβάλουν τα μεγέθη των βολβών επιρροής στο εσωτερικό του εδάφους (Terzaghi (1955)). Για περισσότερες λεπτομέρειες όσον αφορά τις προδιαγραφές των μετρήσεων υπάρχει πληθώρα βιβλιογραφικών πηγών (ενδεικτικά αναφέρονται Bowles (1988), Jones (1997)). Στις συνήθεις πρακτικές εφαρμογές γίνεται χρήση πινάκων οι οποίοι δίνουν τιμές του δείκτη εδάφους, οι οποίες προκύπτουν από δοκιμαστικές φορτίσεις τετραγωνικής πλάκας πλευράς 0.305m (βλέπε π.χ Terzaghi (1955) και Αναγνωστόπουλος (1996)). Οι τιμές των πινάκων αυτών υπόκεινται σε διορθώσεις οι οποίες εξαρτώνται από τους εξής παράγοντες:

– Τύπος του εδάφους (συνεκτικού ή αμμώδους),
– Διαστάσεις, σχήμα και τύπος της θεμελίωσης (κοιτόστρωση ή εσχάρα πεδιλοδοκών),
– Βάθος θεμελίωσης

Α. Διόρθωση λόγω των διαστάσεων της θεμελίωσης

Η διόρθωση λόγω της διαφοράς του πλάτους του στοιχείου θεμελίωσης, από το πλάτος της δοκιμαστικής πλάκας εξαρτάται αφενός από τον τύπο του εδάφους και αφετέρου από τον τύπο της θεμελίωσης. Σύμφωνα με τον Terzaghi (1955) η τιμή του δείκτη εδάφους που προκύπτει από τους σχετικούς πίνακες θα πρέπει να υπόκειται σε μια διόρθωση πολλαπλασιαζόμενη με τον παρακάτω συντελεστή για αμμώδη εδάφη:

$$n_{\delta}^{\alpha\mu.} = \left[\frac{B_{\theta} + B_{\pi\lambda}}{2B_{\theta}}\right]^2 \tag{2.113}$$

όπου $B_{\pi\lambda}$ είναι το πλάτος της δοκιμαστικής πλάκας. Ο αντίστοιχος συντελεστής για τα αργιλικά εδάφη είναι:

$$n_{\delta}^{\alpha\rho.} = \left[\frac{B_{\pi\lambda}}{B_{\theta}}\right] \tag{2.114}$$

Στις δυο παραπάνω σχέσεις ο συντελεστής B_{θ} προσδιορίζεται με διαφορετικό τρόπο όταν ο φορέας θεμελίωσης συνίσταται από πλάκες (π.χ. κοιτοστρώσεις, ή οδοστρώματα) και με διαφορετικό τρόπο όταν συνίσταται από γραμμικά στοιχεία (π.χ. εσχάρες πεδιλοδοκών). Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση μελέτης γραμμικών φορέων θεμελίωσης ο συντελεστής B_{θ} ταυτίζεται με το πλάτος της διατομής τους εν επαφή με το έδαφος. Αντίθετα, στην περίπτωση επιφανειακών φορέων θεμελίωσης, ο συντελεστής B_{θ} υπολογίζεται μεσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας (βλέπε π.χ. Terzaghi (1955), ή Scott (1981) σελ. 248 – 249).

Β. Διόρθωση λόγω γεωμετρικής μορφής της θεμελίωσης

Οι τιμές του δείκτη εδάφους προκύπτουν από φορτίσεις πλακών τετραγωνικού σχήματος. Ωστόσο, στην πράξη οι φορείς θεμελίωσης δεν έχουν τετραγωνική μορφή. Επομένως, οι διαθέσιμες τιμές των πινάκων θα πρέπει να υποστούν διόρθωση προκειμένου να «αναχθούν» σε μορφές επιφάνειας διάφορες της τετραγωνικής. Η διόρθωση αυτή συνιστάται ειδικά για την περίπτωση γραμμικών φορέων θεμελίωσης, ο λόγος των διαστάσεων των οποίων αποκλίνει πολύ από τη μονάδα. Για την αναγωγή αυτή ο Terzaghi (1955) προτείνει τον ακόλουθο εμπειρικό συντελεστή διόρθωσης που ισχύει τόσο για αργιλικά όσο και για αμμώδη εδάφη:

$$n_{\sigma} = \frac{2}{3}\left[1 + \frac{B_{\theta}}{2L}\right] \tag{2.115}$$

στην παραπάνω σχέση το L είναι το μήκος του στοιχείου θεμελίωσης, και B_{θ} είναι όπως και προηγουμένως, το πλάτος.

Γ. Διόρθωση λόγω βάθους θεμελίωσης

Στην περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης είναι αμμώδες, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη και το γεγονός ότι σε γενικές γραμμές, η τιμή του μέτρου ελαστικότητας αυξάνει σε σχέση με το βάθος. Επομένως εάν το βάθος θεμελίωσης βρίσκεται D μέτρα κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του εδάφους, και οι πίνακες από τους οποίους γίνεται η εκτίμηση της τιμής του δείκτη εδάφους έχουν προκύψει από δοκιμές στην ελεύθερη επιφάνεια του εδάφους, τότε θα πρέπει να γίνει διόρθωση με βάση τον παρακάτω συντελεστή (Selvadurai (1979) σελ.410):

$$n_{\beta.\theta.}^{\alpha\mu.} = \left[1 + 2\left(\frac{D}{B_{\theta}}\right)\right] \tag{2.116}$$

Στην περίπτωση θεμελίωσης επί αργιλικού εδάφους, ο παραπάνω διορθωτικός συντελεστής θα πρέπει να τεθεί ίσος με τη μονάδα.

Με βάση τις παραπάνω διορθώσεις, ξεκινώντας από τις τιμές του δείκτη εδάφους K_S από τους διαθέσιμους πίνακες που συντάσσονται με βάση τις δοκιμαστικές φορτίσεις πλακών προκύπτουν οι τελικές τιμές του δείκτη εδάφους K από τις παρακάτω σχέσεις:

$$K = [(n_{\delta}^{\alpha\mu.})(n_{\sigma})(n_{\beta.\theta.}^{\alpha\mu.})]K_S \tag{2.117α}$$

$$K = [(n_{\delta}^{\alpha\rho.})(n_{\sigma})]K_S \tag{2.117β}$$

- <u>Αναλυτικές μέθοδοι</u>

Οι αναλυτικές μέθοδοι προσδιορισμού της τιμής του δείκτη εδάφους είναι στην πραγματικότητα υβριδικές, καθώς στις μαθηματικές διατυπώσεις στις οποίες καταλήγουν υπεισέρχονται άλλες εδαφικές παράμετροι (όπως το μέτρο ελαστικότητας του εδάφους E, ο λόγος του Poisson ν, ή άλλοι δείκτες), ο προσδιορισμός των οποίων απαιτεί δεδομένα από πειραματικές (εργαστηριακές ή επί τόπου) μετρήσεις. Παρακάτω θα δοθούν οι κυριότερες από τις αναλυτικές εκφράσεις του δείκτη εδάφους που είναι διαθέσιμες σε διάφορες βιβλιογραφικές πηγές.

Σχέση του Biot

Ο Biot (1937) συσχέτισε το δείκτη εδάφους K με τις ελαστικές σταθερές του εδάφους (E_S, ν_S) μέσω της σύγκρισης της μέγιστης καμπτικής ροπής μιας δοκού απείρου μήκους επί ελαστικού υποβάθρου φορτιζόμενης με κατακόρυφο μοναχικό φορτίο, την οποία επίλυσε τόσο με το προσομοίωμα του Winkler, όσο και με το προσομοίωμα του ομογενούς ελαστικού ημιεπιπέδου και ημιχώρου. Η σχέση στην οποία κατέληξε για την περίπτωση συνθηκών επίπεδης έντασης είναι:

$$K = 0.707\left(\sqrt[3]{\frac{E_S b}{E_b I}}\right)E_S \tag{2.118α}$$

ενώ η αντίστοιχη σχέση για προβλήματα τρισδιάστατης ελαστικότητας είναι:

$$K = \frac{1.23E_S}{(1-\nu_S^2)b}\left[\frac{E_S b^4}{16C(1-\nu_S^2)\,E_B I}\right]^{0.11} \tag{2.118β}$$

Στις παραπάνω σχέσεις, E_B είναι το μέτρο ελαστικότητας της δοκού, b είναι το πλάτος της δοκού, I είναι η ροπή αδράνειας της διατομής της και C είναι μια σταθερά η οποία λαμβάνει τιμή ίση με τη μονάδα στην περίπτωση ομοιόμορφης κατανομής πιέσεων, και την τιμή 1.13 στην περίπτωση ομοιόμορφης κατανομής των μετακινήσεων στην επιφάνεια του εδάφους σε όλο το πλάτος της δοκού ($1.00<C<1.13$).

Η εφαρμογή της σχέσης (2.118β) οδηγεί σε σύγκλιση των αποτελεσμάτων των ροπών κάμψης για τα προσομοιώματα Winkler και ελαστικού ημιχώρου αντίστοιχα. Ωστόσο, ο σχηματισμός της στηρίζεται σε ανάλυση δοκού «απείρου» μήκους κάτω από συγκεκριμένη κατάσταση φόρτισης. Επομένως, δεν είναι δυνατό να οδηγεί σε σύγκλιση αποτελεσμάτων για δοκούς πεπερασμένου μήκους κάτω από διαφορετικές καταστάσεις φόρτισης. Η πραγματική όμως συμβολή της μεθόδου του Biot στον αναλυτικό προσδιορισμό του δείκτη εδάφους συνίσταται κυρίως στη σύλληψη της ιδέας της σύγκρισης των αποτελεσμάτων των προσομοιωμάτων Winkler και ελαστικού ημιχώρου. Με βάση την προσέγγιση αυτή ο Vesic ανέπτυξε μια σχέση γενικότερης εφαρμογής που θα παρουσιαστεί παρακάτω.

Σχέση του Vesic

Ο Vesic (1961), στηριζόμενος επάνω στον βασικό κορμό της προσέγγισης του Biot, πρότεινε μια διαφορετική και πιο γενική σχέση για τον δείκτη εδάφους. Μελετώντας και ο ίδιος την περίπτωση της δοκού «απείρου» μήκους επεχείρησε το σχηματισμό μιας σχέσης προσδιορισμού του δείκτη εδάφους, όχι μόνον με αυστηρό κριτήριο την σύγκλιση των καμπτικών ροπών, αλλά με κριτήριο την σύγκλιση της τιμής του χαρακτηριστικού μήκους της δοκού κατά την ανάλυση με το προσομοίωμα του Winkler (βλέπε Παράγραφο 2.5.3 και Σχέση 2.133) και της τιμής του παράγοντα που καθορίζει τις εκφράσεις όλων των μεγεθών έντασης και παραμόρφωσης δοκού «απείρου» μήκους επί ελαστικού ημιχώρου. Η σχέση του Vecic είναι:

$$K = \frac{0.65E_S}{b\,(1-\nu_S^2)}\left[\frac{E_S b^4}{E_b I_b}\right]^{1/12} \tag{2.119}$$

Όπως έχει αποδειχθεί, για τις Ελληνικές συνθήκες η παραπάνω σχέση καταλήγει στην εξής προσέγγιση (Αναγνωστόπουλος (1994), (1996)):

$$K = \frac{0.90E_S}{b\,(1-\nu_S^2)} \cong \frac{E_S}{b} \tag{2.120α}$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι ο Barden (1962) κατέληξε στην παρακάτω σχέση:

$$K = \frac{0.65E_S}{b\,(1-\nu_S^2)} \tag{2.120β}$$

η οποία ισχύει για σχετικά «μακριές» δοκούς (μήκος / πλάτος>10 σύμφωνα με τον Barden). Η σχέση αυτή είναι όμοια με την (2.119) εάν η υπόριζος ποσότητα στη σχέση αυτή θεωρηθεί περίπου ίση με τη μονάδα.

Σχέσεις του Vlasov

Οι σχέσεις του προσομοιώματος του Vlasov έχουν σχηματιστεί με βάση συνθήκες επίπεδης ελαστικότητας και παρουσιάστηκαν λεπτομερώς στην Παράγραφο 2.2.2.5. Όπως τονίστηκε στην παράγραφο αυτή, απόρροια της μεθόδου είναι και ο σχηματισμός αναλυτικών εκφράσεων για τις δυο παραμέτρους του προσομοιώματος, οι οποίες εξαρτώνται από την παραδοχή που γίνεται για το προφίλ των κατακορύφων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου (Σχέσεις (2.28), (2.29), (2.30)). Πιο συγκεκριμένα, για την πρώτη παράμετρο – που αντιστοιχεί στο δείκτη εδάφους – ισχύει η γενική σχέση (2.26α) από την οποία προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$K = \frac{E_0}{H(1-\nu_0^2)} \qquad \text{(με βάση τη γραμμική κατανομή (2.28))} \tag{2.121α}$$

$$K = \frac{E_0\gamma}{4(1-\nu_0^2)}\left[\frac{\sinh(2\gamma H)+(2\gamma H)}{\sinh^2(\gamma H)}\right] \qquad \text{(με βάση την υπερβολική κατανομή (2.29))} \tag{2.121β}$$

$$K = \frac{E_0\gamma}{2(1-\nu_0^2)} \qquad \text{(με βάση την εκθετική κατανομή (2.30))} \tag{2.121γ}$$

Στις παραπάνω σχέσεις υπενθυμίζεται ότι οι ελαστικές σταθερές E_0, ν_0 αντιστοιχούν σε συνθήκες επίπεδης έντασης, ενώ για την προσαρμογή τους σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης απαιτείται η αντικατάσταση τους από τη Σχέση (2.23στ).

Θα πρέπει να τονιστεί ότι η άμεση εφαρμογή των παραπάνω σχέσεων δεν είναι εφικτή καθώς θα πρέπει να καθοριστεί η παράμετρος γ. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού είναι αναγκαία η εφαρμογή της επαναληπτικής διαδικασίας των Jones, Xenophontos (1977) και των Vallabhan, Das (1988). Θα πρέπει επίσης παρατεθεί και η σχέση των Vallabhan, Das (1991β) για την περίπτωση μη ομογενούς υποστρώματος με γραμμικά μεταβαλλόμενο μέτρο ελαστικότητας:

$$K = \frac{(1-\nu)}{8H(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{E_1[(2\gamma H)\sinh(2\gamma H)+4(\gamma H)^2]+(E_2-E_1)[\cosh(2\gamma H)-1+2(\gamma H)^2]}{\sinh^2(\gamma H)}\right] \tag{2.122}$$

Στην παραπάνω σχέση E_1, E_2 είναι οι τιμές του μέτρου ελαστικότητας του υποβάθρου στην κορυφή του και στη βάση του αντίστοιχα (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε Vallabhan, Das (1991β)). Θα πρέπει επίσης να τονιστεί ότι η σχέση αυτή αντιστοιχεί σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης.

Σχέση του Galin

Διερευνώντας το πρόβλημα της κάμψης λεπτών δοκών πεπερασμένου μήκους επί ισότροπου ελαστικού ημιχώρου, ο Galin κατέληξε στην ακόλουθη σχέση για την τιμή του δείκτη εδάφους (βλέπε Selvarurai (1979), σελ. 137):

$$K = \frac{\pi E_S}{2b(1-\nu^2)\ln(L/b)} \tag{2.123}$$

Η παραπάνω σχέση για τιμές του λόγου L/b (μήκος / πλάτος δοκού) ≥10 δίνει αποτελέσματα παραπλήσια με τα αποτελέσματα της απλοποιημένης σχέση του Vesic (2.120α).

Σχέση των Kögler και Scheidig

Οι Kögler και Scheidig προτείνουν την ακόλουθη σχέση (Selvarurai (1979), σελ. 418):

$$K = \frac{2E_S}{b\ln[1+2(H/b)]} \tag{2.124}$$

Στην παραπάνω σχέση το H συμβολίζει το πάχος του εδαφικού υποστρώματος.

Σχέση του De Beer

Σύμφωνα με τον De Beer ισχύει η σχέση (Αναγνωστόπουλος (1994), (1996)):

$$K = \frac{1.33}{b}\left[\frac{E_S}{\sqrt[3]{L/b}}\right] \tag{2.125}$$

Σχέση του Dimitrov

Ο Dimitrov προτείνει την παρακάτω σχέση (Αναγνωστόπουλος (1994), (1996)):

$$K = \frac{\rho}{b}\left[\frac{E_S}{(1-\nu^2)}\right] \tag{2.126}$$

Το ρ εξαρτάται από το λόγο μήκους / πλάτους της δοκού και δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα:

L/b	1.0	1.5	2.0	3.0	5.0	10.0	20.0	30.0	50.0
ρ	1.05	0.87	0.78	0.66	0.54	0.45	0.39	0.33	0.30

Σχέση των Woinowsky – Krieger

Κατόπιν πειραματικής εργασίας οι Woinowsky – Krieger, πρότειναν την ακόλουθη σχέση:

$$K = \frac{2.15}{h}\sqrt[3]{\left(\frac{E_S^4}{E_b}\right)} \tag{2.127}$$

Όπου το h είναι το ύψος της διατομής της δοκού, και E_b το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της.

Σχέση του Rausch

Σύμφωνα με τον Rausch ο δείκτης εδάφους μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση (Αβραμίδης (1995)):

$$K = \frac{E_S}{n\sqrt{F}} \tag{2.128}$$

Στην παραπάνω σχέση το F είναι το εμβαδόν θεμελίωσης, ενώ ο συντελεστής *n* είναι ίσος με 0.4 (Πρέπει να τονιστεί ότι για το συντελεστή *n* μπορεί να δοθεί και η τιμή 0.25).

Εκτίμηση του δείκτη εδάφους με βάση την επιτρεπόμενη τάση

Πρόκειται για μια μέθοδο σύμφωνα με την οποία η εκτίμηση του δείκτη εδάφους μπορεί να γίνει με βάση το λόγο της επιτρεπόμενης τάσης φόρτισης ενός συγκεκριμένου στοιχείου θεμελίωσης προς την αντίστοιχη μέση αναμενόμενη καθίζηση. Δηλαδή:

$$K \approx \sigma_{\text{επιτρ.}} / w_{(\text{αναμενόμενη})} \tag{2.129}$$

Η επιτρεπόμενη τάση φόρτισης του εδάφους μπορεί να προσδιοριστεί είτε με θεωρητικές μεθόδους (π.χ. μέθοδος Terzaghi ή μέθοδος Hansen), είτε με επί τόπου δοκιμές (π.χ. δοκιμή διείσδυσης πρότυπου ή στατικού πενετρομέτρου) και συσχέτιση των αποτελεσμάτων με εμπειρικούς πίνακες ή με αναγωγή τους στις βασικές μηχανικές ιδιότητες του εδάφους (Αναγνωστόπουλος (1994)). Επιπλέον μπορεί να γίνει και χρήση ειδικών πινάκων διαφόρων Κανονισμών οι οποίοι δίνουν ενδεικτικές τιμές των επιτρεπομένων τάσεων σε σχέση με την κατηγορία του εδάφους. Η προσφυγή στους πίνακες αυτούς είναι αναπόφευκτη όταν δεν είναι διαθέσιμα απαραίτητα γεωτεχνικά δεδομένα. Η αναμενόμενη καθίζηση μπορεί να εκτιμηθεί με τις γνωστές μεθόδους της Εδαφομηχανικής (Τσότσος (1991), Αναγνωστόπουλος (1994)).

2.4.3. Η δεύτερη παράμετρος των προσομοιωμάτων

Η φυσική σημασία της δεύτερης παραμέτρου των προσομοιωμάτων δεν είναι εποπτικά πάντα σαφής ούτε και μονοσήμαντα ορισμένη, καθώς – όπως τονίστηκε στην Παράγραφο 2.2.2 – ορίζεται διαφορετικά, ανάλογα με το μηχανικό προσομοίωμα που λαμβάνεται υπόψη. Σε γενικές γραμμές, οι μέθοδοι προσδιορισμού της δεύτερης παραμέτρου είναι ίδιες με τις μεθόδους προσδιορισμού του δείκτη εδάφους (Παράγραφος 2.4.2). Ωστόσο, το γεγονός ότι για τον δείκτη εδάφους – η φυσική σημασία του οποίου είναι ξεκάθαρη – οι διάφορες προσεγγίσεις οδηγούν σε πολύ διαφορετικά μεταξύ τους αποτελέσματα προϊδεάζει για την δυσκολία ενός αξιόπιστου προσδιορισμού της τιμής της δεύτερης παραμέτρου.

Σύμφωνα με τον Selvadurai (1979), για τον προσδιορισμό της δεύτερης παραμέτρου απαιτείται όχι μόνον η μελέτη των μετακινήσεων ακριβώς κάτω από την επιφάνεια του φορτιζόμενου σώματος, αλλά και στην αμέσως γειτνιάζουσα περιοχή. Το γεγονός αυτό μπορεί να εξηγηθεί πολύ εύκολα, αν υπενθυμιστεί ότι τα προσομοιώματα των δυο παραμέτρων έχουν τη χαρακτηριστική ιδιότητα να λαμβάνουν υπόψη την επιρροή

των παραμορφώσεων του εδάφους εκατέρωθεν του φορέα θεμελίωσης. Επομένως, η καταγραφή της μορφής των κατακορύφων μετακινήσεων στην γειτνιάζουσα με το φορέα θεμελίωσης περιοχή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέτρο της δεύτερης παραμέτρου (Loof (1965). Πειραματικές μέθοδοι προσδιορισμού της μορφής των μετακινήσεων είναι διαθέσιμες στη βιβλιογραφία (Selvadurai (1979), σελ. 419), ωστόσο δεν κατέστη δυνατός ο εντοπισμός κάποιας εφαρμογής τους για τον προσδιορισμό της τιμής της δεύτερης παραμέτρου. Μια από τις προτεινόμενες μεθόδους συνίσταται στην εφαρμογή έκκεντρου και όχι κεντρικού φορτίου σε δοκιμαστικές φορτίσεις πλάκας (Pasternak (1954) και Kerr (1965)). Από την μέτρηση της κατακόρυφης μετακίνησης και της στροφής της δοκιμαστικής πλάκας, είναι δυνατή η εκτίμηση των τιμών των δυο παραμέτρων K, G.

Όσον αφορά τις αναλυτικές μεθόδους προσδιορισμού της δεύτερης παραμέτρου, θα πρέπει να τονιστεί ότι η μοναδική εφαρμοσμένη μέθοδος είναι η μέθοδος του Vlasov (1960) και των Vallabhan και Das [(1988), (1991α), (1991β)], όπως τονίστηκε και στις σχετικές παραγράφους. Πιο συγκεκριμένα, από την εφαρμογή των εξισώσεων του Vlasov προκύπτουν οι παρακάτω τιμές για την δεύτερη εδαφική παράμετρο ταυτόχρονα με τις τιμές της πρώτης παραμέτρου που δίνονται στις σχέσεις (2.121α – γ).

$$G = \frac{E_o H}{6(1+\nu_o)} \qquad \text{(με βάση τη γραμμική κατανομή (2.28))} \qquad (2.130\alpha)$$

$$G = \frac{E_o}{8\gamma(1+\nu_o)}\left[\frac{\sinh(2\gamma H)-(2\gamma H)}{\sinh^2(\gamma H)}\right] \qquad \text{(με βάση την υπερβολική κατανομή (2.29))} \qquad (2.130\beta)$$

$$G = \frac{E_0}{4\gamma(1+\nu_o)} \qquad \text{(με βάση την εκθετική κατανομή (2.30))} \qquad (2.130\gamma)$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για συνθήκες επίπεδης έντασης, ενώ μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης, εάν αντί των E_o, ν_o γίνει χρήση των E, ν (δηλαδή των πραγματικών τιμών του μέτρου ελαστικότητας και του λόγου του Poisson). Όπως και στην περίπτωση των σχέσεων (2.121α – γ) έτσι και στις παραπάνω σχέσεις απαιτείται η γνώση της παραμέτρου γ. Για τον προσδιορισμό της μπορεί να γίνει χρήση της μεθόδου των Vallabhan και Das. Οι ίδιοι κατέστρωσαν και μια σχέση υπολογισμού της δεύτερης παραμέτρου για την περίπτωση μη ομογενούς υποστρώματος με γραμμικά μεταβαλλόμενο μέτρο ελαστικότητας (βλέπε και Σχέση 2.122):

$$G = \frac{H}{16(\gamma H)^2(1+\nu)}\left[\frac{E_1\left((2\gamma H)\sinh(2\gamma H)-(2\gamma H)^2\right)+(E_2-E_1)\left(\cosh(2\gamma H)-1-2(\gamma H)^2\right)}{\sinh^2(\gamma H)}\right] \qquad (2.131)$$

Στην παραπάνω σχέση E_1, E_2 είναι οι τιμές του μέτρου ελαστικότητας του υποβάθρου στην κορυφή του και στη βάση του αντίστοιχα.

Πέραν της παραπάνω μεθόδου θα πρέπει να γίνει αναφορά και στη μέθοδο του Vardanyan (1966). Πρόκειται για μια παραλλακτική μέθοδο, σύμφωνα με την οποία συγκρίνεται η λύση του προβλήματος κάμψης κυκλικής πλάκας τόσο με το προσομοίωμα δυο παραμέτρων όσο και με το προσομοίωμα του συνεχούς ελαστικού μέσου. Από την σύγκριση των αποτελεσμάτων των δυο λύσεων υπολογίζονται οι δυο εδαφικές παράμετροι. Πρόκειται για μια ιδέα η βασική σύλληψη της οποίας είναι ίδια με την αντίστοιχη των

Biot (1937) και Vesic (1961). Η μέθοδος αυτή, ωστόσο, δεν έχει εφαρμοστεί έως σήμερα – τουλάχιστον σε όσες βιβλιογραφικές αναφορές κατέστη δυνατό να εντοπιστούν – και επομένως δεν υπάρχουν διαθέσιμα αποτελέσματα. Επομένως, η εφαρμογή της για διάφορες κατηγορίες προβλημάτων (εδάφους και περιπτώσεων φόρτισης) θα μπορούσε να αποτελέσει ένα ενδιαφέρον αντικείμενο έρευνας.

2.4.4. Η τρίτη παράμετρος των προσομοιωμάτων

Η φυσική σημασία της τρίτης παραμέτρου εξαρτάται – όπως και στην περίπτωση της δεύτερης – από το προσομοίωμα που λαμβάνεται υπόψη. Έτσι, εάν γίνει χρήση των προσομοιωμάτων των Kerr ή Hetényi (βλέπε Παραγράφους 2.2.3.1 και 2.2.3.3 αντίστοιχα) τότε είναι προφανές ότι η τρίτη παράμετρος έχει φυσική σημασία ανάλογη του δείκτη εδάφους. Αυτό το γεγονός δίνει θεωρητικά την δυνατότητα του αριθμητικού συσχετισμού της τιμής της τρίτης παραμέτρου με την τιμή δείκτη εδάφους, όπως άλλωστε παρατηρείται και από τον Kerr (βλέπε Παράγραφο 2.2.7). Επομένως, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων του Kerr θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και ως ένα γενικευμένο προσομοίωμα δυο παραμέτρων. Στην περίπτωση αυτή περιγράφεται από δυο μόνον παραμέτρους, και η διαφορά του από τα πραγματικά προσομοιώματα δυο παραμέτρων συνίσταται στην διαφορετική κατανομή των τάσεων στην επιφάνεια του εδάφους.

Όσον αφορά το προσομοίωμα του Reissner (1958), (1967) θα πρέπει να τονιστεί, ότι καθώς η βασική του εξίσωση προκύπτει από τις εξισώσεις του συνεχούς ελαστικού μέσου και όχι από κάποιο μηχανικό προσομοίωμα, δεν μπορεί να γίνει κάποιος συσχετισμός της τρίτης παραμέτρου του όπως στην περίπτωση του προσομοιώματος του Kerr. Ωστόσο, όπως προκύπτει από την εξίσωση (2.56), εάν γίνει χρήση του προσομοιώματος του Reissner οι τιμές των τριών παραμέτρων μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των ελαστικών σταθερών E, ν του υποβάθρου.

Όπως και στην περίπτωση της υπόθεσης του Reissner έτσι και στην περίπτωση, κατά την οποία το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων προκύπτει από την εφαρμογή φορμαλιστικών μεθόδων, η φυσική σημασία των παραμέτρων δεν μπορεί να προσδιοριστεί, καθώς οι διαδικασίες των φορμαλιστικών μεθόδων είναι καθαρά μαθηματικές. Ωστόσο, και στην περίπτωση αυτή οι τιμές των τριών παραμέτρων σχετίζονται με τις ελαστικές σταθερές E, ν του υποβάθρου (εξίσωση 2.104).

Κλείνοντας, θα πρέπει να τονιστεί ότι ενδιαφέρον αντικείμενο έρευνας αποτελεί η εφαρμογή μιας αναλυτικής διαδικασίας υπολογισμού των τριών παραμέτρων, ανάλογης της διαδικασίας του Vesic (1961) για το προσομοίωμα Winkler. Μια τέτοια διαδικασία δεν έχει εντοπιστεί έως τώρα στη βιβλιογραφία.

2.5. Η προσομοίωση των δοκών

Στις προηγούμενες παραγράφους του παρόντος κεφαλαίου έγινε μια εκτενής αναφορά στο ένα από τα τρία σκέλη του προβλήματος αλληλεπίδρασης δοκών ή πλακών επί ελαστικού υποβάθρου, δηλαδή το σκέλος το οποίο αφορά στην προσομοίωση του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου. Η ευρύτητα της αναφοράς αυτής οφείλεται, όπως επανειλημμένα τονίστηκε, στις δυσκολίες που ανακύπτουν κατά την προσπάθεια για μια όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστική αλλά ταυτόχρονα εύκολα εφαρμόσιμη προσομοίωση της συμπεριφοράς του εδάφους.

Στην παρούσα παράγραφο θα γίνει αναφορά στο σκέλος του προβλήματος που αφορά την προσομοίωση της συμπεριφοράς των δοκών. Πιο συγκεκριμένα, θα παρουσιαστούν οι βασικές αρχές – παραδοχές προσομοίωσης δοκών που

α. έχουν συμπαγή διατομή με έναν τουλάχιστον άξονα συμμετρίας,

β. υπόκεινται σε μικρές μετακινήσεις και παραμορφώσεις,

γ. το υλικό τους ακολουθεί το γραμμικό ελαστικό νόμο,

δ. φορτίζονται μόνον με συντηρητικά εξωτερικά φορτία,

ε. η διατομή τους διατηρείται σταθερή σε όλο το μήκος τους,

στ. η αξονική παραμόρφωση τους δεν λαμβάνεται υπόψη κατά την θεώρηση της συμπεριφοράς τους κάθετα προς τον άξονα τους.

Έτσι, οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την αξονική συμπεριφορά ενός απειροστού στοιχείου δοκού είναι ανεξάρτητες από τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την συμπεριφορά του καθέτως προς τον άξονα του.

2.5.1. Ελαστική θεωρία α’ και β’ τάξης

Εντός του μεγάλου εύρους του πεδίου εφαρμογών που καλύπτει το γνωστικό αντικείμενο της Ανάλυσης των Κατασκευών εντάσσονται και εφαρμογές, η μελέτη των οποίων εμπίπτει σε μια κατηγορία προβλημάτων που ονομάζονται μη γραμμικά προβλήματα. Με τον γενικό όρο «μη γραμμικά προβλήματα» χαρακτηρίζονται τα προβλήματα που η μαθηματική τους διατύπωση αποτελείται από μη γραμμικές εξισώσεις η επίλυση των οποίων απαιτεί χρήση επαναληπτικών μεθόδων. Τα μη γραμμικά προβλήματα των κατασκευών κατατάσσονται σε δυο βασικές κατηγορίες:

- Στα υλικώς μη γραμμικά προβλήματα, στα πλαίσια των οποίων λαμβάνονται υπόψη μη γραμμικοί νόμοι τάσεων – παραμορφώσεων (ανελαστική – πλαστική συμπεριφορά), και
- Στα γεωμετρικώς μη γραμμικά προβλήματα, τα οποία διακρίνονται σε δυο υποκατηγορίες:

  (α) Προβλήματα στα οποία οι σχέσεις συμβιβαστού (δηλαδή οι σχέσεις μετακινήσεων και παραμορφώσεων) είναι μη γραμμικές, και

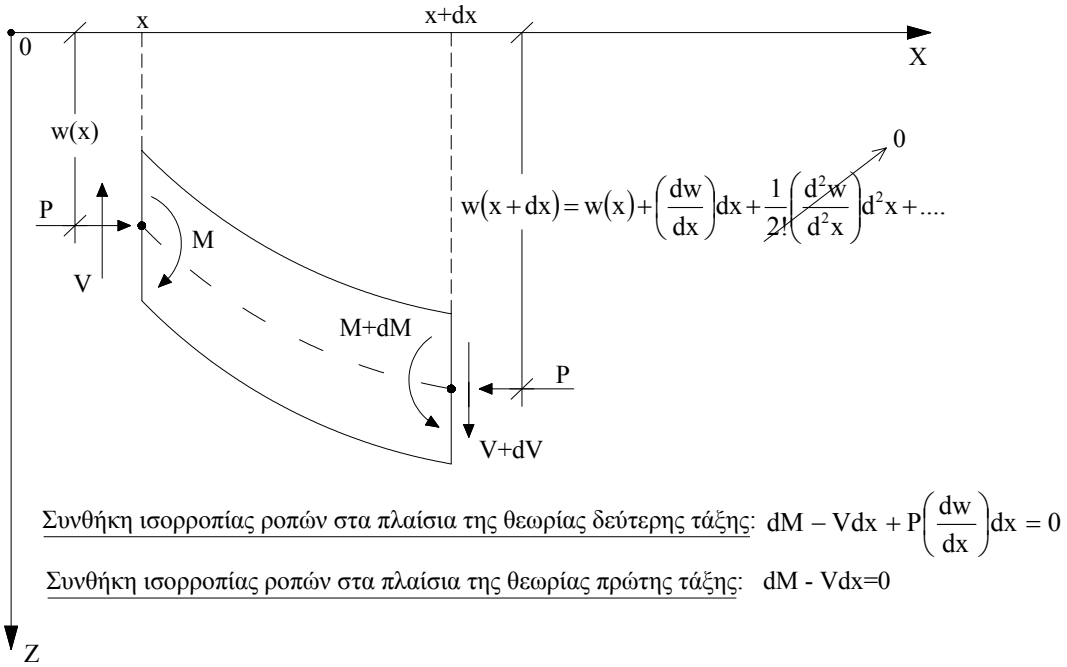
  (β) Προβλήματα στα οποία οι συνθήκες ισορροπίας καταστρώνονται με βάση τη γεωμετρία του παραμορφωμένου φορέα.

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας θα γίνει θεώρηση μόνον των γεωμετρικώς μη γραμμικών προβλημάτων που προκύπτουν από την κατάστρωση των εξισώσεων ισορροπίας με βάση την γεωμετρία του παραμορφωμένου φορέα. Η ανάγκη για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων προκύπτει στην περίπτωση κατά την οποία, ενώ οι μετακινήσεις δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλες, τα γεωμετρικά δεδομένα του φορέα (π.χ. φορείς με υποστυλώματα υψηλής λιγυρότητας) καθιστούν αναγκαία την κατάστρωση των συνθηκών ισορροπίας επί του παραμορφωμένου άξονα, προκειμένου να ληφθούν υπόψη οι πρόσθετες ροπές και δυνάμεις εκτροπής που αναπτύσσονται από τις εκκεντρότητες των αξονικών φορτίων. Σε μια τέτοια περίπτωση, όπου οι παραμορφώσεις δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλες, δεν είναι αναγκαία η θεώρηση μη γραμμικών σχέσεων συμβιβαστού. Τέτοιου τύπου προβλήματα αντιμετωπίζονται με την εφαρμογή της ελαστικής θεωρίας β' τάξης.

Ό όρος θεωρία «β' τάξης» προκύπτει από την παραδοχή που γίνεται για την μαθηματική διατύπωση της σχέσης που διέπει την μεταβολή των μετακινήσεων κατά μήκος του άξονα ενός παραμορφωμένου γραμμικού στοιχείου. Πιο συγκεκριμένα, αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor (π.χ. Riley , Hobson , and Bence (1998)) την συνάρτηση των εγκαρσίων μετακινήσεων w(x) ενός καμπτόμενου γραμμικού στοιχείου προκύπτει η ακόλουθη σχέση (Σχήμα 2.30):

$$w(x+dx) = w(x) + \left(\frac{dw}{dx}\right)dx + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)d^2x + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3w}{dx^3}\right)d^3x + ... \tag{2.132}$$

Στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης διατηρούνται μόνον οι δυο πρώτοι όροι στο δεξιό μέλος της (2.132), ενώ οι υπόλοιποι θεωρούνται αμελητέοι και αγνοούνται. Με εφαρμογή της παραπάνω σχέσης καταστρώνονται οι εξισώσεις ισορροπίας του απειροστού στοιχείου, από τις οποίες γίνεται ο υπολογισμός των εντατικών μεγεθών (Σχήμα 2.30):



Σχήμα 2.30. Η κατάστρωση των συνθηκών ισορροπίας στον παραμορφωμένο άξονα του στοιχείου στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης.

(Ακολουθώντας την ίδια λογική ορίζεται και η θεωρία τρίτης τάξεως, στα πλαίσια της οποίας λαμβάνονται υπόψη τρεις όροι στο δεξιό μέλος της σχέσης 2.132).

Από την κατάστρωση των συνθηκών ισορροπίας του απειροστού στοιχείου (Σχήμα 2.30) προκύπτει η μη γραμμικότητα του προβλήματος, καθώς για τον προσδιορισμό των εντατικών μεγεθών απαιτείται η γνώση των αξονικών δυνάμεων, οι οποίες όμως δεν είναι εξαρχής γνωστές. Επομένως, η διαδικασία επίλυσης στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να είναι επαναληπτική.

Η χρήση της θεωρίας β' τάξης είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό των φορτίων λυγισμού, δηλαδή των αξονικών φορτίων, η υπέρβαση των οποίων οδηγεί σε απώλεια της ευσταθούς ισορροπίας. Η γνώση των φορτίων λυγισμού είναι κρίσιμη στην περίπτωση λεπτών γραμμικών φορέων, οι οποίοι υπόκεινται σε υψηλά θλιπτικά φορτία (π.χ. μεταλλικές κατασκευές, και πασσαλοθεμελιώσεις).
(Για την μελέτη φορέων των οποίων το αξονικό φορτίο έχει υπερβεί το κρίσιμο φορτίο λυγισμού απαιτείται η χρήση της θεωρίας τρίτης τάξης).

Θα πρέπει τέλος να τονιστεί, ότι η επιρροή των φαινομένων που προκύπτουν από την δράση αξονικών φορτίων στην δυναμική συμπεριφορά των γραμμικών στοιχείων (υποστυλωμάτων) είναι επίσης σημαντική. Η εκτίμηση της επιρροής αυτής μπορεί να γίνει μόνο μέσω της θεωρίας β' τάξης.

2.5.2. Θεωρίες Euler-Bernoulli και Timoshenko – Θεώρηση των διατμητικών παραμορφώσεων

Η ακριβής επίλυση του γενικού προβλήματος της κάμψης απλών – πρισματικών δοκών με τυχαία διατομή απαιτεί την επίλυση του τρισδιάστατου προβλήματος ελαστικότητας το οποίο είναι εξαιρετικά πολύπλοκο (βλέπε Παράγραφο 2.2.4) και μόνο σε πολύ ειδικές περιπτώσεις γεωμετρίας και φόρτισης μπορεί να αντιμετωπιστεί. Ωστόσο, η γεωμετρία των πρισματικών δοκών έχει την εξής βασική ιδιότητα: η διάστασή τους στη διεύθυνση της γενέτειρας του πρίσματος είναι πολύ μεγαλύτερη από τις διαστάσεις της διατομής τους. Το γεγονός αυτό δίνει τη δυνατότητα θεώρησης κάποιων παραδοχών μέσω των οποίων επιτυγχάνεται η σημαντική απλοποίηση του προβλήματος. Μέσα στα πλαίσια των απλοποιήσεων αυτών εντάσσονται και οι θεωρίες των Euler-Bernoulli και Timoshenko (1921), οι οποίες αποτελούν τις πιο απλές θεωρίες για τον υπολογισμό της εντατικής κατάστασης απλών – πρισματικών δοκών. Η διαφορά μεταξύ των δυο αυτών προσεγγίσεων συνίσταται στη θεώρηση (θεωρία Timoshenko) ή όχι (θεωρία Euler-Bernoulli) των διατμητικών παραμορφώσεων. Ειδικά για την θεώρηση των διατμητικών παραμορφώσεων έχουν διατυπωθεί και πληρέστερες θεωρίες πέραν της υπόθεσης Timoshenko, η οποία αποτελεί και την πιο απλή προσέγγιση.

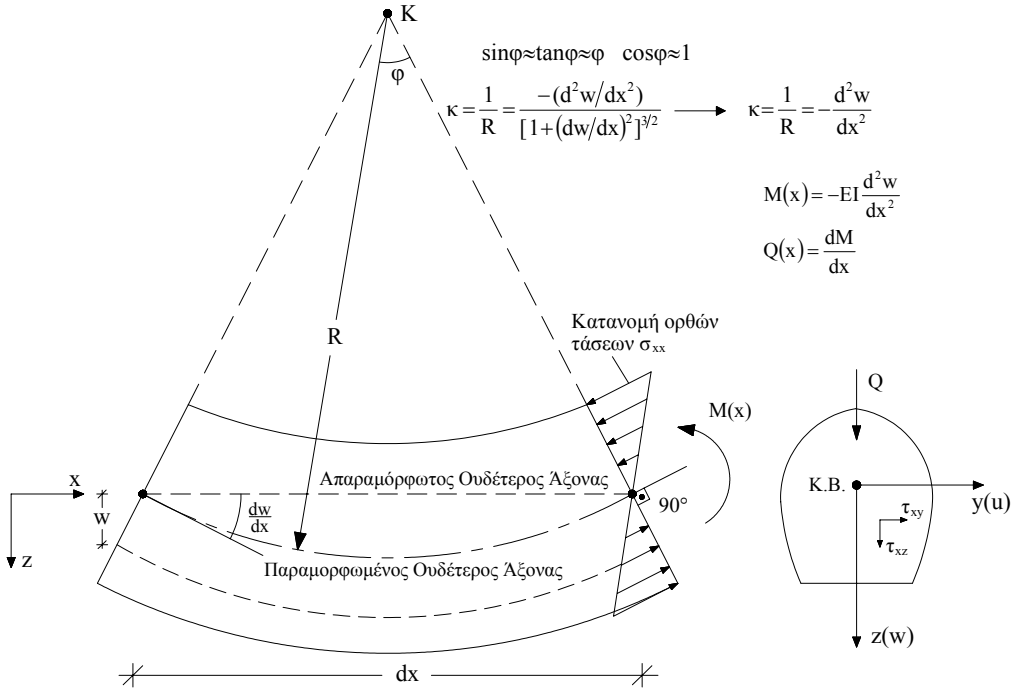
Παρακάτω θα γίνει μια σύντομη περιγραφή των θεωριών Euler-Bernoulli και Timoshenko, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν για την περιγραφή της κάμψης των δοκών στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Επιπλέον, θα γίνει και μια σύντομη αναφορά σε πληρέστερες θεωρίες υπολογισμού των διατμητικών παραμορφώσεων.

2.5.2α Οι υποθέσεις του Bernoulli

Οι υποθέσεις του Bernoulli μπορούν να εφαρμοστούν μόνο στην περίπτωση μικρών παραμορφώσεων και είναι οι εξής (Σχήμα 2.31):

- Ορίζεται άξονας της δοκού το μήκος του οποίου θεωρείται ότι παραμένει σταθερό και μετά την παραμόρφωση και ονομάζεται ουδέτερος άξονας,

- Οι επίπεδες διατομές οι οποίες είναι κάθετες στον ουδέτερο άξονα παραμένουν επίπεδες και κάθετες πάνω στον ουδέτερο άξονα και μετά την παραμόρφωση,
- Η εξωτερική φόρτιση της δοκού παραλαμβάνεται μόνον με ορθές τάσεις κάθετες στη διατομή και με διατμητικές τάσεις πάνω στη διατομή. Οι υπόλοιπες συνιστώσες του τανυστή τάσης θεωρούνται μηδενικές (Σχήμα 2.31).



Σχήμα 2.31. Οι παραδοχές της θεωρίας Bernoulli.

Λόγω των μικρών παραμορφώσεων η ακτίνα καμπυλότητας R του παραμορφωμένου ουδέτερου άξονα δίνεται από τη γραμμική – προσεγγιστική σχέση: $\kappa=\frac{1}{R}\cong-\frac{d^2w}{dx^2}$ και όχι από την ακριβή μη γραμμική (Σχήμα 2.31).

Ξεκινώντας από την σχέση αυτή και με βάση την παραδοχή των μικρών μετακινήσεων (που σε μαθηματικό επίπεδο μεταφράζεται στις εξής σχέσεις: sinφ=tanφ=φ και cosφ=1) μπορεί να αποδειχθεί ότι η σχέση υπολογισμού των ροπών κάμψης είναι:

$$M(x)=-EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)$$

Πρέπει να τονιστεί ότι η παραπάνω σχέση αντιστοιχεί σε προβλήματα μονοαξονικής κάμψης και αναφέρεται στην περίπτωση κατά την οποία το επίπεδο φόρτισης συμπίπτει με άξονα συμμετρίας της διατομής. Η γενίκευση σε προβλήματα διαξονικής κάμψης μπορεί να γίνει σχετικά απλά αφού η παραδοχή της επιπεδότητας των διατομών του Bernoulli επεκτείνεται και στα προβλήματα αυτά αλλά και σε προβλήματα κάμψης τυχαίων μη συμμετρικών διατομών (βλέπε π.χ. Τσαμασφύρος (1990), σελ.5).

Παρά το γεγονός ότι οι διατμητικές παραμορφώσεις θεωρούνται αμελητέες και αγνοούνται, οι αντίστοιχες διατμητικές τάσεις δεν είναι μηδενικές. Η συνισταμένη τους είναι ίση με την τέμνουσα δύναμη

της διατομής Q, η οποία υπολογίζεται από την κλασσική συνθήκη ισορροπίας $Q = dM/dx$ που ισχύει τόσο στα πλαίσια της θεωρίας α' όσο και στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης.

Η παραπάνω ανάλυση στηρίζεται πέραν των παραπάνω παραδοχών και στην παραδοχή των αμελητέων αξονικών παραμορφώσεων (Παραδοχή ατένειας, $EF \to \infty$). Αν αρθεί αυτή η παραδοχή, τότε διαφοροποιείται η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, η θεώρηση των αξονικών παραμορφώσεων εισάγει και δεύτερο άγνωστο γεωμετρικό μέγεθος – τις αξονικές μετακινήσεις – και επομένως η επίλυση του προβλήματος απαιτεί την επίλυση όχι μιας αλλά δυο διαφορικών εξισώσεων (βλέπε Παράγραφο 3.6.4.2).

2.5.2β Θεωρία Timoshenko – Θεώρηση των διατμητικών παραμορφώσεων

Η επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων

Όπως είναι γνωστό, η θεώρηση της επιρροής των διατμητικών παραμορφώσεων στην συμπεριφορά των δοκών υπό εγκάρσια στατική ή δυναμική φόρτιση μπορεί να θεωρηθεί σημαντική όταν:

- η τιμή του λόγου [Ύψος διατομής δοκού / Μήκος ανοίγματος δοκού] υπερβαίνει την τιμή 0.25 (π.χ. υψίκορμες δοκοί ή χθαμαλά τοιχώματα),
- η δοκός υπόκειται σε εγκάρσια φόρτιση που αποτελείται από ισχυρά μοναχικά φορτία,
- η δοκός έχει μη συμπαγή διατομή (με κορμό και πέλματα)

Ειδικά στην περίπτωση κατά την οποία γίνεται αναφορά σε προβλήματα υψίκορμων δοκών επί ελαστικού υποβάθρου, η επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων εξαρτάται και από το λόγο της δυσκαμψίας της δοκού προς το μέτρο ενδοσιμότητας του ελαστικού υποβάθρου. Σημαντικά συμπεράσματα πάνω στο θέμα αυτό προκύπτουν από την ανάλυση του Essenburg (1962) για δοκούς απείρου μήκους επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Winkler. Πιο συγκεκριμένα, το πιο βασικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι η επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων δεν εξαρτάται μόνον από την ενδοσιμότητα του υποβάθρου και την δυσκαμψία της δοκού, αλλά και από την γεωμετρία της διατομής της.

Για την περίπτωση δοκών επί ελαστικού υποβάθρου θα πρέπει επίσης να τονιστεί ότι αυτές πολύ συχνά έχουν διατομές ανάποδου Τ, γεγονός που αν συνδυαστεί και με την παρατήρηση ότι οι θεμελιοδοκοί δέχονται συνήθως ισχυρές τέμνουσες δυνάμεις από τα αξονικά φορτία των υποστυλωμάτων οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για τις δοκούς αυτές η θεώρηση των διατμητικών παραμορφώσεων είναι ιδιαίτερης σημασίας είτε γίνεται ανάλυση με προσομοιώματα μιας είτε δυο παραμέτρων (Shirima και Giger (1992), Aydogan (1995) και Onu (2000)). Εκτός αυτού, στην περίπτωση δοκών επί ελαστικού υποβάθρου, ο λόγος [Ύψος διατομής δοκού / Μήκος ανοίγματος δοκού] είναι γενικά 1.5 – 2 φορές μεγαλύτερος από ότι στην περίπτωση των δοκών της ανωδομής. Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση αυτή είναι πιο συχνή η υπέρβαση της κρίσιμης τιμής του λόγου που οριοθετεί την ανάγκη θεώρησης των διατμητικών παραμορφώσεων.

Πέραν της επιρροής των διατμητικών παραμορφώσεων σε περιπτώσεις στατικής φόρτισης, αποδεδειγμένη είναι και η αντίστοιχη επιρροή στην δυναμική απόκριση. Πιο συγκεκριμένα, έχει αποδειχθεί ότι η επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων και της στροφικής αδράνειας των διατομών (Rayleigh, (1942)) είναι καθοριστική τόσο στο υπολογισμό των ιδιοπεριόδων υψίκορμων δοκών γενικά, όσο και στον

αντίστοιχο υπολογισμό των συνήθων δοκών ειδικά στις υψηλές ιδιομορφές (βλέπε π.χ. Thomas και Abbas (1975)).

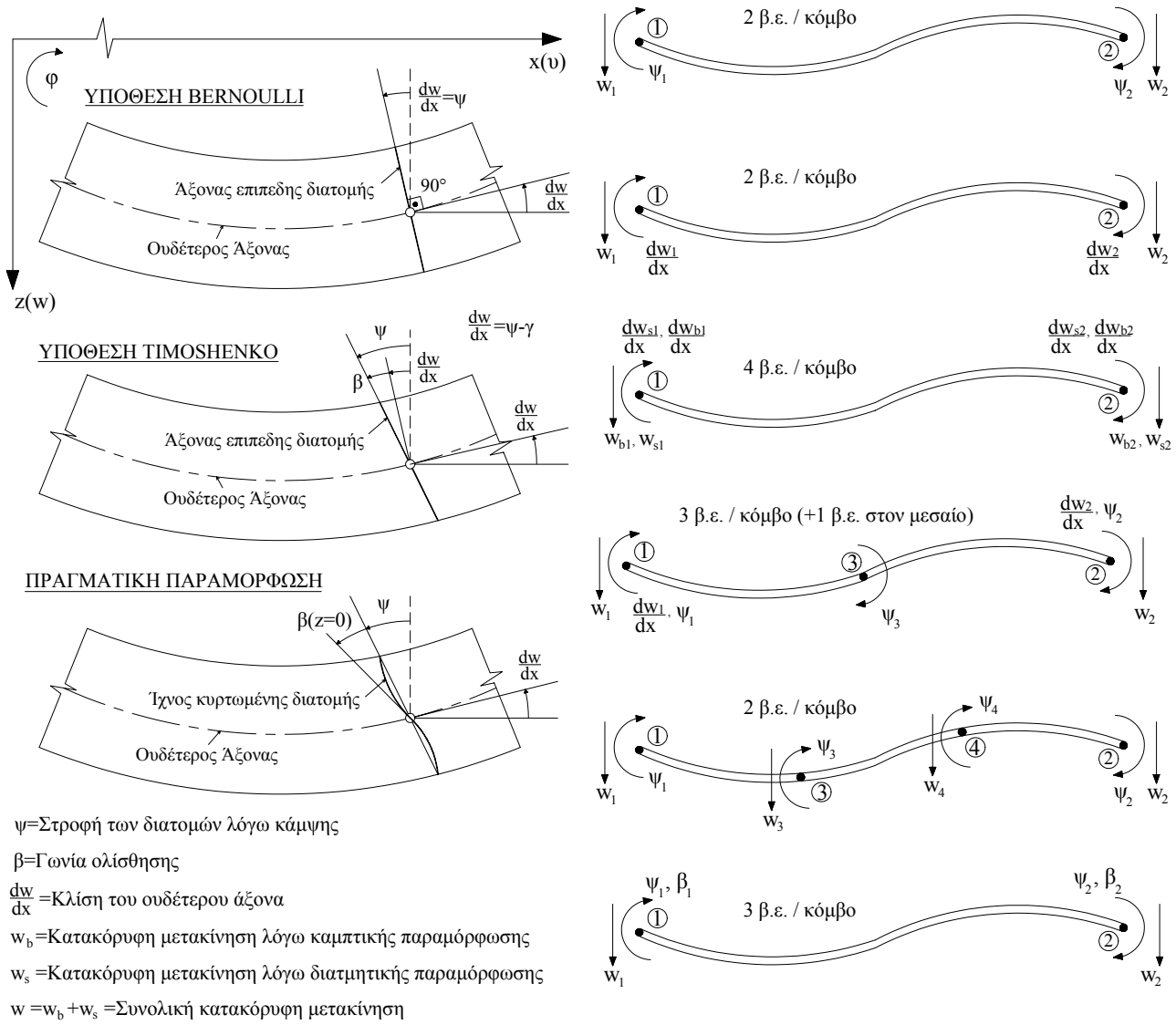
Όσον αφορά την επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων στην ελαστική ευστάθεια θα πρέπει να τονιστεί ότι η αγνόησή τους οδηγεί γενικά σε μεγαλύτερες τιμές φορτίων λυγισμού και ειδικότερα των υψηλότερων. Η διαφοροποίηση αυτή εξαρτάται από το λόγο του ύψους διατομής προς μήκος του ανοίγματος της δοκού, αλλά και από τις συνθήκες στήριξης (Ari – Gur, Elishakoff (1990) και Cheng, Pantelides (1988)).

Η υπόθεση του Timoshenko

Η επίδραση των τεμνουσών δυνάμεων στην παραμόρφωση των πρισματικών δοκών εκφράζεται προσεγγιστικά από την αμοιβαία ολίσθηση δυο «γειτονικών» διατομών (η οποία αγνοείται στα πλαίσια της θεωρίας του Bernoulli). Έτσι, στην περίπτωση αυτή, η συνολική στροφή των διατομών της δοκού δεν εξαρτάται μόνον από την στροφή του καμπυλωμένου άξονα της δοκού, αλλά και από την ολίσθησή τους (Σχήμα 2.32α). Επιπλέον, η παραβολική κατανομή των διατμητικών τάσεων κατά τη διεύθυνση του ύψους της διατομής προκαλεί την κύρτωσή της (βλέπε π.χ. Onu (1987)). Επομένως, οι διατομές οι οποίες προ της παραμόρφωσης ήταν επίπεδες και κάθετες στον απαραμόρφωτο άξονα της δοκού παύουν να είναι επίπεδες και κάθετες στον παραμορφωμένο άξονα. Η θεώρηση των δυο αυτών επιρροών των διατμητικών τάσεων καθιστά το πρόβλημα ιδιαίτερα πολύπλοκο, καθώς η επίλυση του απαιτεί την προσφυγή στη θεωρία της δισδιάστατης ελαστικότητας γεγονός μη επιθυμητό στα πλαίσια της κλασσικής ανάλυσης των γραμμικών φορέων. Για την αποφυγή αυτής της πολυπλοκότητας αγνοείται συνήθως η κύρτωση των διατομών. Έτσι στην περίπτωση αυτή η μόνη επιρροή των διατμητικών τάσεων που λαμβάνεται υπόψη είναι η ολίσθηση των διατομών. Η παραδοχή αυτή – συνοδευόμενη και από την θεώρηση της στροφικής αδράνειας των διατομών για την περίπτωση του δυναμικού προβλήματος – αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη στοιχείων δοκού που είναι γνωστά ως στοιχεία δοκού Timoshenko (Timoshenko (1921)). Άμεση συνέπεια της παραδοχής, είναι η αντικατάσταση της «ακριβούς» παραβολικής κατανομής των διατμητικών τάσεων με μια «ισοδύναμη» σταθερή. Η αντικατάσταση αυτή οδηγεί στην εισαγωγή του συντελεστή διάτμησης (η) μέσω του οποίου επιτυγχάνεται ο υπολογισμός των ισοδυνάμων σταθερών διατμητικών τάσεων. Ο συντελεστής αυτός ορίζεται ως ο λόγος της μέσης τιμής της διατμητικής παραμόρφωσης της διατομής, προς την τιμή της στο ύψος του ουδέτερου άξονα. Η τιμή του εξαρτάται από τη μορφή της διατομής της δοκού και ο προσδιορισμός του παίζει σημαντικό ρόλο στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων (βλέπε π.χ. Cowper (1966) και Davis et al (1972)). Θα πρέπει επίσης να τονιστεί ότι η τιμή του συντελεστή διάτμησης θα πρέπει να διαφοροποιείται κατά την περίπτωση μελέτης του δυναμικού προβλήματος, καθώς η κατανομή των διατμητικών παραμορφώσεων υπό δυναμική φόρτιση, είναι δυνατό να παρεκκλίνει σημαντικά της παραβολικής κατανομής που υφίσταται υπό στατική φόρτιση.

Η υπόθεση Timoshenko αποδίδει σε γενικές γραμμές με ικανοποιητική ακρίβεια την επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων καθώς τα αποτελέσματα της είναι σε αρκετά καλή σύγκλιση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν με χρήση της θεωρίας ελαστικότητας (π.χ. Huang (1961), Thomas (1975)).

Με βάση την υπόθεση του Timoshenko έχουν αναπτυχθεί πολλά στοιχεία δοκού οι εξισώσεις των οποίων αν και στηρίζονται στην ίδια παραδοχή προσεγγίζουν με διαφορετικό τρόπο το πρόβλημα της θεώρησης των διατμητικών παραμορφώσεων. Πιο συγκεκριμένα τα στοιχεία δοκού Timoshenko διακρίνονται σε απλά και σύνθετα στοιχεία (Thomas et al, (1973)).



Σχήμα 2.32. (α) Σύγκριση της θεώρησης των διατμητικών παραμορφώσεων μεταξύ των υποθέσεων Bernoulli, Timoshenko και της πραγματικής κατάστασης, (β) πεπερασμένα στοιχεία δοκού Timoshenko.

Τα απλά στοιχεία χαρακτηρίζονται από τη θεώρηση δυο βαθμών ελευθερίας σε κάθε έναν από τους κόμβους τους (στην περίπτωση της μονοαξονικής κάμψης χωρίς την επιρροή των αξονικών παραμορφώσεων). Οι βαθμοί αυτοί εκτός της κατακόρυφης μετακίνησης w είναι είτε η κλίση της ελαστικής γραμμής της δοκού (dw/dx), είτε η γωνία στροφής των διατομών ψ (Σχήμα 2.32β). Πρέπει όμως να τονιστεί ότι πιο σωστή επιλογή αποτελεί η θεώρηση ως βαθμών ελευθερίας των καμπτικών στροφών ψ διότι στην περίπτωση αυτή προσεγγίζονται καλύτερα οι συνοριακές συνθήκες που αντιστοιχούν σε πλήρη πάκτωση (Thomas et al, (1973)). Τα σύνθετα στοιχεία προσεγγίζουν με πιο ακριβή τρόπο την επιρροή των

διατμητικών παραμορφώσεων (μέσα στα όρια που θέτει η παραδοχή Timoshenko). Αυτό επιτυγχάνεται είτε με τη θεώρηση τριών ή τεσσάρων βαθμών ελευθερίας ανά κόμβο, είτε με την θεώρηση στοιχείων με εσωτερικούς κόμβους (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε Thomas et al., (1973), Onu (1983), (1987) και Friedman, Kosmatka (1993)). Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας θα γίνει χρήση της απλής προσέγγισης με δυο βαθμούς ελευθερίας: w και ψ (Σχήμα 2.32β). Η προσέγγιση αυτή είναι η πιο προσιτή στα πλαίσια των συνηθών εφαρμογών και ταυτόχρονα παρέχει ικανοποιητική ακρίβεια στην θεώρηση της επιρροής των διατμητικών παραμορφώσεων ειδικά στην περίπτωση του δυναμικού προβλήματος.

Κλείνοντας την αναφορά στο πρόβλημα της θεώρησης των διατμητικών παραμορφώσεων των δοκών θα πρέπει να γίνει μια σύντομη αναφορά στην προσέγγιση του προβλήματος με τη βοήθεια στοιχείων δοκού ανωτέρας τάξεως. Με τον όρο αυτόν είναι γνωστά στη βιβλιογραφία στοιχεία δοκού, οι εξισώσεις των οποίων είναι σχηματισμένες χωρίς την παραδοχή της επιπεδότητας των διατομών όπως οι αντίστοιχες εξισώσεις των δοκών Timoshenko. Επομένως λαμβάνεται υπόψη η κύρτωση των διατομών και η παραβολική κατανομή των διατμητικών τάσεων. Έτσι επιτυγχάνεται μια πιο ακριβής προσέγγιση της διατμητικής παραμόρφωσης, με αντίτιμο βέβαια την ανάγκη προσφυγής σε συνθετότερες τεχνικές επίλυσης των εξισώσεων που προκύπτουν. Θα πρέπει επίσης να τονιστεί ότι η χρήση των θεωριών ανωτέρας τάξης απαλλάσσει τους υπολογισμούς από την επιρροή του συντελεστή διάτμησης. Περισσότερες λεπτομέρειες πάνω στην προσέγγιση αυτή μπορούν να αντληθούν από τις βιβλιογραφικές αναφορές (π.χ. Stephen και Levinson (1979), Petrolito (1995), Der Ingenieurbau (1995), Eisenberger (2003)).

2.5.3. Ταξινόμηση των δοκών συναρτήσει σχετικής δυσκαμψίας δοκού / υποβάθρου

Στα πλαίσια της ανάλυσης των δοκών επί ελαστικού υποβάθρου, σημαντικός παράγοντας είναι και η σχετική δυσκαμψία του συστήματος δοκός – υπόβαθρο. Η σχετική αυτή δυσκαμψία είναι ένα αδιάστατο μέγεθος το οποίο εκφράζεται συναρτήσει των παραγόντων που αντιπροσωπεύουν την συμπεριφορά του εδάφους – και είναι ανάλογοι του προσομοιώματος που χρησιμοποιείται – και των παραγόντων που αντιπροσωπεύουν την παραμορφωσιμότητα των δοκών. Λαμβάνοντας υπόψη την τιμή της σχετικής δυσκαμψίας του συστήματος δοκός / υπόβαθρο είναι δυνατή η απλοποίηση του προβλήματος, καθώς ανάλογα με την τιμή της είναι δυνατό να αγνοηθούν συγκεκριμένοι παράγοντες όπως η παραμορφωσιμότητα της δοκού, το μήκος της κ.λ.π.

Επειδή η σχετική δυσκαμψία εξαρτάται από το προσομοίωμα του εδάφους (Winkler, προσομοιώματα πολλών παραμέτρων ή συνεχές ελαστικό μέσο) αλλά και το προσομοίωμα της δοκού (Euler ή Timoshenko), παρακάτω θα δοθεί συγκεκριμένα η κατηγοριοποίηση των δοκών Euler όπως είναι διαθέσιμη σε συγκεκριμένες βιβλιογραφικές πηγές.

- <u>Δοκοί Euler επί ελαστικού υποβάθρου Winkler (Hetenyi (1946)</u>: Η ταξινόμηση των δοκών Euler επί ελαστικού υποβάθρου Winkler πραγματοποιείται με βάση το αδιάστατο μέγεθος λL:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{Kb}{4EI}} \tag{2.133}$$

Όπου το λ είναι το χαρακτηριστικό μήκος της δοκού, L είναι το πραγματικό της μήκος, K είναι ο δείκτης

εδάφους, EI η δυσκαμψία της δοκού και b το πλάτος της διατομής της. Το μέγεθος λL είναι ένα «μέτρο» της καμπυλότητας της δοκού αλλά και του ρυθμού με τον οποίο η επιρροή της φόρτισης αποσβένεται κατά μήκος της δοκού.

Με βάση το μέγεθος αυτό επιτυγχάνεται η κατηγοριοποίηση των δοκών Euler επί ελαστικού υποβάθρου Winkler με βάση το μήκος τους, σε τρεις κατηγορίες:

I. Άκαμπτες δοκοί: $\lambda L<\pi/4$

II. Δοκοί πεπερασμένου μήκους: $\pi/4<\lambda L<\pi$

III. Δοκοί απείρου μήκους: $\lambda L>\pi$

Οι δοκοί της κατηγορίας I μπορούν να θεωρηθούν άκαμπτες καθώς οι παραμορφώσεις τους είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις παραμορφώσεις του υποβάθρου. Οι δοκοί της κατηγορίας II απαιτούν την πλήρη ανάλυση που απαιτείται για συνήθεις δοκούς πεπερασμένου μήκους, καθώς δεν μπορούν να γίνουν γι' αυτές απλοποιητικές παραδοχές. Για τις δοκούς της κατηγορίας III η επίδραση των φορτίων που δρουν στα άκρα τους είναι αμελητέα και επομένως μπορούν να αντιμετωπιστούν με βάση τις εξισώσεις των δοκών απείρου μήκους. Πρέπει τέλος να τονιστεί ότι τα όρια μεταξύ των τριών κατηγοριών δεν είναι αυστηρά ορισμένα, και επομένως, όταν η σχετική δυσκαμψία μιας δοκού είναι κοντά στα όρια αυτά, είναι προτιμότερο η δοκός να επιλύεται με βάση την πλήρη ανάλυση δοκών πεπερασμένου μήκους.

- Δοκοί Euler επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων (Vlasov και Leont'ev (1960)): Η κατηγοριοποίηση των δοκών επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων δεν είναι τόσο ξεκάθαρη όσο στην περίπτωση του ελαστικού υποβάθρου τύπου Winkler. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στην περίπτωση αυτή η συμπεριφορά του εδάφους δεν περιγράφεται από μια αλλά από δυο παραμέτρους. Ωστόσο οι Vlasov και Leont'ev προχώρησαν στην διατύπωση του παρακάτω μεγέθους:

$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{(1-\nu)GbL^3}{8EI(1-2\nu)}} \tag{2.134}$$

το οποίο αποτελεί τον δείκτη σχετικής δυσκαμψίας εδάφους / υποβάθρου στην περίπτωση κατά την οποία γίνεται η παραδοχή της προσομοίωσης του εδάφους με προσομοίωμα δυο παραμέτρων. Στην παραπάνω σχέση G είναι το μέτρο διάτμησης του εδάφους και ν ο λόγος του Poison. Τα μεγέθη αυτά συσχετίζονται με τις δυο παραμέτρους του προσομοιώματος k, t μέσω των σχέσεων (2.26α), (2.26β). Τα υπόλοιπα μεγέθη που υπεισέρχονται στην σχέση (2.134) ορίζονται ακριβώς όπως στη σχέση (2.133). Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής μπορεί να γίνει μια κατηγοριοποίηση των δοκών σε τρεις κατηγορίες όπως ακριβώς και στην περίπτωση του υποβάθρου τύπου Winkler. Ο ορισμός όμως των ορίων των τριών αυτών κατηγοριών δεν είναι μονοσήμαντος λόγω του γεγονότος ότι στο προσομοίωμα του Vlasov δεν υπεισέρχονται μόνον οι δυο παράμετροι k, t αλλά και η παράμετρος γ καθώς και η συνάρτηση που καθορίζει την κατανομή των κατακορύφων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου (Παράγραφος 2.2.2.5). Έτσι ο Vlasov για ένα συγκεκριμένο συνδυασμό των παραμέτρων αυτών και για συγκεκριμένη φόρτιση δίνει τα παρακάτω όρια (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε Vlasov και Leont'ev (1966) σελ. 79 – 81):

I. Άκαμπτες δοκοί: $\lambda<0,86$

II. Δοκοί πεπερασμένου μήκους: $0,86<\lambda<1,85$

III. Δοκοί απείρου μήκους: $\lambda>1,85$

- Δοκοί Euler επί συνεχούς ελαστικού μέσου (Gorbunov – Posadov και Serebrjanyi (1961)) και (Vesic (1961)): Για την περίπτωση αυτή υπάρχουν δυο διαφορετικές προσεγγίσεις. Η πρώτη οφείλεται στους Gorbunov – Posadov και Serebrjanyi σύμφωνα με την οποία ορίζεται η παρακάτω κατηγοριοποίηση:

I. Άκαμπτες δοκοί: $\lambda_e<0,84$

II. Δοκοί πεπερασμένου μήκους: $0,84<\lambda_e<1,78$

III. Δοκοί απείρου μήκους: $\lambda_e>1,78$

όπου ο δείκτης σχετικής δυσκαμψίας λ_e (ή δείκτης ευκαμψίας της δοκού σύμφωνα με τον αρχικό ορισμό του) στη παρούσα περίπτωση δίνεται από την σχέση:

$$\lambda_e = \sqrt[4]{\frac{\pi E_o b L^3}{32(1-\nu_o^2)EI}} \tag{2.135}$$

όπου E_o, ν_o είναι οι ελαστικές σταθερές του υποβάθρου.

Αντιστοίχως κατά τον Vesic υφίσταται η παρακάτω κατηγοριοποίηση:

I. Άκαμπτες δοκοί: $\lambda L<0,80$

II. Δοκοί πεπερασμένου μήκους: $0,80<\lambda L<5,00$

III. Δοκοί απείρου μήκους: $\lambda L>5,00$

όπου ο δείκτης σχετικής δυσκαμψίας κατά Vesic είναι:

$$\lambda = \sqrt[4]{\left(\frac{0,65}{4EI}\right)\left(\frac{E_o}{1-\nu_o^2}\right)}\sqrt[12]{\frac{E_o b^4}{EI}} \tag{2.136}$$

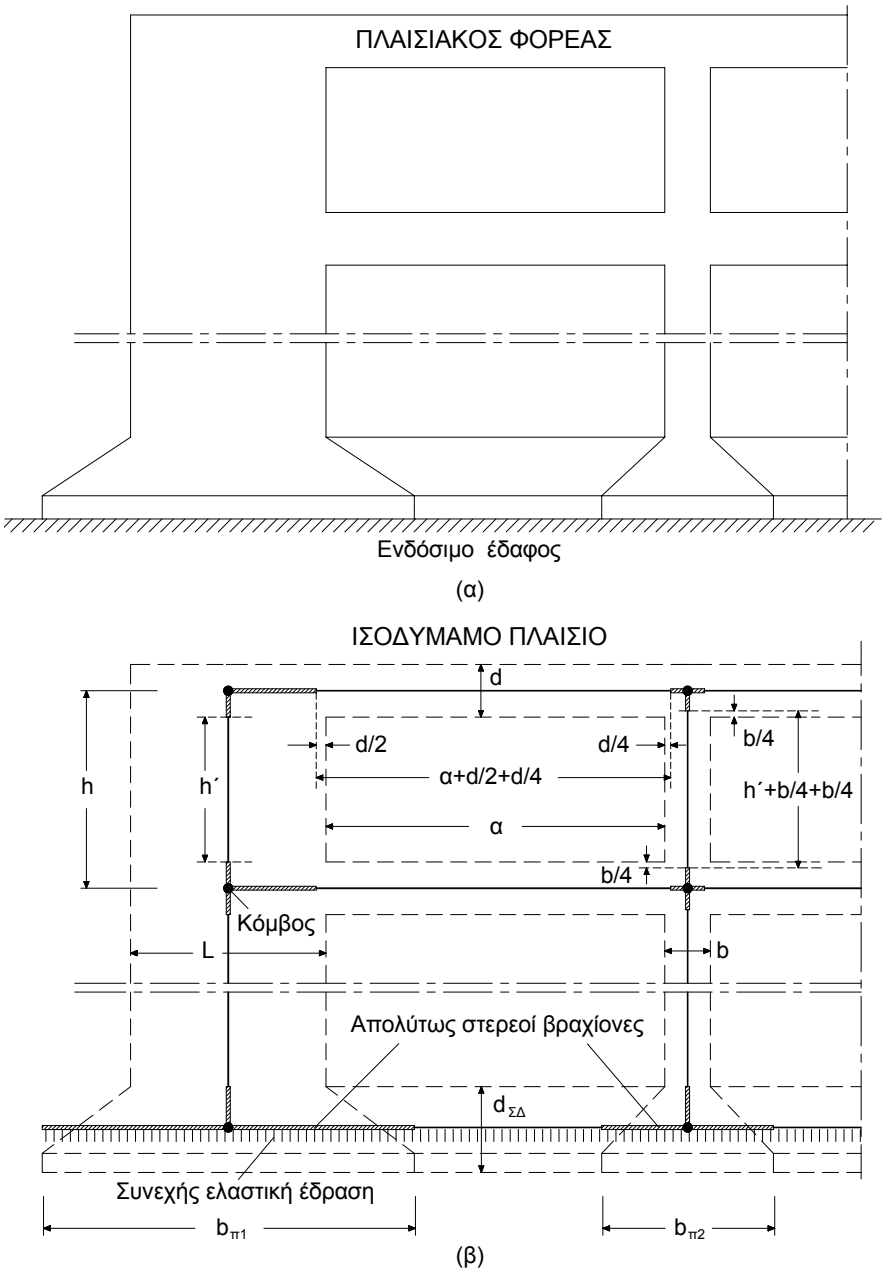
2.5.4. Θεώρηση των απολύτως στερεών βραχιόνων στην προσομοίωση των πλαισίων

Η θεώρηση των απολύτως στερεών βραχιόνων αποτελεί μια από τις τεχνικές προσομοίωσης των κτιριακών κατασκευών αλλά και μηχανολογικού εξοπλισμού (βλέπε π.χ. White και Heppler (1995)). Οι εφαρμογές τους καλύπτουν πολλά τμήματα ενός κτιριακού φορέα καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν (Σχήμα 2.33):

- για την προσομοίωση του σώματος των απλών κόμβων δοκών – υποστυλωμάτων,
- για την προσομοίωση των επιπέδων και των χωρικών τοιχίων με βάση το μοντέλο ισοδυνάμου πλαισίου (βλέπε π.χ. MacLeod (1973) και Αβραμίδης (1993)),
- για την προσομοίωση του σώματος των πεδίλων (τα οποία είναι δομικά στοιχεία με πολύ μεγάλη μάζα και πρακτικά απαραμόρφωτα) αλλά και κόμβων πεδιλοδοκών με επίπεδα τοιχώματα ή υποστυλώματα,
- για την προσομοίωση γενικά έκκεντρων συνδέσεων μεταξύ δομικών στοιχείων,

Παλαιότερα οι παραπάνω προσομοιώσεις πραγματοποιούνταν με ένα αριθμητικό τέχνασμα με βάση το οποίο, τα τμήματα των στοιχείων τα οποία θεωρείται ότι συμπεριφέρονται ως στερεά σώματα προσομοιώνονται με κλασικά στοιχεία δοκού, στα οποία όμως προσδίδονται πολύ μεγάλες τιμές για τα αδρανειακά χαρακτηριστικά των διατομών τους (ροπές αδράνειας, εμβαδά διατομών κ.τ.λ.). Το τέχνασμα

αυτό πέραν του ότι εισήγαγε την ανάγκη εμπειρικού ορισμού των τιμών των αδρανειακών χαρακτηριστικών που προσεγγίζουν την συμπεριφορά απολύτως στερεού σώματος, οδηγούσε πολύ συχνά σε αριθμητικές αστάθειες κατά το σχηματισμό των μητρώων δυσκαμψίας (βλέπε π.χ. Αβραμίδης (1995) σελ. 204).



Σχήμα 2.33. (α) Ο τυπικός πλαισιακός φορέας Ο/Σ, (β) η χρήση των απολύτως στερεών βραχιόνων στην προσομοίωση συγκεκριμένων περιοχών του φορέα.

Τα προβλήματα αυτά αντιμετωπίστηκαν με την εμφάνιση στη βιβλιογραφία πεπερασμένων στοιχείων δοκού στα μητρώα δυσκαμψίας των οποίων είναι ενσωματωμένη αυτόματα η επιρροή απολύτων στερεών ζωνών – βραχιόνων (rigid offsets) στα άκρα τους, (βλέπε π.χ. Ghali – Neville, και Der Ingenieurbau (1995), σελ. 37). Τέτοιου είδους πεπερασμένα στοιχεία είναι πλέον ενσωματωμένα και σε όλα σχεδόν τα προγράμματα ανάλυσης κατασκευών τόσο επαγγελματικής όσο και ακαδημαϊκής χρήσης (π.χ. ETABS Version 7.20 (1999), και SAP Version 7.42 (2000)).

Ειδικά για την περίπτωση της προσομοίωσης φορέων θεμελίωσης (είτε μεμονωμένων πεδίλων με συνδετήριες δοκούς, είτε εσχάρας πεδιλοδοκών), η χρήση ειδικών στοιχείων με ενσωματωμένους απολύτως στερεούς βραχίονες θα πρέπει να συνδυαστεί με την αυτόματη θεώρηση της ελαστικής έδρασης σε όλο το εύρος του στοιχείου. Τέτοιας μορφής στοιχεία έχουν εμφανιστεί σχετικά πρόσφατα στη βιβλιογραφία, για την περίπτωση ελαστικής έδρασης τύπου Winkler ή τύπου Pasternak (Αβραμίδης και Μορφίδης (2000), (2002)), όχι όμως και για ελαστική έδραση τριών παραμέτρων.

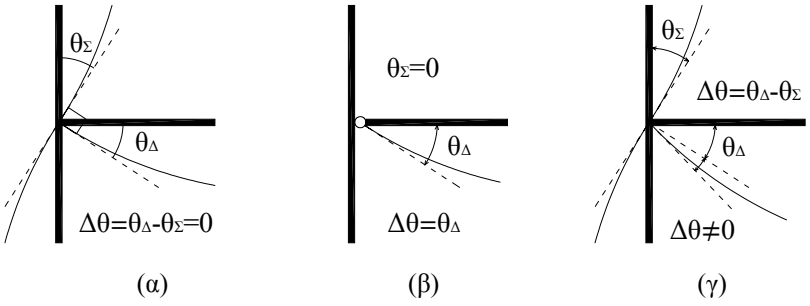
Κλείνοντας την αναφορά στους απολύτως στερεούς βραχίονες, θα πρέπει να γίνει και μια γενικότερη παρατήρηση στην χρησιμότητα της έννοιας του απολύτως στερεού σώματος (δοκού και κυρίως πλάκας) στην αξιολόγηση των μηχανικών προσομοιωμάτων του ελαστικού υποβάθρου. Πιο συγκεκριμένα η εισαγωγή φόρτισης σε διάφορα υπολογιστικά / προσεγγιστικά προσομοιώματα μέσω μιας άκαμπτης πλάκας αποτελεί ένα κριτήριο σύγκρισης με το πιο ακριβές προσομοίωμα ελαστικής συμπεριφοράς του εδάφους, τον ελαστικό ημιχώρο (βλέπε π.χ. Vlasov (1960) ή Kerr (1965)). Αλλά και πέραν της ιδεατής ελαστικής συμπεριφοράς δεν θα πρέπει να παραβλέπεται το γεγονός ότι η κατανομή των τάσεων κάτω από άκαμπτη πλάκα, αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό των συνεκτικών και μη συνεκτικών εδαφών όπως προκύπτει από πάρα πολλές πειραματικές εργασίες (βλέπε π.χ. Lenczner (1962) ή Bowles (1988)). Επομένως η έννοια του απολύτως στερεού σώματος είναι απαραίτητη και για την σύγκριση των πειραματικών – και επομένως πιο ρεαλιστικών – αποτελεσμάτων, με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από καθαρά υπολογιστικά προσομοιώματα.

2.5.5. Ημιάκαμπτες συνδέσεις: Προσομοίωση και εφαρμογές

Ο όρος ημιάκαμπτη σύνδεση αναφέρεται κυρίως στην ανάλυση και το σχεδιασμό των μεταλλικών ή των σύμμεικτων κατασκευών, καθώς σε αντίθεση με την περίπτωση των κατασκευών οπλισμένου σκυροδέματος όπου η μόρφωση και ο υπολογισμός των κόμβων των δομικών στοιχείων γίνεται με στόχο την επίτευξη της μονολιθικότητας, στην περίπτωση των μεταλλικών κατασκευών η μονολιθική μόρφωση των κόμβων δεν είναι εύκολα εφικτή. Στην παρούσα παράγραφο θα δοθούν μερικές βασικές αρχές και ορισμοί για το πρόβλημα της προσομοίωσης των ημιάκαπτων συνδέσεων των κόμβων μεταλλικών κατασκευών. Η μελέτη των ημιάκαμπτων συνδέσεων αποτελεί μεγάλο γνωστικό πεδίο με συνεχή διερεύνηση, και με ειδικές πειραματικές ή και αναλυτικές μεθόδους προσομοίωσης της συμπεριφοράς τους. Η παρούσα διατριβή (όπως διευκρινίστηκε και στην εισαγωγή) δεν έχει ως στόχο την διερεύνηση των μεθόδων προσομοίωσης της συμπεριφοράς των ημιάκαμπτων συνδέσεων αλλά την εφαρμογή της απλής μεθόδου προσομοίωσης τους με τη βοήθεια διακριτών στροφικών ελατηρίων. Επομένως το εύρος παρουσίασης που θα ακολουθήσει είναι περιορισμένο εντός των ορίων που θέτουν οι αναφορές της παρούσας διατριβής στο αντικείμενο.

Ως ημιάκαμπτες ορίζονται οι συνδέσεις δοκών – υποστυλωμάτων η συμπεριφορά των οποίων μπορεί να θεωρηθεί πως είναι ενδιάμεση μεταξύ της συμπεριφοράς των πλήρως άκαμπτων και των απλών συνδέσεων. Πλήρως άκαμπτες συνδέσεις είναι οι συνδέσεις οι οποίες επιτρέπουν την πλήρη μεταφορά τεμνουσών δυνάμεων και ροπών κάμψης και θεωρούνται επαρκώς απαραμόρφωτες έτσι ώστε να διατηρούν τις σχετικές αρχικές – κατασκευαστικές γωνίες μεταξύ των δομικών στοιχείων που συνδέουν, και μετά την

παραμόρφωση του φορέα από την επιβολή των εξωτερικών δράσεων (Σχήμα 2.34α). Στον αντίποδα οι απλές συνδέσεις μεταφέρουν μόνον τέμνουσες δυνάμεις συμπεριφερόμενες ως απλές αρθρώσεις (Σχήμα 2.34β). Αντίθετα από τους δυο «οριακούς» τύπους συνδέσεων, οι ημιάκαμπτες συνδέσεις (οι οποίες θεωρείται ότι αποτελούν την πιο ρεαλιστική απόδοση της πραγματικής συμπεριφοράς κάθε μορφής μεταλλικής σύνδεσης) επιτρέπουν την πλήρη μεταφορά των τεμνουσών δυνάμεων αλλά παράλληλα δεν είναι επαρκώς απαραμόρφωτες έτσι ώστε να απαγορεύουν την σχετική στροφή μεταξύ των δομικών στοιχείων που συνδέουν (Σχήμα 2.34γ). Σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα 3 (1998) η κατάταξη των συνδέσεων δοκών – υποστυλωμάτων μπορεί να γίνει είτε με την ροπή αντοχής τους είτε με την στροφική τους ακαμψία. Όσον αφορά την κατάταξη με βάση την στροφική ακαμψία (που είναι και αντικείμενο της παρούσας) γίνεται καταρχήν διαχωρισμός για τις περιπτώσεις των φορέων με συστήματα οριζόντιας δυσκαμψίας (Braced Frames) και των φορέων χωρίς συστήματα οριζόντιας δυσκαμψίας (Unbraced Frames). Για τις δυο αυτές περιπτώσεις δίνονται χαρακτηριστικά διαγράμματα M – θ στα οποία προδιαγράφονται οι οριακές – συνοριακές «γραμμές» που καθορίζουν τις περιοχές εντός των οποίων μια σύνδεση μπορεί να χαρακτηριστεί είτε ως άκαμπτη, είτε ως ημιάκαμπτη, είτε ως αρθρωτή (Ευρωκώδικας 3 (1998)).

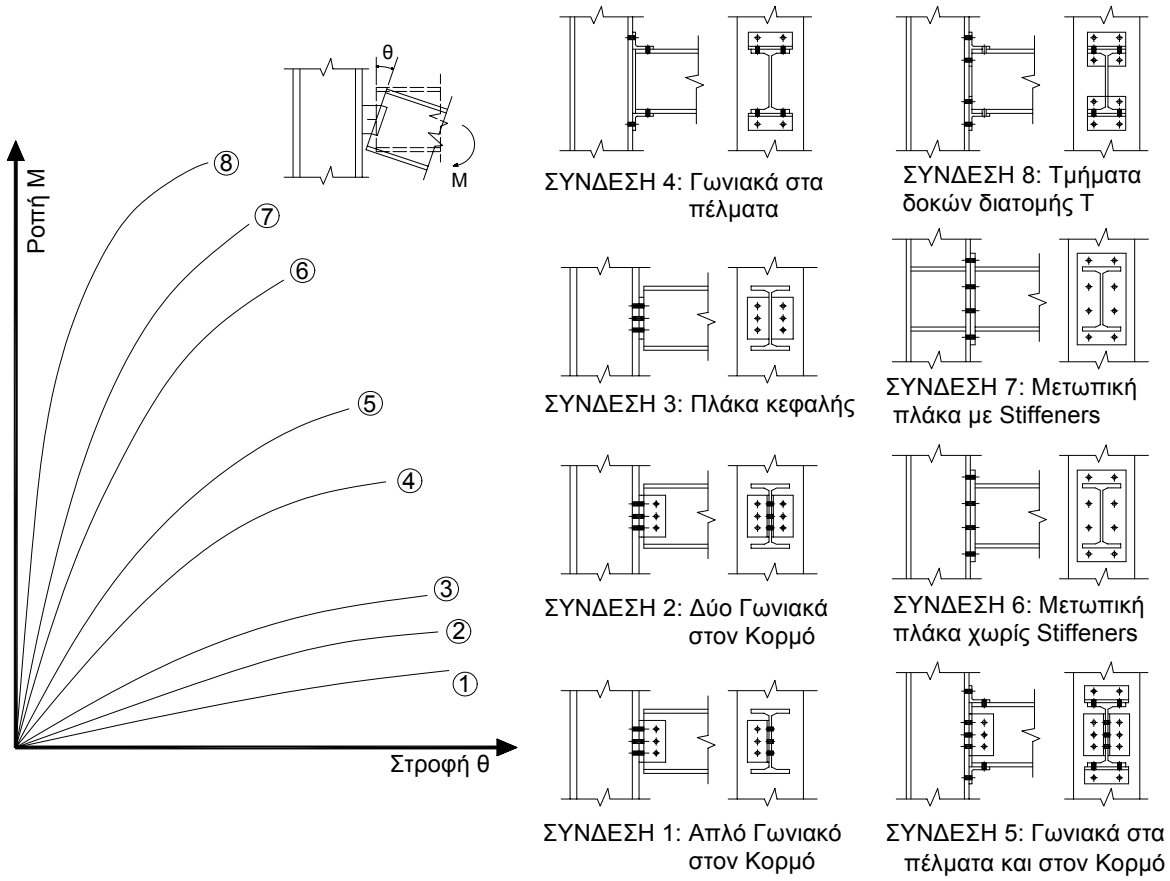


Σχήμα 2.34. Κατάταξη των συνδέσεων με βάση τον βαθμό παραμορφωσιμότητας τους: (α) απολύτως στερεά σύνδεση, (β) απλή – αρθρωτή σύνδεση, (γ) ημιάκαμπτη σύνδεση.

Η πραγματική συμπεριφορά των ημιάκαμπτων μεταλλικών συνδέσεων είναι πολύπλοκη καθώς συνοδεύεται από μη γραμμικά φαινόμενα. Για τον λόγο αυτό η προσομοίωση τους θα πρέπει να γίνεται με μη γραμμικές μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων (με μοντέλα δυο ή και τριών διαστάσεων) έτσι ώστε να λαμβάνονται υπόψη τα φαινόμενα αποκόλλησης και τριβής αλλά και οι υλικές μη γραμμικότητες που συνοδεύουν την απόκριση των μεταλλικών συνδέσεων υπό στατική ή δυναμική φόρτιση (βλέπε π.χ. Ivanyi και Baniotopoulos (2000)). Ωστόσο, για να αποφευχθούν όλες οι δυσκολίες και η εξειδίκευση που απαιτείται για την εφαρμογή αυτών των μεθόδων έχουν καθιερωθεί στην πράξη απλοποιημένοι τρόποι προσομοίωσης των μεταλλικών συνδέσεων. Η πιο συνήθης τρόπος προσομοίωσης προσεγγίζει την συμπεριφορά των ημιακάμπτων συνδέσεων μέσω διακριτών στροφικών ελατηρίων τα οποία τοποθετούνται στους κόμβους των μοντέλων προσομοίωσης των μεταλλικών πλαισίων. Η μέθοδος αυτή πέραν της απλότητας έχει και το πλεονέκτημα της συμβατότητας με τις μεθόδους της κλασσικής μητρωικής ανάλυσης των γραμμικών φορέων, και προτείνεται και από σύγχρονους κανονισμούς (π.χ. Ευρωκώδικας 3 (1992), ή τα εγχειρίδια του AISC (1994)) οι οποίοι δίνουν οδηγίες για την εφαρμογή της. (Επιπλέον ο Ευρωκώδικας 3 προτείνει και την

παράλληλη τοποθέτηση και διαγωνίων μεταφορικών ελατηρίων για την προσομοίωση της διατμητικής παραμόρφωσης του κορμού της διατομής των υποστυλωμάτων).

Η συμπεριφορά των ημιάκαμπτων συνδέσεων, όταν αυτές προσομοιώνονται με τη απλοποιημένη μέθοδο των διακριτών στροφικών ελατηρίων, περιγράφεται από διαγράμματα ροπών (M) – στροφών (θ) τα οποία σχεδιάζονται με βάση πειραματικά δεδομένα και είναι γενικώς μη γραμμικά (τα πρώτα πειράματα αποδίδονται στους Young (1917) και Wilson (1917), βλέπε π.χ. Chen και Kishi (1989) ή Abdalla (2000)). Βάσει των πειραμάτων αυτών έχει αναπτυχθεί μια σειρά από ημιαναλυτικά μοντέλα διαγραμμάτων M – θ τα οποία συνίστανται από μαθηματικές εκφράσεις με τις οποίες επιχειρείται προσέγγιση της συμπεριφοράς των συνδέσεων μέσω προσαρμογής των παραμέτρων τους στα πειραματικά δεδομένα. Πέραν των μοντέλων αυτών υπάρχουν και αμιγώς αναλυτικά μοντέλα τα οποία στηρίζονται στην ανάλυση των συνδέσεων με πολύπλοκες μη γραμμικές αριθμητικές μεθόδους όπως τονίστηκε και πιο πάνω (Baniotopoulos (2000)). Σε γενικές γραμμές τα μοντέλα των διαγραμμάτων M – θ που είναι γνωστά από τη βιβλιογραφία διακρίνονται σε γραμμικά (ή διγραμμικά), σε πολυωνυμικά, και σε εκθετικά μοντέλα (βλέπε π.χ. Chen και Kishi (1989), (1993) ή Abdalla (2000)).



Σχήμα 2.35. Διαγράμματα M – θ για διάφορες κατηγορίες συνδέσεων μεταλλικών φορέων.

Η μορφή των διαγραμμάτων M – θ εξαρτάται από πολλές παραμέτρους που σχετίζονται από τις διαστάσεις, τις μηχανικές ιδιότητες και το σχήμα της σύνθεσης των μεταλλικών στοιχείων που συνθέτουν τον κόμβο. Έτσι στις διάφορες κατηγορίες μεταλλικών κόμβων, αντιστοιχούν συγκεκριμένες καμπύλες M – θ. Μια χαρακτηριστική κατάταξη των συνδέσεων δίνεται από τους Dhillon και O'Malley (1999) μαζί με

τις αντιστοιχούσες καμπύλες Μ – θ όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.35. Εξιδανικευμένα διαγράμματα Μ – θ προτείνονται και από τους κανονισμούς (Ευρωκώδικας 3 (1998)) για γραμμική και μη γραμμική ανάλυση.

Με τη μέθοδο των διακριτών στροφικών ελατηρίων είναι εφικτή και η προσεγγιστική θεώρηση της μη γραμμικής συμπεριφοράς των συνδέσεων για την οποία απαιτούνται επαναληπτικοί αλγόριθμοι οι οποίοι δίνουν τη δυνατότητα υπολογισμού της στροφικής αντίστασης των ελατηρίων για κάθε επίπεδο φόρτισης (δηλαδή για κάθε τιμή της καμπτικής ροπής Μ) της σύνδεσης. Ωστόσο για χαμηλά επίπεδα φόρτισης είναι δυνατή η θεώρηση γραμμικής σχέσης ροπών – στροφών, και η ταυτόχρονη θεώρηση μιας σταθερής τιμής για την στροφική αντίσταση των ελατηρίων. Η τιμή αυτή αντιστοιχεί συνήθως στην εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η καμπύλη Μ – θ στην αρχή των αξόνων του διαγράμματος (Εφαπτομενική τιμή).

Ένα ακόμα πλεονέκτημα της χρήσης στοιχείων με ημιάκαμπτες συνδέσεις αποτελεί και η ευελιξία τους να μετασχηματίζονται, με απλούς μαθηματικούς μετασχηματισμούς, σε κλασσικά αμφίπακτα, σε αμφιαρθρωτά ή σε στοιχεία με συνδυασμούς των δυο αυτών οριακών συνοριακών συνθηκών, εμπεριέχοντας επομένως τα στοιχεία αυτά ως ειδικές υποπεριπτώσεις. Ειδικά η δυνατότητα μετασχηματισμού σε στοιχεία με άρθρωση στο ένα ή και στα δυο άκρα τους δίνει τη δυνατότητα προσομοίωσης των σχηματιζόμενων πλαστικών αρθρώσεων κατά διαδικασία μιας επαυξητικής ανάλυσης κατά την οποία λαμβάνονται υπόψη υλικές μη γραμμικότητες (χρήση ελαστοπλαστικού διαγράμματος Μ – θ). Επιπλέον, με τη χρήση κατάλληλου διγραμμικού μοντέλου Μ – θ στο οποίο ο δεύτερος κλάδος δεν είναι τελείως οριζόντιος αλλά εμφανίζει μια μικρή αλλά πεπερασμένη κλίση – δυσκαμψία, είναι δυνατή η θεώρηση των φαινομένων κράτυνσης του υλικού κατασκευής (βλέπε π.χ. Lionberger και Weaver (1969)).

Τέλος θα πρέπει να τονιστεί ότι θεώρηση των ημιακάμπτων συνδέσεων αποτελεί σημαντικό παράγοντα στην βελτιστοποίηση του οικονομικού σχεδιασμού των μεταλλικών φορέων, καθώς η θεώρηση τους κατά την ανάλυση των κατασκευών οδηγεί σε καλύτερη κατανομή της έντασης σε σύγκριση με κατασκευές στις οποίες οι συνδέσεις θεωρούνται ως απολύτως απαραμόρφωτες. Το γεγονός αυτό έχει ως συνέπεια την καλύτερη εκμετάλλευση του υλικού (βλέπε π.χ. Xu και Crieson (1993) ή Simoes (1996)).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Η γενική περίπτωση της ελαστικως εδραζομενης δοκού επί υποβάθρου τριών παραμέτρων

3.1. Εισαγωγή

Όπως τονίστηκε στο Κεφάλαιο 2 (Παράγραφος 2.2.3) όπου έγινε παρουσίαση των προσομοιωμάτων του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου, ως προσομοιώματα τριών παραμέτρων χαρακτηρίζονται τα προσομοιώματα των Kerr, Hetényi, και Reissner. Τα προσομοιώματα αυτά διαφέρουν μεταξύ τους όχι μόνον όσον αφορά τις βασικές παραδοχές στις οποίες στηρίζονται, αλλά και ως προς την μορφή των διαφορικών εξισώσεων οι οποίες τα διέπουν. Το προσομοίωμα του Kerr έχει την ιδιότητα να αποτελεί άμεση επέκταση του μηχανικού προσομοιώματος των δυο παραμέτρων του Pasternak (Κεφάλαιο 2, Παράγραφοι 2.2.2.2 και 2.2.7). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη δυνατότητα ειδίκευσης των εξισώσεων του – καθώς και κάθε μητρωικού μεγέθους που προκύπτει από αυτές, όπως π.χ. τα μητρώα δυσκαμψίας – στις αντίστοιχες εξισώσεις του προσομοιώματος των δυο παραμέτρων, οι οποίες θα παρουσιαστούν στο Κεφάλαιο 4 (Παράγραφος 4.2).

Στο παρόν κεφάλαιο θα καταστρωθούν και θα επιλυθούν αναλυτικά οι διαφορικές εξισώσεις οι οποίες διέπουν το πρόβλημα της κάμψης των δοκών Euler και Timoshenko επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων τύπου Kerr, τόσο στα πλαίσια της θεωρίας α' όσο και β' τάξης. Πιο συγκεκριμένα, θα σχηματιστούν τα μητρώα δυσκαμψίας, μεταφοράς και φόρτισης (για καθολική τραπεζοειδή φόρτιση, για φόρτιση από μοναχικό φορτίο ή ροπή σε τυχούσα θέση, και για φόρτιση λόγω ανομοιόρφης θερμοκρασιακής μεταβολής), και στη συνέχεια θα πραγματοποιηθεί μια γενίκευση των μητρώων αυτών με:

- τη θεώρηση ακάμπτων βραχιόνων και στροφικών ελατηρίων στα άκρα των δοκών,
- τη θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν των δοκών, και
- τη θεώρηση στρεπτικών και αξονικών βαθμών ελευθερίας με στρεπτική και αξονική ελαστική έδραση.

3.2. Κατάστρωση των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος

3.2.1. Δοκός Timoshenko

3.2.1.1. Θεωρία β' τάξης

Η κατάστρωση της διαφορικής εξίσωσης και στην παρούσα αλλά και στις επόμενες παραγράφους του παρόντος κεφαλαίου, θα γίνει με βάση το επίπεδο πρόβλημα και πιο συγκεκριμένα με βάση την παραδοχή συνθηκών επίπεδης παραμόρφωσης. Για το σκοπό αυτό θεωρείται μια πλακολωρίδα «απείρου» μήκους και πλάτους L, η οποία εδράζεται επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων. Υπενθυμίζεται ότι το μηχανικό μόρφωμα του εδαφικού προσομοιώματος των τριών παραμέτρων σε δυο διαστάσεις, συνίσταται από μια διατμητική στρώση μοναδιαίου πάχους (με μέτρο διάτμησης G' [kN/m]), η οποία εδράζεται επί μιας στρώσης πυκνά τοποθετημένων γραμμικών ελατηρίων σταθεράς K [kN/m^3]. Η πλακολωρίδα, καθώς και η κάθε άλλου τύπου κατασκευή, εδράζεται επί του μηχανικού προσομοιώματος μέσω μια άλλης στρώσης πυκνά τοποθετημένων γραμμικών ελατηρίων σταθεράς C [kN/m^3]. Η φόρτιση της πλακολωρίδας q(x) είναι ομοιόμορφη κατά τη διεύθυνση του μήκους της έτσι ώστε να πληρεί τις προϋποθέσεις ισχύος των συνθηκών

επίπεδης παραμόρφωσης. Λόγω της εκπλήρωσης των συνθηκών του επιπέδου προβλήματος, ο σχηματισμός των εξισώσεων μπορεί να γίνει θεωρώντας μόνον μια λωρίδα πλάτους b (Σχήμα 3.1α).

Για την κατάστρωση της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος θα χρησιμοποιηθεί η αρχή της στάσιμης τιμής της ελαστικής ενέργειας του συστήματος δοκός – ελαστικό υπόβαθρο (Σχήμα 3.1β). Η ελαστική ενέργεια του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\pi_T = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L \Phi\left(\frac{dw}{dx} - \psi\right)^2 dx + \frac{b}{2}\int_0^L C(w - w_k)^2 dx + \frac{b}{2}\int_0^L Kw_k^2 dx + \frac{b}{2}\int_0^L G'\left(\frac{dw_k}{dx}\right)^2 dx -$$

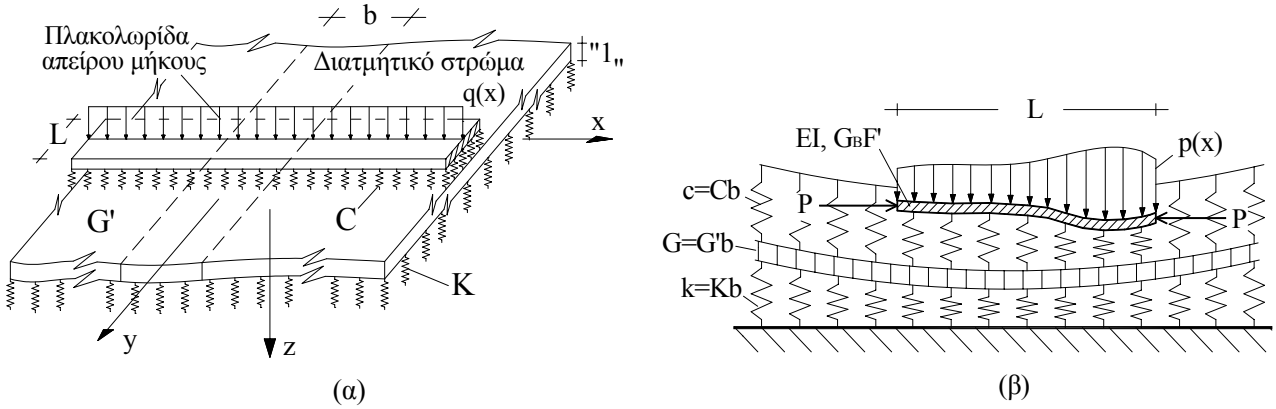
$$- \int_0^L q(x)w dx - \frac{1}{2}\int_0^L P\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx \qquad (3.1)$$

Στην παραπάνω σχέση ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει την ενέργεια καμπτικής παραμόρφωσης της δοκού η οποία εξαρτάται από τη πρώτη παράγωγο της καμπτικής γωνίας στροφής των διατομών ψ.

Ο δεύτερος όρος εκφράζει την ενέργεια παραμόρφωσης λόγω της ολίσθησης των διατομών, όπου $(dw/dx - \psi)=\beta$ είναι η γωνία ολίσθησης των διατομών, $\Phi=G_BF'$, G_B είναι το μέτρο διάτμησης του υλικού της δοκού και F' η επιφάνεια ολίσθησης της διατομής.

Οι επόμενοι όροι αντιπροσωπεύουν κατά σειρά την ενέργεια παραμόρφωσης της άνω στρώσης των ελατηρίων, την ενέργεια παραμόρφωσης της κάτω στρώσης των ελατηρίων, την ενέργεια παραμόρφωσης της διατμητικής στρώσης και το έργο της εξωτερικής φόρτισης που καταπονεί τη δοκό.

Ο τελευταίος όρος εκφράζει την ενέργεια παραμόρφωσης λόγω της αξονικής (θεωρούμενης εδώ ως θλιπτικής) δύναμης P, η οποία εκτελεί έργο μόνον εξαιτίας της αξονικής βράχυνσης της δοκού αφού οι αξονικές παραμορφώσεις θεωρούνται αμελητέες.



Σχήμα 3.1. Αναγωγή του προβλήματος σε πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης (α), Η κάμψη δοκού Timoshenko επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων τύπου Kerr στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης (β).

Όσον αφορά τα μεγέθη w, w_c, w_k υπενθυμίζεται ότι:

- w= η συνολική κατακόρυφη μετακίνηση του άξονα της δοκού.
- w_c= η συνιστώσα της συνολικής κατακόρυφης μετακίνησης, η οποία οφείλεται στην παραμόρφωση της άνω στρώσης των ελατηρίων του προσομοιώματος.
- w_k= η συνιστώσα της συνολικής κατακόρυφης μετακίνησης, η οποία οφείλεται στην παραμόρφωση της κάτω στρώσης των ελατηρίων του προσομοιώματος.

Όπως είναι φυσικό ισχύει:

$$w = w_c + w_k \tag{3.2}$$

Σύμφωνα με την αρχή της στάσιμης τιμής της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης, η συνθήκη ισορροπίας του συστήματος είναι:

$$\pi = \min \tag{3.3}$$

Με βάση τη θεωρία των συναρτησιακών, αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ακραίας τιμής ενός συναρτησιακού αποτελεί ο μηδενισμός της πρώτης μεταβολής δπ. Επειδή όμως η συνθήκη αυτή δεν είναι και ικανή, ο όρος «ακραία τιμή» οφείλει να αντικατασταθεί από τον όρο «στάσιμη τιμή». Τα παραπάνω συνοψίζονται από την εξής συμβολική διατύπωση:

$$\text{Ισορροπία συστήματος} \Rightarrow \pi = \text{stat.} \Rightarrow \delta\pi = 0 \tag{3.4}$$

Επομένως θα πρέπει να υπολογιστεί η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού π_T (Σχέση 3.1).

Πριν σχηματιστεί η πρώτη μεταβολή της ενέργειας παραμόρφωσης του συστήματος, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι οι τρεις άγνωστες συναρτήσεις του προβλήματος (οι μετακινήσεις w, w_c, w_k), δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, καθώς συνδέονται μέσω της (3.2). Όπως είναι γνωστό από το λογισμό των μεταβολών, για να ισχύουν οι κλασσικές σχέσεις με τη βοήθεια των οποίων σχηματίζεται η πρώτη μεταβολή ενός συναρτησιακού, θα πρέπει στην έκφραση του συναρτησιακού αυτού να συμπεριλαμβάνονται συναρτήσεις ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για να παρακαμφθεί το πρόβλημα αυτό, αρκεί να αντικατασταθεί στην σχέση (3.1) η συνάρτηση w_c, από τις w, w_k οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Μετά την αντικατάσταση αυτή και με εφαρμογή των αρχών του λογισμού των μεταβολών, προκύπτει η πρώτη μεταβολή του π_T, η οποία δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned}\delta\pi_T &= \left[EI\left(\frac{d\psi}{dx}\right)\delta\psi\right]_0^L + \int_0^L\left[-EI\frac{d^2\psi}{dx^2} + \Phi\left(\psi - \frac{dw}{dx}\right)\right]\delta\psi dx + \left[\Phi\left(\frac{dw}{dx} - \psi\right)\delta w - P\frac{dw}{dx}\delta w\right]_0^L + \\ &+ \int_0^L\left[c(w_k - w) + kw_k - G\frac{d^2w_k}{dx^2}\right]\delta w_k dx + \int_0^L\left[c(w - w_k) - \Phi\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx} - \psi\right) + P\frac{d^2w}{dx^2} - q(x)\right]\delta w dx + \\ &+ \left[G\left(\frac{dw_k}{dx}\right)\delta w_k\right]_0^L\end{aligned} \tag{3.5}$$

Όπου c=Cb (kN/m^2), k=Kb (kN/m^2), και G=G'b (kN). Στην παραπάνω σχέση έχουν αναδιαταχθεί και συγκεντρωθεί οι όροι οι οποίοι αναφέρονται στις παραλλαγές δw, δψ, δw_k.

Για την εκπλήρωση της συνθήκης $\delta\pi_T=0$ θα πρέπει αφενός οι ολοκληρωτές των ολοκληρωμάτων να είναι όλοι ίσοι με το μηδέν, και αφετέρου οι τιμές των εκφράσεων εντός των αγκυλών να μηδενίζονται στα άκρα της δοκού, δηλαδή στα όρια x=0 και x=L. Έτσι προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$c(w - w_k) - \Phi\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx} - \psi\right) + P\frac{d^2w}{dx^2} - q(x) = 0 \tag{3.6α}$$

$$c(w_k - w) + kw_k - G\frac{d^2w_k}{dx^2} = 0 \tag{3.6β}$$

$$-EI\frac{d^2\psi}{dx^2}+\Phi\left(\psi-\frac{dw}{dx}\right)=0 \tag{3.6γ}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις συνθέτουν ένα σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων με τρεις αγνώστους: την συνολική κατακόρυφη μετακίνηση w, τη συνιστώσα της συνολικής κατακόρυφης μετακίνησης η οποία οφείλεται στην παραμόρφωση της κάτω στρώσης των ελατηρίων w_k, και τη γωνία στροφής των διατομών λόγω των καμπτικών παραμορφώσεων ψ. Με κατάλληλο συνδυασμό των εξισώσεων αυτών επιτυγχάνεται η αποσύζευξη των μεγεθών w_k, ψ ως εξής:

Καταρχήν επιλύεται η (3.6α) ως προς την πρώτη παράγωγο της γωνίας στροφής των διατομών dψ/dx, καθώς και η (3.6β) ως προς την συνολική κατακόρυφη μετακίνηση του άξονα της δοκού w, οπότε προκύπτουν αντίστοιχα:

$$\frac{d\psi}{dx}=\left(1-\frac{P}{\Phi}\right)\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{c}{\Phi}w+\frac{c}{\Phi}w_k+\frac{q}{\Phi} \tag{I}$$

$$w=\left(1+\frac{k}{c}\right)w_k-\left(\frac{G}{c}\right)\frac{d^2w_k}{dx^2} \tag{II}$$

Με συνδυασμό των δυο παραπάνω εκφράσεων – δηλαδή με την εισαγωγή της (II) και της δεύτερης παραγώγου της στην (I) – επιτυγχάνεται ο συσχετισμός των μεγεθών dψ/dx και w_k:

$$\frac{d\psi}{dx}=-\frac{G}{c}\left(1-\frac{P}{\Phi}\right)\frac{d^4w_k}{dx^4}+\left[\left(1-\frac{P}{\Phi}\right)\left(1+\frac{k}{c}\right)+\frac{G}{\Phi}\right]\frac{d^2w_k}{dx^2}-\left(\frac{k}{\Phi}\right)w_k+\frac{q}{\Phi} \tag{III}$$

Τέλος, παραγωγίζοντας μια φορά την (3.6γ) και εισάγοντας σ' αυτήν την (II) την (III) καθώς και τις ανώτερες παραγώγους τους, προκύπτει η αποσυζευγμένη από τις άλλες παραμέτρους διαφορική εξίσωση της μετακίνησης w_k:

$$-\frac{EIG}{c}\left(1-\frac{P}{\Phi}\right)\frac{d^6w_k}{dx^6}+\left[EI\left(1-\frac{P}{\Phi}\right)\left(1+\frac{k}{c}\right)+G\left(\frac{EI}{\Phi}-\frac{P}{c}\right)\right]\frac{d^4w_k}{dx^4}+\left[(P-G)-k\left(\frac{EI}{\Phi}-\frac{P}{c}\right)\right]\frac{d^2w_k}{dx^2}+kw_k+$$
$$+\left(\frac{EI}{\Phi}\right)\frac{d^2q}{dx^2}-q=0 \tag{3.7α}$$

Για την κατάστρωση της αποσυζευγμένης διαφορικής εξίσωσης της γωνίας στροφής των διατομών ψ, θα πρέπει να γίνουν οι κάτωθι μετασχηματισμοί:

Καταρχήν, επιλύονται οι (3.6γ) και (3.6α) ως προς dw/dx και w_k αντίστοιχα, οπότε προκύπτουν:

$$\frac{dw}{dx}=\psi-\left(\frac{EI}{\Phi}\right)\frac{d^2\psi}{dx^2} \tag{IV}$$

$$w_k=\left(\frac{P-\Phi}{c}\right)\frac{d^2w}{dx^2}+w+\left(\frac{\Phi}{c}\right)\frac{d\psi}{dx}-\frac{q}{c} \tag{V}$$

Κατόπιν παραγωγίζεται μια φορά η (V) και εισάγονται σ' αυτήν τόσο η (IV) και οι απαιτούμενες παράγωγοι της. Έτσι επιτυγχάνεται η έκφραση της w_k ως προς την ψ χωρίς να υπεισέρχεται στη σχέση αυτή η w:

$$\frac{dw_k}{dx}=-\frac{EI}{\Phi}\left(\frac{P-\Phi}{c}\right)\frac{d^4\psi}{dx^4}+\left(\frac{P}{c}-\frac{EI}{\Phi}\right)\frac{d^2\psi}{dx^2}+\psi-\left(\frac{1}{c}\right)\frac{dq}{dx} \tag{VI}$$

Τέλος, παραγωγίζοντας μια φορά τη (3.6β) και εισάγοντας σ' αυτή την (IV), την (VI), καθώς και τις απαιτούμενες παράγωγους της τελευταίας, προκύπτει η αποσυζευγμένη διαφορική εξίσωση της στροφής των διατομών ψ:

$$-\frac{EIG}{c}\left(1-\frac{P}{\Phi}\right)\frac{d^6\psi}{dx^6}+\left[EI\left(1-\frac{P}{\Phi}\right)\left(1+\frac{k}{c}\right)+G\left(\frac{EI}{\Phi}-\frac{P}{c}\right)\right]\frac{d^4\psi}{dx^4}+\left[(P-G)-k\left(\frac{EI}{\Phi}-\frac{P}{c}\right)\right]\frac{d^2\psi}{dx^2}+k\psi-$$
$$-\left(1+\frac{k}{c}\right)\frac{dq}{dx}+\frac{G}{c}\frac{d^3q}{dx^3}=0 \qquad (3.7\beta)$$

Οι ομογενείς των παραπάνω εξισώσεων μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\frac{d^6w_k}{dx^6}+J_1\frac{d^4w_k}{dx^4}+J_2\frac{d^2w_k}{dx^2}+J_3w_k=0 \qquad (3.8\alpha)$$

$$\frac{d^6\psi}{dx^6}+J_1\frac{d^4\psi}{dx^4}+J_2\frac{d^2\psi}{dx^2}+J_3\psi=0 \qquad (3.8\beta)$$

Όπου:

$$J_1=-\frac{k+c}{G}+\frac{1}{P-\Phi}\left[c-\left(\frac{\Phi}{EI}\right)P\right] \qquad (3.9\alpha)$$

$$J_2=-\frac{1}{P-\Phi}\left\{-\frac{\Phi}{EI}\left[\frac{P}{G}(k+c)-c\right]+\frac{kc}{G}\right\} \qquad (3.9\beta)$$

$$J_3=\frac{kc}{EIG}\left(\frac{\Phi}{P-\Phi}\right) \qquad (3.9\gamma)$$

Ο τρίτος άγνωστος του προβλήματος, η συνάρτηση w που περιγράφει τη συνολική κατακόρυφη μετακίνηση μπορεί να υπολογιστεί δευτερογενώς, αφού από την εξίσωση (3.6β) προκύπτει:

$$w=\left(1+\frac{k}{c}\right)w_k-\left(\frac{G}{c}\right)\frac{d^2w_k}{dx^2} \qquad (3.10)$$

Επομένως το πρόβλημα της κάμψης δοκού Timoshenko επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων τύπου Kerr στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης, διέπεται από τις εξισώσεις (3.7α), (3.7β) και (3.10).

3.2.1.2. Θεωρία α' τάξης

Για την κατάστρωση των διαφορικών εξισώσεων για την παρούσα περίπτωση είναι δυνατό να γίνει χρήση της μεθόδου που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Ωστόσο υπάρχει δυνατότητα χρήσης των (3.7α), (3.7β) και (3.10) θέτοντας στις εν λόγω σχέσεις μηδενική τιμή για το αξονικό φορτίο P. Επομένως οι διαφορικές εξισώσεις:

$$-\frac{EIG}{c}\frac{d^6w_k}{dx^6}+EI\left[\left(1+\frac{k}{c}\right)+\frac{G}{\Phi}\right]\frac{d^4w_k}{dx^4}-\left(G+\frac{EIk}{\Phi}\right)\frac{d^2w_k}{dx^2}+kw_k+\left(\frac{EI}{\Phi}\right)\frac{d^2q}{dx^2}-q=0 \qquad (3.11\alpha)$$

$$-\frac{EIG}{c}\frac{d^6\psi}{dx^6}+EI\left[\left(1+\frac{k}{c}\right)+\frac{G}{\Phi}\right]\frac{d^4\psi}{dx^4}-\left(G+\frac{EIk}{\Phi}\right)\frac{d^2\psi}{dx^2}+k\psi-\left(1+\frac{k}{c}\right)\frac{dq}{dx}+\frac{G}{c}\frac{d^3q}{dx^3}=0 \qquad (3.11\beta)$$

μαζί με την (3.10) είναι οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα της κάμψης δοκού Timoshenko επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων τύπου Kerr στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης.

Οι ομογενείς εξισώσεις των (3.11α) και (3.11β) μπορούν να γραφούν με τη μορφή των (3.8α) και (3.8β), όπου στην περίπτωση αυτή οι συντελεστές J_1, J_2, J_3 είναι:

$$J_1 = -\left(\frac{k+c}{G} + \frac{c}{\Phi}\right) \tag{3.12α}$$

$$J_2 = \frac{c}{\Phi}\left(\frac{\Phi}{EI} + \frac{k}{G}\right) \tag{3.12β}$$

$$J_3 = -\frac{kc}{EIG} \tag{3.12γ}$$

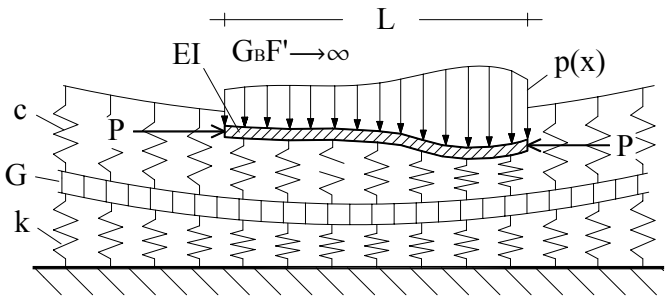
3.2.2. Δοκός Euler – Bernouli

3.2.2.1. Θεωρία β' τάξης

Ακολουθώντας την αρχή της στάσιμης τιμής της ελαστικής ενέργειας του συστήματος δοκός – ελαστικό υπόβαθρο όπως και στην Παράγραφο 3.2.1.1 θα καταστρωθούν οι εξισώσεις της παρούσας περίπτωσης. Η ελαστική ενέργεια του συστήματος είναι (Σχήμα 3.2):

$$\pi_E = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{b}{2}\int_0^L C(w-w_k)^2 dx + \frac{b}{2}\int_0^L Kw_k^2 dx + \frac{b}{2}\int_0^L G'\left(\frac{dw_k}{dx}\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^L P\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx - \int_0^L q(x)w dx \tag{3.13}$$

Η επεξήγηση των όρων που υπεισέρχονται στην παραπάνω σχέση είναι η ίδια με αυτή που δίνεται για την αντίστοιχη σχέση της δοκού Timoshenko (3.1). Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι η ενέργεια παραμόρφωσης λόγω της κάμψης της δοκού εξαρτάται από την καμπυλότητα (d^2w/dx^2) και όχι από τη πρώτη παράγωγο της συνάρτησης (ψ) η οποία εκφράζει τη γωνία στροφής των διατομών, η οποία στα πλαίσια της θεωρίας Timoshenko είναι διάφορη της κλίσης της ελαστικής γραμμής (dw/dx).



Σχήμα 3.2. Η κάμψη δοκού Euler - Bernoulli επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων τύπου Kerr στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης

Η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού π_E είναι:

$$\delta\pi_E = EI\left[\frac{d^2w}{dx^2}\delta\left(\frac{dw}{dx}\right)\right]_0^L + \left[-\left(EI\frac{d^3w}{dx^3} + P\frac{dw}{dx}\right)\delta w\right]_0^L + \int_0^L\left[EI\frac{d^4w}{dx^4} + c(w-w_k) + P\frac{d^2w}{dx^2} - q(x)\right]\delta w dx +$$
$$+\int_0^L\left[kw_k + c(w_k - w) - G\left(\frac{d^2w_k}{dx^2}\right)\right]\delta w_k dx + \left[G\left(\frac{dw_k}{dx}\right)\delta w_k\right]_0^L \tag{3.14}$$

Για να εκπληρωθεί η συνθήκη $\delta\pi_E=0$ θα πρέπει αφενός οι ολοκληρωτές των ολοκληρωμάτων να είναι όλοι ίσοι με το μηδέν και αφετέρου οι τιμές των εκφράσεων εντός των αγκυλών να μηδενίζονται στα όρια x=0 και x=L. Έτσι προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$EI\frac{d^4w}{dx^4}+P\frac{d^2w}{dx^2}+c(w-w_k)-q(x)=0 \tag{3.15α}$$

$$kw_k+c(w_k-w)-G\left(\frac{d^2w_k}{dx^2}\right)=0 \tag{3.15β}$$

Απαλείφοντας το w από την (3.15α) και το w_k από την (3.15β) καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις:

$$-\left[EI\left(\frac{G}{c}\right)\right]\frac{d^6w}{dx^6}+\left[EI\left(1+\frac{k}{c}\right)-P\left(\frac{G}{c}\right)\right]\frac{d^4w}{dx^4}+\left[P\left(1+\frac{k}{c}\right)-G\right]\frac{d^2w}{dx^2}+kw-\left(1+\frac{k}{c}\right)q+\left(\frac{G}{c}\right)\frac{d^2q}{dx^2}=0 \tag{3.16α}$$

$$-\left[EI\left(\frac{G}{c}\right)\right]\frac{d^6w_k}{dx^6}+\left[EI\left(1+\frac{k}{c}\right)-P\left(\frac{G}{c}\right)\right]\frac{d^4w_k}{dx^4}+\left[P\left(1+\frac{k}{c}\right)-G\right]\frac{d^2w_k}{dx^2}+kw_k-q=0 \tag{3.16β}$$

Οι ομογενείς εξισώσεις των παραπάνω εξισώσεων μπορούν να γραφούν με τη μορφή:

$$\frac{d^6w}{dx^6}+J_1\frac{d^4w}{dx^4}+J_2\frac{d^2w}{dx^2}+J_3w=0 \tag{3.17α}$$

$$\frac{d^6w_k}{dx^6}+J_1\frac{d^4w_k}{dx^4}+J_2\frac{d^2w_k}{dx^2}+J_3w_k=0 \tag{3.17β}$$

όπου οι συντελεστές J_1, J_2, J_3 είναι:

$$J_1=-\frac{k+c}{G}+\frac{P}{EI} \tag{3.18α}$$

$$J_2=\frac{c}{EI}-\frac{P}{EI}\left(\frac{k+c}{G}\right) \tag{3.18β}$$

$$J_3=-\frac{kc}{EIG} \tag{3.18γ}$$

3.2.2.2. Θεωρία α' τάξης

Οι εξισώσεις για τη θεωρία α' τάξης προκύπτουν από τις εξισώσεις που σχηματίστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο εάν τεθεί P=0:

$$-\left[EI\left(\frac{G}{c}\right)\right]\frac{d^6w}{dx^6}+\left[EI\left(1+\frac{k}{c}\right)\right]\frac{d^4w}{dx^4}-G\frac{d^2w}{dx^2}+kw-\left(1+\frac{k}{c}\right)q+\left(\frac{G}{c}\right)\frac{d^2q}{dx^2}=0 \tag{3.19α}$$

$$-\left[EI\left(\frac{G}{c}\right)\right]\frac{d^6w_k}{dx^6}+\left[EI\left(1+\frac{k}{c}\right)\right]\frac{d^4w_k}{dx^4}-G\frac{d^2w_k}{dx^2}+kw_k-q=0 \tag{3.19β}$$

Οι αντίστοιχες ομογενείς εξισώσεις μπορούν να γραφούν στη μορφή των (3.18α) και (3.18β), θέτοντας:

$$J_1=-\frac{k+c}{G} \tag{3.20α}$$

$$J_2=\frac{c}{EI} \tag{3.20β}$$

$$J_3 = -\frac{kc}{EIG} \tag{3.20γ}$$

Τέλος θα πρέπει να τονιστεί ότι από τις διαφορικές εξισώσεις που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους μπορούν να προκύψουν οι αντίστοιχες εξισώσεις του προσομοιώματος των δυο παραμέτρων. Για την επίτευξη των μετατροπών αυτών, αρκεί στις εξισώσεις αυτές να θεωρηθεί η οριακή τιμή $c \to \infty$, ενώ παράλληλα θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι στην περίπτωση αυτή $w \equiv w_k$. Επί παραδείγματι, από τις εξισώσεις (3.7α) και (3.7β), εάν θεωρηθεί ότι $c \to \infty$, και $w \equiv w_k$ τότε προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$EI\left[1-\left(\frac{P-G}{\Phi}\right)\right]\frac{d^4w}{dx^4}+\left[P-\left(G+\frac{EIk}{\Phi}\right)\right]\frac{d^2w}{dx^2}+kw+\left(\frac{EI}{\Phi}\right)\frac{d^2q}{dx^2}-q=0 \tag{3.21α}$$

$$EI\left[1-\left(\frac{P-G}{\Phi}\right)\right]\frac{d^4\psi}{dx^4}+\left[P-\left(G+\frac{EIk}{\Phi}\right)\right]\frac{d^2\psi}{dx^2}+k\psi-\frac{dq}{dx}=0 \tag{3.21β}$$

οι οποίες ως γνωστό διέπουν το πρόβλημα της κάμψης δοκού Timoshenko επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης (Παράγραφος 3.2.1.1).

3.3. Λύση και διερεύνηση των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος

3.3.1. Η λύση των διαφορικών εξισώσεων

Όπως αποδείχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, το πρόβλημα της κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων τόσο στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης όσο και στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης διέπεται από δυο διαφορικές εξισώσεις $6^{ης}$ τάξης. Η γενική μορφή των ομογενών διαφορικών εξισώσεων αυτών δίνεται από τις σχέσεις (3.8α), (3.8β) για τη δοκό Timoshenko, και τις (3.18α), (3.18β) για τη δοκό Euler – Bernoulli. Οι συντελεστές των εξισώσεων αυτών, δίνονται συγκεντρωτικά στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 3.1).

Πίνακας 3.1. Εκφράσεις των συντελεστών J_1, J_2, J_3 ανάλογα με τον τύπο της δοκού και την τάξη ανάλυσης

Δοκός / Τάξη ανάλυσης		**J_1**	**J_2**	**J_3**
Euler	α' τάξη	$J_1 = -\frac{k+c}{G}$	$J_2 = \frac{c}{EI}$	$J_3 = -\frac{kc}{EIG}$
	β' τάξη	$J_1 = -\frac{k+c}{G}+\frac{P}{EI}$	$J_2 = \frac{c}{EI}-\frac{P}{EI}\left(\frac{k+c}{G}\right)$	$J_3 = -\frac{kc}{EIG}$
Timoshenko	α' τάξη	$J_1 = -\left(\frac{k+c}{G}+\frac{c}{\Phi}\right)$	$J_2 = \frac{c}{\Phi}\left\{\frac{\Phi}{EI}+\frac{k}{G}\right\}$	$J_3 = -\frac{kc}{EIG}$
	β' τάξη	$J_1 = -\frac{k+c}{G}+\frac{1}{P-\Phi}\left[c-\left(\frac{\Phi}{EI}\right)P\right]$	$J_2 = -\frac{1}{P-\Phi}\left\{-\frac{\Phi}{EI}\left[\frac{P}{G}(k+c)-c\right]+\frac{kc}{G}\right\}$	$J_3 = \frac{kc}{EIG}\left(\frac{\Phi}{P-\Phi}\right)$

Οι εξισώσεις (3.8α), (3.8β), (3.18α), και (3.18β) ανήκουν στην κατηγορία των διαφορικών εξισώσεων με τη γενική μορφή:

$$\frac{d^6y}{dx^6}+J_1\frac{d^4y}{dx^4}+J_2\frac{d^2y}{dx^2}+J_3y=0 \tag{3.22}$$

όπου η συνάρτηση y να ταυτίζεται κάθε φορά με μία εκ των συναρτήσεων w, w_k, ψ.

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (3.22) είναι:

$$r^6 + J_1 r^4 + J_2 r^2 + J_3 = 0 \tag{3.23}$$

Θέτοντας $r^2=\mu$ η (3.23) παίρνει τη μορφή:

$$\mu^3 + J_1\mu^2 + J_2\mu + J_3 = 0 \tag{3.24}$$

Θέτοντας επιπλέον $\mu=t-(J_1/3)$ η (3.24) γίνεται:

$$t^3 + (3\alpha)t + 2\beta = 0 \tag{3.25}$$

Όπου:

$$\alpha = \frac{1}{3}\left[-\frac{J_1^2}{3} + J_2\right] \qquad \beta = \frac{1}{2}\left[\frac{2J_1^3}{27} - \frac{J_1 J_2}{3} + J_3\right] \tag{3.26}$$

Με βάση το πρόσημο της διακρίνουσας $\boldsymbol{\Delta=\alpha^3+\beta^2}$, διακρίνονται οι ακόλουθες περιπτώσεις λύσης της εξίσωσης (3.25):

- **<u>Περίπτωση Α (Κατηγορία Α)</u>: $\boldsymbol{\Delta=\alpha^3+\beta^2>0}$**: τότε η ρίζα t_1 της (3.25) είναι πραγματικός αριθμός, ενώ οι t_2, t_3 μιγαδικοί Επομένως κατ' αντιστοιχία η ρίζα μ_1 της (3.24) είναι πραγματικός αριθμός και οι μ_2, μ_3 μιγαδικοί:

$$t_1 = \left(\sqrt[3]{-\beta+\sqrt{\Delta}}\right) + \left(\sqrt[3]{-\beta-\sqrt{\Delta}}\right) \tag{3.27α}$$

$$t_2 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\beta+\sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\beta-\sqrt{\Delta}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{-\beta+\sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{-\beta-\sqrt{\Delta}}\right)i \tag{3.27β}$$

$$t_3 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\beta+\sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\beta-\sqrt{\Delta}}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{-\beta+\sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{-\beta-\sqrt{\Delta}}\right)i \tag{3.27γ}$$

Λόγω του ότι έχει τεθεί $r^2=\mu=t-(J_1/3)$, οι ρίζες της (3.23) είναι:

$$r_1 = -r_2 = \sqrt{t_1 - \left(\frac{J_1}{3}\right)} \qquad r_3 = -r_4 = \sqrt{t_2 - \left(\frac{J_1}{3}\right)} \qquad r_5 = -r_6 = \sqrt{t_3 - \left(\frac{J_1}{3}\right)} \tag{3.28}$$

Η γενική λύση της (3.22) στην περίπτωση κατά την οποία η ρίζα μ_1 είναι θετικός αριθμός είναι (Περίπτωση A_1):

$$y(x) = C_1 e^{R_1 x} + C_2 e^{-R_1 x} + C_3 e^{Rx}\cos(Qx) + C_4 e^{Rx}\sin(Qx) + C_5 e^{-Rx}\cos(Qx) + C_6 e^{-Rx}\sin(Qx) \tag{3.29}$$

Όπου:

$$R_1 = \sqrt{\sqrt[3]{-\beta+\sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\beta-\sqrt{\Delta}} - \frac{J_1}{3}} \tag{3.30α}$$

$$R = \sqrt{\frac{\sqrt{m^2+n^2}+m}{2}} \tag{3.30β}$$

$$Q = \sqrt{\frac{\sqrt{m^2+n^2}-m}{2}} \tag{3.30γ}$$

$$m = -\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{-\beta+\sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\beta-\sqrt{\Delta}} + \frac{2J_1}{3}\right] \qquad n = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\sqrt[3]{-\beta+\sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{-\beta-\sqrt{\Delta}}\right]$$

Αντίστοιχα γενική λύση της (3.22) στην περίπτωση κατά την οποία η ρίζα μ_1 είναι αρνητικός αριθμός είναι (Περίπτωση A_2):

$$y(x) = C_1\cos(Qx) + C_2\sin(Qx) + C_3e^{Rx}\cos(Q_1x) + C_4e^{Rx}\sin(Q_1x) + C_5e^{-Rx}\cos(Q_1x) + C_6e^{-Rx}\sin(Q_1x) \tag{3.31}$$

Όπου:

$$Q = \sqrt{-\sqrt[3]{-\beta+\sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{-\beta-\sqrt{\Delta}} + \frac{J_1}{3}} \tag{3.32}$$

ενώ τα R, Q_1 δίνονται από τις σχέσεις (3.30β) και (3.30γ) αντίστοιχα.

- **<u>Περίπτωση Β (Κατηγορία Β)</u>**: **<u>$\Delta=\alpha^3+\beta^2<0$</u>**: τότε οι t_1, t_2, t_3 και κατ' επέκταση και οι μ_1, μ_2, μ_3 είναι πραγματικοί αριθμοί:

$$t_1 = 2\sqrt{-\alpha}\cos(\varphi/3) \tag{3.33α}$$

$$t_2 = 2\sqrt{-\alpha}\cos[(\varphi+2\pi)/3] \tag{3.33β}$$

$$t_3 = 2\sqrt{-\alpha}\cos[(\varphi+4\pi)/3] \tag{3.33γ}$$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{-\alpha^3}}\right) \tag{3.33δ}$$

Όπου τα α, β δίνονται από τη σχέση (3.26).

Στην περίπτωση αυτή για να καθοριστεί η μορφή της γενικής λύσης της (3.22) θα πρέπει να διερευνηθούν τα πρόσημα των μ_1, μ_2, μ_3 καθώς εφόσον ετέθη $r^2=\mu$, εάν κάποια από τις ρίζες μ_i είναι θετική τότε η αντιστοιχούσα σε αυτή ρίζα r_i είναι πραγματικός αριθμός. Αντίστοιχα εάν μ_i είναι αρνητικός αριθμός τότε η αντίστοιχη ρίζα r_i είναι φανταστικός αριθμός. Επομένως στη γενική περίπτωση είναι δυνατό να εμφανιστούν οι μορφές λύσης που δίνονται στον Πίνακα 3.2α.

- **<u>Περίπτωση Γ (Κατηγορία Γ)</u>**: **<u>$\Delta=\alpha^3+\beta^2=0$</u>**: και στην περίπτωση αυτή οι ρίζες t_1, t_2, t_3 και κατ' επέκταση και οι ρίζες μ_1, μ_2, μ_3 είναι πραγματικοί αριθμοί. Η διαφορά της περίπτωσης αυτής, από την περίπτωση Β συνίσταται στο ότι ανάλογα με το πρόσημο του β (3.26) εμφανίζεται ισότητα των ριζών μ_1 και μ_3, ή των ριζών μ_2 και μ_3. Όλες οι δυνατές υποπεριπτώσεις δίνονται στον Πίνακα 3.2α. Πρέπει να τονιστεί ότι η κατηγορία αυτή είναι εξαιρετικά απίθανο να εμφανιστεί στην πράξη, καθώς για να συμβεί αυτό απαιτούνται συγκεκριμένοι συνδυασμοί τιμών των τριών εδαφικών παραμέτρων.

Πίνακας 3.2α. Οι περιπτώσεις λύσης της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος που διέπει την κάμψη δοκού επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΛΥΣΗΣ				$\mathbf{f_1}$	$\mathbf{f_2}$	$\mathbf{f_3}$	$\mathbf{f_4}$	$\mathbf{f_5}$	$\mathbf{f_6}$
A_1	$\Delta=\alpha^3+\beta^2>0$		$J_3<0$	e^{R1x}	e^{-R1x}	$e^{Rx}\cos(Qx)$	$e^{Rx}\sin(Qx)$	$e^{-Rx}\cos(Qx)$	$e^{-Rx}\sin(Qx)$
A_2			$J_3>0$	$\cos(Qx)$	$\sin(Qx)$	$e^{Rx}\cos(Q_1x)$	$e^{Rx}\sin(Q_1x)$	$e^{-Rx}\cos(Q_1x)$	$e^{-Rx}\sin(Q_1x)$
B_1	$\Delta<0$	$\mu_1>0,\ \mu_2>0,\ \mu_3>0$		e^{Rx}	e^{-Rx}	e^{R1x}	e^{-R1x}	e^{R2x}	e^{-R2x}
B_2		$\mu_1>0,\ \mu_2<0,\ \mu_3<0$		e^{Rx}	e^{-Rx}	$\cos(Qx)$	$\sin(Qx)$	$\cos(Q_1x)$	$\sin(Q_1x)$
B_3		$\mu_1>0,\ \mu_2<0,\ \mu_3>0$		e^{Rx}	e^{-Rx}	$\cos(Qx)$	$\sin(Qx)$	e^{R1x}	e^{-R1x}
B_4		$\mu_1>0,\ \mu_2>0,\ \mu_3<0$		e^{Rx}	e^{-Rx}	e^{R1x}	e^{-R1x}	$\cos(Qx)$	$\sin(Qx)$
B_5		$\mu_1<0,\ \mu_2<0,\ \mu_3>0$		$\cos(Qx)$	$\sin(Qx)$	$\cos(Q_1x)$	$\sin(Q_1x)$	e^{Rx}	e^{-Rx}
B_6		$\mu_1<0,\ \mu_2>0,\ \mu_3<0$		$\cos(Qx)$	$\sin(Qx)$	e^{Rx}	e^{-Rx}	$\cos(Q_1x)$	$\sin(Q_1x)$
B_7		$\mu_1<0,\ \mu_2<0,\ \mu_3<0$		$\cos(Qx)$	$\sin(Qx)$	$\cos(Q_1x)$	$\sin(Q_1x)$	$\cos(Q_2x)$	$\sin(Q_2x)$
B_8		$\mu_1<0,\ \mu_2>0,\ \mu_3>0$		$\cos(Qx)$	$\sin(Qx)$	e^{Rx}	e^{-Rx}	e^{R1x}	e^{-R1x}
$\Gamma_{1\alpha}$	$\Delta=0$	$\beta<0$	$\mu_1>0,\ \mu_2=\mu_3>0$	e^{Rx}	e^{-Rx}	e^{R1x}	e^{-R1x}	xe^{R1x}	xe^{-R1x}
$\Gamma_{1\beta}$			$\mu_1>0,\ \mu_2=\mu_3<0$	e^{Rx}	e^{-Rx}	$\cos(Qx)$	$\sin(Qx)$	$x\cos(Qx)$	$x\sin(Qx)$
$\Gamma_{1\gamma}$			$\mu_1<0,\ \mu_2=\mu_3>0$	$\cos(Qx)$	$\sin(Qx)$	e^{Rx}	e^{-Rx}	xe^{Rx}	xe^{-Rx}
$\Gamma_{1\delta}$			$\mu_1<0,\ \mu_2=\mu_3<0$	$\cos(Qx)$	$\sin(Qx)$	$\cos(Q_1x)$	$\sin(Q_1x)$	$x\cos(Q_1x)$	$x\sin(Q_1x)$
$\Gamma_{2\alpha}$		$\beta>0$	$\mu_1=\mu_3>0,\ \mu_2>0$	e^{Rx}	e^{-Rx}	e^{R1x}	e^{-R1x}	xe^{Rx}	xe^{-Rx}
$\Gamma_{2\beta}$			$\mu_1=\mu_3<0,\ \mu_2>0$	$\cos(Qx)$	$\sin(Qx)$	e^{Rx}	e^{-Rx}	$x\cos(Qx)$	$x\sin(Qx)$
$\Gamma_{2\gamma}$			$\mu_1=\mu_3>0,\ \mu_2<0$	e^{Rx}	e^{-Rx}	$\cos(Qx)$	$\sin(Qx)$	xe^{Rx}	xe^{-Rx}
$\Gamma_{2\delta}$			$\mu_1=\mu_3<0,\ \mu_2<0$	$\cos(Qx)$	$\sin(Qx)$	$\cos(Q_1x)$	$\sin(Q_1x)$	$x\cos(Qx)$	$x\sin(Qx)$
$\Gamma_{3\alpha}$		$\alpha=\beta=0$	$J_1<0$	e^{Rx}	e^{-Rx}	xe^{Rx}	xe^{-Rx}	x^2e^{Rx}	x^2e^{-Rx}
$\Gamma_{3\beta}$			$J_1>0$	$\cos(Qx)$	$\sin(Qx)$	$x\cos(Qx)$	$x\sin(Qx)$	$x^2\cos(Qx)$	$x^2\sin(Qx)$

Υπόμνημα

Τα μ_1, μ_2 μ_3, είναι οι ρίζες της βοηθητικής εξίσωσης (3.24).

Οι εκφράσεις των α, β δίνονται από τις σχέσεις (3.26), και του J_1 κατά περίπτωση από τον Πίνακα 3.1.

Οι εκφράσεις των R, R_1, R_2, Q, Q_1, Q_2 δίνονται κατά περίπτωση στον επόμενο πίνακα (Πίνακας 3.2β)

Πίνακας 3.2β. Οι εκφράσεις των R, R_1, R_2, Q, Q_1, Q_2 κατά τις περιπτώσεις του Πίνακα 2α

	R	**R_1**	**R_2**	**Q**	**Q_1**	**Q_2**
B_1	$\sqrt{2\sqrt{-\alpha}\cos(\varphi/3)-(J_1/3)}$	$\sqrt{2\sqrt{-\alpha}\cos[(\varphi+2\pi)/3]-(J_1/3)}$	$\sqrt{2\sqrt{-\alpha}\cos[(\varphi+4\pi)/3]-(J_1/3)}$	–	–	–
B_2	$\sqrt{2\sqrt{-\alpha}\cos(\varphi/3)-(J_1/3)}$	–	–	$\sqrt{-2\sqrt{-\alpha}\cos[(\varphi+2\pi)/3]+(J_1/3)}$	$\sqrt{-2\sqrt{-\alpha}\cos[(\varphi+4\pi)/3]+(J_1/3)}$	–
B_3	$\sqrt{2\sqrt{-\alpha}\cos(\varphi/3)-(J_1/3)}$	$\sqrt{2\sqrt{-\alpha}\cos[(\varphi+4\pi)/3]-(J_1/3)}$	–	$\sqrt{-2\sqrt{-\alpha}\cos[(\varphi+2\pi)/3]+(J_1/3)}$	–	–
B_4	$\sqrt{2\sqrt{-\alpha}\cos(\varphi/3)-(J_1/3)}$	$\sqrt{2\sqrt{-\alpha}\cos[(\varphi+2\pi)/3]-(J_1/3)}$	–	$\sqrt{-2\sqrt{-\alpha}\cos[(\varphi+4\pi)/3]+(J_1/3)}$	–	–
B_5	$\sqrt{2\sqrt{-\alpha}\cos[(\varphi+4\pi)/3]-(J_1/3)}$	–	–	$\sqrt{-2\sqrt{-\alpha}\cos(\varphi/3)+(J_1/3)}$	$\sqrt{-2\sqrt{-\alpha}\cos[(\varphi+2\pi)/3]+(J_1/3)}$	–
B_6	$\sqrt{2\sqrt{-\alpha}\cos[(\varphi+2\pi)/3]-(J_1/3)}$	–	–	$\sqrt{-2\sqrt{-\alpha}\cos(\varphi/3)+(J_1/3)}$	$\sqrt{-2\sqrt{-\alpha}\cos[(\varphi+4\pi)/3]+(J_1/3)}$	–
B_7	–	–	–	$\sqrt{-2\sqrt{-\alpha}\cos(\varphi/3)+(J_1/3)}$	$\sqrt{-2\sqrt{-\alpha}\cos[(\varphi+2\pi)/3]+(J_1/3)}$	$\sqrt{-2\sqrt{-\alpha}\cos[(\varphi+4\pi)/3]+(J_1/3)}$
B_8	$\sqrt{2\sqrt{-\alpha}\cos[(\varphi+2\pi)/3]-(J_1/3)}$	–	–	$\sqrt{-2\sqrt{-\alpha}\cos(\varphi/3)+(J_1/3)}$	–	–
$\Gamma_{1\alpha}$	$\sqrt{2\sqrt[3]{-\beta}-J_1/3}$	$\sqrt{-\sqrt[3]{-\beta}-J_1/3}$	–	–	–	–
$\Gamma_{1\beta}$	$\sqrt{2\sqrt[3]{-\beta}-J_1/3}$	–	–	$\sqrt{\sqrt[3]{-\beta}+J_1/3}$	–	–
$\Gamma_{1\gamma}$	$\sqrt{-\sqrt[3]{-\beta}-J_1/3}$	–	–	$\sqrt{-2\sqrt[3]{-\beta}+J_1/3}$	–	–
$\Gamma_{1\delta}$	–	–	–	$\sqrt{-2\sqrt[3]{-\beta}+J_1/3}$	$\sqrt{\sqrt[3]{-\beta}+J_1/3}$	–
$\Gamma_{2\alpha}$	$\sqrt{\sqrt{-\alpha}-J_1/3}$	$\sqrt{-2\sqrt{-\alpha}-J_1/3}$	–	–	–	–
$\Gamma_{2\beta}$	$\sqrt{-2\sqrt{-\alpha}-J_1/3}$	–	–	$\sqrt{-\sqrt{-\alpha}+J_1/3}$	–	–
$\Gamma_{2\gamma}$	$\sqrt{\sqrt{-\alpha}-J_1/3}$	–	–	$\sqrt{2\sqrt{-\alpha}+J_1/3}$	–	–
$\Gamma_{2\delta}$	–	–	–	$\sqrt{-\sqrt{-\alpha}+J_1/3}$	$\sqrt{2\sqrt{-\alpha}+J_1/3}$	–
$\Gamma_{3\alpha}$	$\sqrt{-(J_1/3)}$	–	–	–	–	–
$\Gamma_{3\beta}$	–	–	–	$\sqrt{(J_1/3)}$	–	–

3.3.2. Διερεύνηση των περιπτώσεων λύσης του Πίνακα 3.2α

Στην προηγούμενη παράγραφο εκτέθηκαν όλες οι πιθανές μορφές που μπορεί να πάρει η λύση της βασικής διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος (Σχέση (3.22)). Το σχετικά μεγάλο πλήθος των διαφορετικών μορφών λύσης (Πίνακας 3.2α), επιβάλλει τη διερεύνηση του προβλήματος με στόχο τον αποκλεισμό των μορφών εκείνων που με βάση το εύρος των τιμών που μπορούν να λάβουν οι συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης (3.22), J_1, J_2, J_3, είναι απίθανο να εμφανιστούν.

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 3.2α οι δυνατές περιπτώσεις λύσης διακρίνονται σε τρεις γενικές κατηγορίες (Κατηγορίες Α, Β, Γ), η εμφάνιση ή όχι των οποίων εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας Δ. Κάθε μια από αυτές τις κατηγορίες αυτές διακρίνεται σε υποπεριπτώσεις η εμφάνιση ή όχι των οποίων εξαρτάται από πρόσθετα κριτήρια, όπως τα πρόσημα των ριζών μ_1, μ_2, μ_3 της εξίσωσης (3.24) για τις κατηγορίες Β, Γ ή το πρόσημο του συντελεστή J_3 για την κατηγορία Α.

Επομένως η πλήρης διερεύνηση των πιθανών μορφών λύσης θα πρέπει να γίνει σε δυο στάδια. Κατά το πρώτο στάδιο θα πρέπει διερευνάται η δυνατότητα εμφάνισης ή όχι κάθε μιας από τις τρεις γενικές κατηγορίες λύσης Α, Β, Γ, ενώ κατά το δεύτερο θα πρέπει να διερευνάται η δυνατότητα εμφάνισης ή όχι των υποπεριπτώσεων τους. Αυτή η διαδικασία διερεύνησης θα γίνει ξεχωριστά για κάθε μια από τις περιπτώσεις που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1.

3.3.2.1. Δοκός Euler – Bernoulli

<u>Θεωρία α' τάξης</u>

Οι συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης (3.22), J_1, J_2, J_3 για την παρούσα περίπτωση δίνονται από τις σχέσεις (3.20α) – (3.20γ). Με βάση τις σχέσεις αυτές, η διακρίνουσα Δ παίρνει την εξής μορφή:

$$\Delta = \frac{1}{G^4}\left(\frac{c}{3EI}\right)^3\left[G^4 + \frac{EI\left[8k^2 - c(c+20k)\right]}{4c}G^2 + k(k+c)\left(\frac{EI(k+c)}{c}\right)^2\right] \tag{3.34}$$

Α' Στάδιο διερεύνησης

Κατά το πρώτο στάδιο της διερεύνησης θα πρέπει να ελεγχθεί το πρόσημο της (3.34) εντός του πεδίου τιμών των τριών εδαφικών παραμέτρων k, c, G, οι οποίοι όπως είναι προφανές είναι θετικοί αριθμοί. Για τον έλεγχο αυτό θα πρέπει κατ' αρχήν να επιλυθεί η εξίσωση Δ=0, θεωρώντας ως άγνωστο τη σταθερά του διατμητικού επιπέδου G. Η εξίσωση Δ(G)=0 είναι μια διτετράγωνη εξίσωση και το πεδίο τιμών της σταθεράς G εντός του οποίου θα διερευνηθεί, είναι το πεδίο (0,+∞). Ο αριθμός των πραγματικών ριζών της εξίσωσης αυτής εξαρτάται από τη διακρίνουσα της επιλύουσας της $\Delta_{ΕΠ}$, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta_{ΕΠ} = -\frac{32EI}{c}\left(k - \frac{c}{8}\right)^3 \tag{3.35}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν τα εξής:

- Εάν k>c/8 τότε $\Delta_{ΕΠ}$<0 και επομένως η εξίσωση Δ(G)=0 δεν έχει καμία πραγματική ρίζα στο πεδίο ορισμού της.

- Εάν k<c/8 τότε $\Delta_{ΕΠ}$>0 και επομένως το είδος των ριζών της εξίσωσης Δ(G)=0 εξαρτάται από τα πρόσημα των λόγων:

$$\frac{\Gamma}{A} \overset{A=1}{=} \Gamma = k(k+c)\left(\frac{EI(k+c)}{c}\right)^2 \tag{3.36α}$$

$$-\frac{B}{A} \overset{A=1}{=} -B = -\frac{EI\left[8k^2 - c(c+20k)\right]}{4c} \tag{3.36β}$$

Έστω κατ' αρχήν ότι k>c/8. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση Δ(G)=0 δεν έχει πραγματικές ρίζες, και επομένως έχει σταθερό πρόσημο σε όλο το πεδίο ορισμού της. Πολύ εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$\lim_{G\to 0}\Delta(G) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{G\to +\infty}\Delta(G) = \left(\frac{c}{3EI}\right)^3 > 0 \tag{3.37}$$

Επομένως όταν k>c/8 τότε Δ(G)>0 για κάθε τιμή της παραμέτρου G καθώς και για κάθε τιμή των παραμέτρων k, c που πληρούν τον συγκεκριμένο περιορισμό. Άρα η μοναδική πιθανή μορφή λύσης ανήκει στην Κατηγορία Α (Σχήμα 3.3)

Έστω ότι k<c/8. Στην περίπτωση αυτή η διερεύνηση μετατίθεται στον έλεγχο των προσήμων των λόγων (Γ/Α) και (–Β/Α). Από την (3.36α) όμως προκύπτει ότι (Γ/Α)>0 για κάθε τιμή των τριών παραμέτρων. Επομένως θα πρέπει να διερευνηθεί η ανισότητα $(-B/A) > 0$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι (–Β/Α)>0, για $k < 0{,}25\left(5+3\sqrt{3}\right)c$. Η τιμή αυτή είναι μεγαλύτερη του (c/8), οπότε στην περίπτωση αυτή συναληθεύουν οι ανισότητες: $\Delta_{ΕΠ}$>0, (–Β/Α)>0, (Γ/Α)>0. Αυτό σημαίνει ότι όταν k<c/8 η εξίσωση Δ(G)=0 έχει δυο θετικές και δυο αρνητικές ρίζες. Άρα η διακρίνουσα Δ δεν έχει σταθερό πρόσημο. Οι θετικές ρίζες της εξίσωσης Δ(G)=0 είναι:

$$G_{1,2} = \frac{1}{2}\sqrt{-B+2\sqrt{\Gamma}} \mp \frac{1}{2}\sqrt{-B-2\sqrt{\Gamma}} \tag{3.38}$$

όπου τα Β και Γ δίνονται από τις σχέσεις (3.36α), (3.36β).

Επειδή μπορεί να αποδειχθεί ότι και στην περίπτωση που k<c/8 ισχύουν οι συνθήκες (3.37), βγαίνει το συμπέρασμα ότι:

- Εάν $G<G_1$ ή $G>G_2$ τότε Δ(G)>0, όποτε οι πιθανές μορφές λύσης ανήκουν Κατηγορία Α ενώ,
- Εάν $G_1<G<G_2$ τότε Δ(G)<0, οπότε οι πιθανές μορφές λύσης ανήκουν Κατηγορία Β (Σχήμα 3.3).

Β' Στάδιο διερεύνησης

Κατά το δεύτερο στάδιο της διερεύνησης διερευνάται η πιθανότητα εμφάνισης κάθε υποπερίπτωσης των κατηγοριών που δίνονται στον Πίνακα 3.2α. Όπως αποδείχθηκε κατά το πρώτο στάδιο της διερεύνησης, εντός του πεδίου τιμών των εδαφικών παραμέτρων, είναι δυνατή η εμφάνιση μορφών λύσης που ανήκουν τόσο στην κατηγορία Α όσο και στην κατηγορία Β.

Όσο αναφορά την κατηγορία Α, θα πρέπει να τονιστεί ότι η μοναδική υποπερίπτωση της που είναι δυνατό να εμφανιστεί είναι η A_1. Σύμφωνα με τον Πίνακα 3.2α, η συνθήκη που πρέπει να πληρούται προκειμένου να εμφανιστεί η υποπερίπτωση αυτή είναι J_3<0. Η συγκεκριμένη σχέση πληρούται για κάθε

πιθανό συνδυασμό των τριών εδαφικών παραμέτρων, όπως προκύπτει από τη σχέση (3.20γ).

Προκειμένου να διερευνηθούν οι πιθανές υποπεριπτώσεις λύσης που ανήκουν στην κατηγορία Β, θα πρέπει να ελεγχθούν τα πρόσημα των πραγματικών ριζών της εξίσωσης (3.24). Παρακάτω θα αποδειχθεί ότι οι ρίζες μ_1, μ_2, μ_3 είναι θετικές.

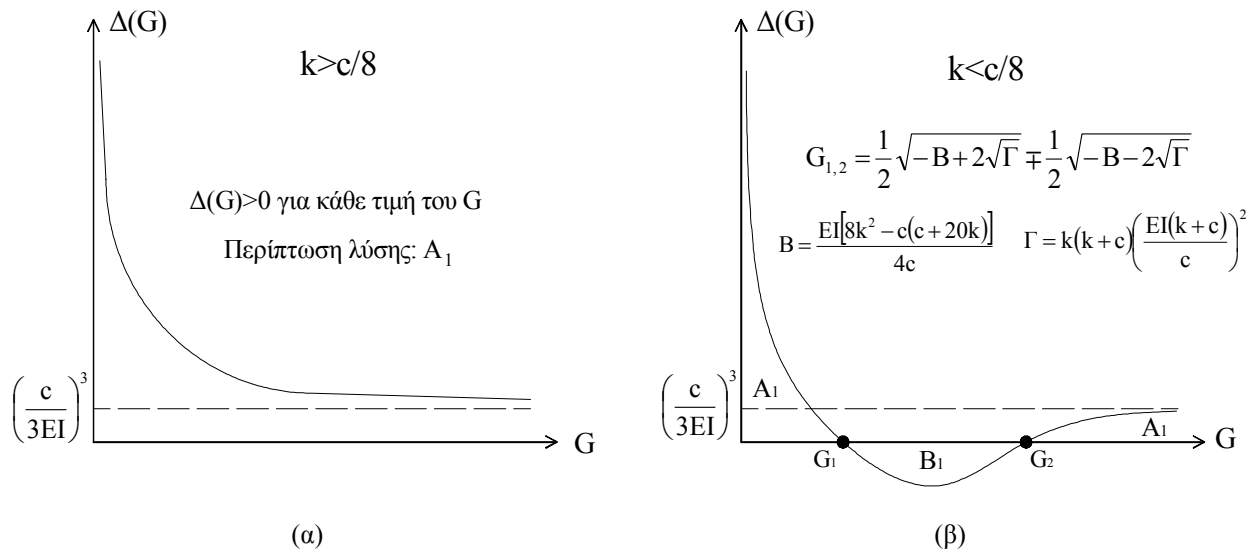
Για το σκοπό της απόδειξης αυτής θεωρείται η συνάρτηση $f(\mu)=\mu^3+J_1\mu^2+J_2\mu+J_3$. Τα πρόσημα των συντελεστών J_1, J_2, J_3 για την παρούσα περίπτωση σύμφωνα με τις σχέσεις (3.20α) – (3.20γ) είναι: $J_1<0$, $J_2>0$ και $J_3<0$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η πρώτη παράγωγος της $f(\mu)$ έχει για τα δεδομένα πρόσημα των J_1, J_2, J_3, δυο θετικές ρίζες (έστω μ_1', μ_2') για τις οποίες ισχύουν $\mu_1'<\mu_2', f(\mu_1')=2\left(\sqrt{-\alpha^3}+\beta\right)>0$, και $f(\mu_2')=2\left(-\sqrt{-\alpha^3}+\beta\right)<0$. Επίσης ισχύει $f(0)=J_3<0$. Επομένως $f(0)f(\mu_1')<0$ και $f(\mu_1')f(\mu_2')<0$, γεγονός που δηλώνει ότι η εξίσωση (3.24) έχει από μια ρίζα στα διαστήματα $(0, \mu_1')$ και (μ_1', μ_2'). Επειδή όμως $\mu_1'>0$ και $\mu_2'>0$ αυτό σημαίνει ότι η (3.24) έχει δυο θετικές ρίζες. Από την άλγεβρα είναι γνωστό ότι μια εκ των σχέσεων (σχέσεις Vièta) που υφίστανται μεταξύ των συντελεστών και των ριζών της (3.24) είναι:

$$\mu_1\mu_2\mu_3=-J_3 \tag{3.39}$$

Επειδή $J_3<0$ και επειδή αποδείχθηκε ότι δυο από τις μ_1, μ_2, μ_3 είναι θετικές, από την (3.39) προκύπτει ότι και η τρίτη ρίζα είναι θετική. Επομένως $\mu_1>0$, $\mu_2>0$ και $\mu_3>0$. Σύμφωνα με τον Πίνακα 3.2α, τα δεδομένα πρόσημα αντιστοιχούν στην υποπερίπτωση B_1. Επομένως, από το δεύτερο στάδιο της διερεύνησης προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Στα πεδία τιμών των εδαφικών παραμέτρων όπου ισχύει $\Delta(G)>0$ η μορφή λύσης της (3.22) αντιστοιχεί στην υποπερίπτωση A_1,
- Στα πεδία τιμών των εδαφικών παραμέτρων όπου ισχύει $\Delta(G)<0$ η μορφή λύσης της (3.22) αντιστοιχεί στην υποπερίπτωση B_1.

Όλα τα συμπεράσματα και των δυο σταδίων διερεύνησης δίνονται παραστατικά στο Σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.3. Διάγραμμα της διακρίνουσας Δ όταν k>c/8 (α), και όταν k<c/8 (β).

Θεωρία β΄ τάξης

Οι συντελεστές της εξίσωσης (3.22) για την παρούσα περίπτωση δίνονται από τις σχέσεις (3.18α) – (3.18β). Η εισαγωγή των εκφράσεων αυτών στον τύπο της διακρίνουσας $\Delta=\alpha^3+\beta^2$ δίνει:

$$\begin{aligned}\Delta = \frac{1}{108}\left(\frac{1}{EIG}\right)^4 \Big\{ &-\left[(k+c)^2G^2\right]P^4 - 2G\left[cG^2(k-c)+EI(k+c)^3\right]P^3 - \\ &-\left[c^2G^4+(EI)^2(k+c)^4-2EIcG^2(k+c)(k+4c)\right]P^2 + 2EIGc\left[EI(k+c)^2(4k+c)+cG^2(4k-5c)\right]P + \\ &+EIc\left[-EIcG^2(19k+c)(k+c)+cG^2\left(4cG^2+27EIk^2\right)+4(EI)^2k(k+c)^3\right]\Big\}\end{aligned} \tag{3.40}$$

Η παρούσα περίπτωση χαρακτηρίζεται από την μεταβλητότητα προσήμου που εμφανίζουν οι συντελεστές J_1, J_2, J_3, καθώς όπως προκύπτει από τις (3.18α) – (3.18β) οι τιμές τους εξαρτώνται από την τιμή του αξονικού φορτίου όταν αυτό είναι θλιπτικό. Αντίθετα στην περίπτωση εφελκυστικού φορτίου οι J_1, J_2, J_3 έχουν σταθερό πρόσημο. Επομένως η διαδικασία διερεύνησης θα πρέπει να διακριθεί στην περίπτωση θλιπτικού και στην περίπτωση εφελκυστικού αξονικού φορτίου.

Περίπτωση θλιπτικού φορτίου

Α' Στάδιο διερεύνησης

Το πρώτο στάδιο της διερεύνησης ξεκινά από την μελέτη της εξίσωσης Δ(P)=0, καθώς από τον υπολογισμό των ριζών της προκύπτουν οι οριακές τιμές των θλιπτικών φορτίων τα οποία αποτελούν τα «σύνορα» των περιοχών ορισμού των κατηγοριών λύσης της εξίσωσης (3.22). Η Δ(P)=0 είναι αλγεβρική εξίσωση $4^{ου}$ βαθμού, με γνωστή λύση. Ωστόσο η πολυπλοκότητα των συντελεστών της καθιστά πρακτικά αδύνατο το σχηματισμό απλών κλειστών τύπων υπολογισμού των ριζών της. Για τον λόγο αυτό η μελέτη της θα γίνει με έμμεσο τρόπο. Πιο συγκεκριμένα ο στόχος θα είναι η διερεύνηση της δυνατότητας εμφάνισης κάποιων από τις κατηγορίες λύσης που δίνονται στον Πίνακα 3.2α, καθώς και ο αποκλεισμός κάποιων άλλων. Όπως φαίνεται πάντως από τον πίνακα αυτό, οι δυο πρακτικά πιθανές κατηγορίες λύσης είναι οι Α και Β, καθώς η κατηγορία Γ αντιστοιχεί στην οριακή συνθήκη Δ=0, η οποία είναι πρακτικά αδύνατο να εμφανιστεί καθώς για να συμβεί αυτό απαιτείται ένας και μόνον ένας συνδυασμός τιμών των παραμέτρων k, c, G.

Η διαδικασία της διερεύνησης ξεκινά από την παρακάτω σχέση:

$$\Delta(P)=\alpha^3+\beta^2<0 \Rightarrow \alpha<0 \tag{3.41}$$

η οποία δηλώνει ότι αναγκαία (αλλά όχι ικανή) συνθήκη για να είναι αρνητική η τιμή της διακρίνουσας Δ(P), είναι η συνθήκη α<0. Η χρησιμότητα της σχέσης αυτής έγκειται στο γεγονός ότι η έκφραση α(P,G):

$$\alpha(P,G)=-\left(\frac{1}{3EI}\right)^2P^2-\left(\frac{k+c}{9EIG}\right)P+\left[\frac{c}{3EI}-\frac{1}{9}\left(\frac{k+c}{G}\right)^2\right] \tag{3.42α}$$

είναι σαφώς πιο απλή στο χειρισμό της απ' ότι η αντίστοιχη έκφραση της διακρίνουσας Δ(P), ενώ η εκπλήρωση της συνθήκης α(P,G)>0 σημαίνει αποκλεισμό της πιθανότητας εμφάνισης τη κατηγορίας Β για εκείνα τα πεδία τιμών των τριών εδαφικών παραμέτρων στα οποία πληρούται.

Η εξίσωση α(P,G)=0 μπορεί να θεωρηθεί είτε ως εξίσωση με βασικό άγνωστο το αξονικό φορτίο P (Σχέση (3.42α)), είτε ως εξίσωση με βασικό άγνωστο την σταθερά του διατμητικού επιπέδου G όποτε παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\alpha(P,G)=\frac{1}{G^2}\left\{\left[\frac{c}{3EI}-\left(\frac{P}{3EI}\right)^2\right]G^2-\left(\frac{k+c}{9EI}P\right)G-\left(\frac{k+c}{3}\right)^2\right\} \tag{3.42β}$$

Από τη μελέτη της ανίσωσης α(P,G)>0 κάνοντας χρήση της έκφρασης (3.42α) προκύπτουν οι παρακάτω χαρακτηριστικές τιμές της σταθεράς του διατμητικού επιπέδου:

$$G_1=\frac{\sqrt{3}}{3}(k+c)\sqrt{\frac{EI}{c}} \tag{3.43α}$$

$$G_2=\frac{1}{2}(k+c)\sqrt{\frac{EI}{c}} \tag{3.43β}$$

Αποδεικνύεται ότι οι τιμές G_1, G_2 διασπούν το πεδίο τιμών της σταθεράς G σε τρεις περιοχές τιμών στις οποίες ισχύουν τα εξής (Σχήμα 3.4):

- Όταν $G<G_2$ η εξίσωση α(P)=0 δεν έχει πραγματικές ρίζες για καμία τιμή θλιπτικού ή εφελκυστικού φορτίου. Αποδεικνύεται ότι στο διάστημα αυτό η (3.42α) έχει σταθερά αρνητικό πρόσημο. Επομένως λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (3.41), δεν μπορεί να αποκλειστεί η εμφάνιση μορφών λύσης που ανήκουν στην κατηγορία Β. Πάντως για P=0 – που αντιστοιχεί στη θεωρία α' τάξης η οποία μελετήθηκε στην Παράγραφο 3.2.1.1 – αποδείχθηκε ότι Δ(P=0)>0 για k>c/8 ανεξαρτήτως της τιμής του G, ενώ ακόμα και για k<c/8 η τιμή του Δ(P) είναι θετική εντός του εύρους των τιμών του G που ορίζεται από τιμές της παραμέτρου που δίνονται από τη (3.38). Αυτό σημαίνει ότι εντός του διαστήματος (0, G_2) και για μικρές τιμές θλιπτικού φορτίου είναι δυνατή η εμφάνιση μορφών λύσης που ανήκουν στην κατηγορία Α. Επομένως, εντός του διαστήματος (0, G_2) είναι δυνατό να εμφανιστούν μορφές λύσης που ανήκουν τόσο στην κατηγορία Α όσο και στην κατηγορία Β (βλέπε Σχήμα 3.4).
- Όταν $G_2<G<G_1$ η εξίσωση α(P)=0 δεν έχει θετική ρίζα (έχει όμως αρνητικές που αντιστοιχούν σε εφελκυστικά φορτία). Άρα και στο διάστημα αυτό η (3.42α) έχει σταθερά αρνητικό πρόσημο ανεξαρτήτως τιμής του θλιπτικού φορτίου. Αυτό σημαίνει ότι ισχύουν τα συμπεράσματα που εκτέθηκαν προηγουμένως.
- Όταν $G>G_1$ η εξίσωση α(P)=0 έχει μια θετική ρίζα η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$P_p=-\frac{1}{2}\frac{EI(k+c)}{G}+\frac{1}{2}EI\sqrt{3\left[\frac{4c}{EI}-\frac{(k+c)^2}{G^2}\right]} \tag{3.44}$$

Αυτό σημαίνει αφενός ότι στο διάστημα αυτό, η α(P) αλλάζει πρόσημο και επομένως μπορεί να είναι είτε θετικό είτε αρνητικό. Πιο συγκεκριμένα, εάν $P<P_p$ τότε α(P)>0, οπότε αποκλείεται η εμφάνιση μορφών λύσης που ανήκουν στην κατηγορία Β ενώ εάν $P>P_p$ τότε α(P)<0 όποτε είναι δυνατό να εμφανιστούν μορφές λύσης που ανήκουν και στην κατηγορία Α και στην κατηγορία Β.

Αν σχηματιστεί το όριο της έκφρασης (3.44) όταν G → +∞ προκύπτει ότι:

$$\lim_{G\to+\infty} P_p = \sqrt{3EIc} = P_1 \tag{3.45}$$

Αυτό σημαίνει ότι για τιμές θλιπτικού φορτίου μεγαλύτερες του P_1, η α(P) είναι πάντα αρνητική (Σχήμα 3.4).

Από τη μελέτη της ανίσωσης α(P,G)>0 κάνοντας χρήση της έκφρασης (3.42β) προκύπτουν οι παρακάτω χαρακτηριστικές τιμές του θλιπτικού φορτίου:

$$P_1 = \sqrt{3EIc} \tag{3.46α}$$

$$P_2 = 2\sqrt{EIc} \tag{3.46β}$$

για τις οποίες μπορούν να αποδειχθούν τα εξής (Σχήμα 3.4):

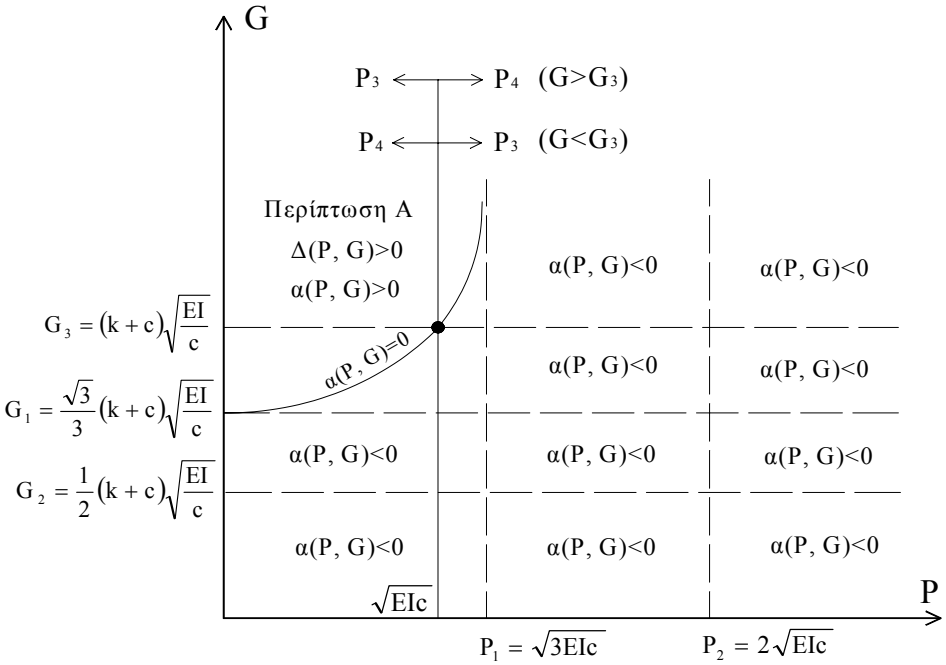
- Όταν $P<P_1$ τότε υπάρχει μια χαρακτηριστική τιμή της σταθεράς του διατμητικού επιπέδου G_a κάτω της οποίας α(P,G)<0, ενώ άνω της τιμής αυτής α(P,G)>0. Η χαρακτηριστική τιμή είναι:

$$G_a = \frac{EI(k+c)P}{2(3EIc-P^2)} + \frac{3(EI)^2(k+c)}{2(3EIc-P^2)}\sqrt{\frac{1}{3EI}\left(4c-\frac{P^2}{EI}\right)} \tag{3.47α}$$

  Η παραπάνω έκφραση για P=0 δίνει:

$$G_a(P=0) = \frac{\sqrt{3}}{3}(k+c)\sqrt{\frac{EI}{c}} \overset{(3.43α)}{=} G_1 \tag{3.47β}$$

- Όταν $P_1<P<P_2$ τότε για κάθε τιμή της σταθεράς του διατμητικού επιπέδου α(P,G)<0 (Υπάρχει περίπτωση να ισχύει α(P,G)<0, για αρνητικές τιμές του G που φυσικά απορρίπτονται).
- Όταν $P>P_2$ τότε επίσης για κάθε τιμή της σταθεράς του διατμητικού επιπέδου α(P,G)<0 (είτε για θετικές είτε για αρνητικές τιμές του G).



Σχήμα 3.4. Διάγραμμα διερεύνησης του πρόσημου του α(P,G) για την περίπτωση θλιπτικού φορτίου.

Πέραν των παραπάνω συμπερασμάτων πρέπει να τονιστεί πως από την (3.42α) προκύπτει ότι η πρώτη παράγωγος της α(P) έχει σταθερά αρνητικό πρόσημο ανεξαρτήτως των τιμών των τριών εδαφικών παραμέτρων αλλά και ανεξαρτήτως τιμών του θλιπτικού φορτίου. Αυτό σημαίνει ότι η α(P) είναι μια φθίνουσα συνάρτηση. Επομένως – και αφού $\Delta=\alpha^3+\beta^2$ – και η συνάρτηση Δ(P) είναι φθίνουσα, και μάλιστα από την (3.40) προκύπτει ότι:

$$\lim_{P\to+\infty}\Delta(P)=-\infty \tag{3.48}$$

Άρα, ανεξαρτήτως των τιμών των τριών παραμέτρων k, c, G υπάρχει μια χαρακτηριστική τιμή θλιπτικού φορτίου πέραν της οποίας η διακρίνουσα Δ(P) είναι σταθερά αρνητική και επομένως αποκλείεται η εμφάνιση μορφών λύσης που ανήκουν στην κατηγορία Α.

Επομένως από το πρώτο στάδιο της διερεύνησης προκύπτει το γενικό συμπέρασμα ότι είναι δυνατή η εμφάνιση μορφών λύσης που ανήκουν τόσο στην κατηγορία Α όσο και στην κατηγορία Β.

Β' Στάδιο διερεύνησης

Ξεκινώντας το δεύτερο στάδιο της διερεύνησης από τις πιθανές υποπεριπτώσεις της κατηγορίας Α, μπορεί από την σχέση (3.18γ) να γίνει εύκολα η διαπίστωση ότι $J_3<0$ ανεξαρτήτως τιμής θλιπτικού φορτίου. Επομένως σύμφωνα με τον Πίνακα 3.2α η μόνη δυνατή υποπερίπτωση λύσης που ανήκει στην κατηγορία Α, είναι η A_1.

Η διερεύνηση των δυνατών υποπεριπτώσεων λύσης της κατηγορίας Β είναι εξαιρετικά σύνθετη, καθώς οι υποπεριπτώσεις αυτές εξαρτώνται εκτός από το πρόσημο του συντελεστή J_3, και από τα πρόσημα και των συντελεστών J_1, J_2 τα οποία δεν είναι σταθερά, αλλά μεταβάλλονται εντός του πεδίου τιμών που μπορεί να λάβει το θλιπτικό φορτίο P. Για την απλοποίηση της διαδικασίας διερεύνησης ορίζονται οι παρακάτω χαρακτηριστικές τιμές θλιπτικού φορτίου:

$$P_3=\frac{EI}{G}(k+c) \tag{3.49α}$$

$$P_4=\frac{cG}{k+c} \tag{3.49β}$$

καθώς και η παρακάτω χαρακτηριστική τιμή της σταθεράς του διατμητικού επιπέδου G:

$$G_3=(k+c)\sqrt{\frac{EI}{c}} \tag{3.50}$$

Η τιμή P_3 είναι η τιμή του θλιπτικού φορτίου για την οποία μηδενίζεται ο συντελεστής J_1, ενώ η τιμή P_4 είναι η αντίστοιχη τιμή μηδενισμού του J_2. Τέλος η τιμή G_3 είναι η τιμή της σταθεράς του διατμητικού επιπέδου, για την οποία $P_3=P_4$. Με τη χαρακτηριστική τιμή G_3 το δεύτερο στάδιο της διερεύνησης διασπάται σε δυο μέρη που χαρακτηρίζονται από τις εξής συνθήκες:

- Εάν $G<G_3$ τότε $P_3>P_4$,
- Εάν $G>G_3$ τότε $P_3<P_4$,

ενώ με τις χαρακτηριστικές τιμές P_3, P_4 το πεδίο τιμών των θλιπτικών φορτίων χωρίζεται σε τρία πεδία εντός των οποίων οι συντελεστές της (3.24) – και κατ' επέκταση και της (3.22) – έχουν σταθερό πρόσημο.

Ο λόγος για τον οποίο πραγματοποιείται ο χωρισμός του πεδίου τιμών των θλιπτικών φορτίων σε τέτοιας μορφής επί μέρους πεδία, είναι το γεγονός ότι για τη διερεύνηση θα χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις του Vièta οι οποίες εκτός της (3.39) είναι:

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = -J_1 \tag{3.51α}$$

$$\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3 = J_2 \tag{3.51β}$$

Η χρήση των παραπάνω σχέσεων μπορεί να οδηγήσει σε ασφαλή συμπεράσματα μόνον όταν η εφαρμογή τους γίνεται σε πεδία τιμών εντός των οποίων οι συντελεστές J_1, J_2, J_3 έχουν σταθερά πρόσημα.

Έστω κατ' αρχήν ότι $G<G_3$ οπότε $P_3>P_4$. Στην περίπτωση αυτή το πεδίο των τιμών των θλιπτικών φορτίων χωρίζεται σε τρία πεδία σε κάθε ένα από τα οποία ισχύουν τα εξής (Πίνακας 3.3):

- **<u>Πεδίο Π_1, $0<P<P_4$</u>**: Στο πεδίο αυτό ισχύουν επίσης τα εξής: $J_1<0$, $J_2>0$, $J_3<0$. Εφόσον διερευνώνται οι πιθανές υποπεριπτώσεις της κατηγορίας Β αυτό σημαίνει ότι $\Delta<0$ και $\alpha<0$. Η συνάρτηση $\varphi=\cos^{-1}(x)$ (3.33δ) ορίζεται μόνο για $-1\le x\le +1$ και επομένως $0\le\varphi\le\pi$ ή $0\le(\varphi/3)\le(\pi/3)$. Άρα η $\varphi/3$ κείται στο πρώτο τεταρτημόριο όπου $\cos(x)>0$ και $\sin(x)>0$. Έτσι από τη σχέση (3.33α) προκύπτει ότι $t_1>0$, και επειδή $J_1<0$ βγαίνει το συμπέρασμα ότι $\boldsymbol{\mu_1>0}$ ($\mu_1=t_1-(J_1/3)$). Σ' αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί στο πεδίο αυτό τα πρόσημα των J_i είναι ίδια με αυτά τα οποία ισχύουν και για την περίπτωση της δοκού Euler στα πλαίσια της θεωρίας Α' τάξης που μελετήθηκε στην Παράγραφο 3.2.1.1. Ακολουθώντας επομένως τη μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε στην παράγραφο αυτή (περίπτωση $k<c/8$ και $G_1<G<G_2$), αποδεικνύεται ότι $\mu_2>0$ και $\mu_3>0$. Επομένως $\mu_1>0$, $\mu_2>0$ και $\mu_3>0$. **Άρα σε αυτό το πεδίο τιμών των θλιπτικών φορτίων, εμφανίζεται η υποπερίπτωση λύσης B_1.**

- **<u>Πεδίο Π_2, $P_4<P<P_3$:</u>** Στο πεδίο αυτό ισχύουν: $J_1<0$, $J_2<0$, $J_3<0$. Δεδομένου ότι $J_1<0$, σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε: $\mu_1>0$. Από την σχέση (3.39) προκύπτει ότι $\mu_1\mu_2\mu_3>0$. Άρα οι μ_2, μ_3 θα πρέπει είναι ομόσημες. Όμως η σχέση (3.51β) επιβάλλει όπως: $\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3=J_2<0$, γεγονός που αποκλείει το γεγονός να είναι οι μ_2, μ_3 θετικοί αριθμοί. Επομένως $\mu_1>0$, $\mu_2<0$ και $\mu_3<0$. **Άρα σε αυτό το πεδίο τιμών των θλιπτικών φορτίων, εμφανίζεται η υποπερίπτωση λύσης B_2.**

- **<u>Πεδίο Π_3, $P>P_3$:</u>** Στο πεδίο αυτό ισχύουν: $J_1>0$, $J_2<0$, $J_3<0$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι $\mu_1>0$, ως εξής: Από τη (3.33α), τη σχέση $\mu_1=t_1-(J_1/3)$ και αν υποτεθεί ότι $\mu_1<0$ προκύπτει: $\cos(\varphi/3)<0.5\left[(J_1/3)\Big/\sqrt{(J_1/3)^2-(J_2/3)}\right]$.

  Επειδή όμως $J_1>0$ και $J_2<0$, αυτό σημαίνει ότι αν $\mu_1<0$ θα πρέπει σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, να ισχύει $\cos(\varphi/3)\le 0.5$. Όπως όμως τονίστηκε και πιο πάνω: $0\le(\varphi/3)\le(\pi/3) \rightarrow 0.5\le\cos(\varphi/3)\le 1$. Άρα $\mu_1>0$.

  Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι $\mu_2<0$ ως εξής: Επειδή $0\le(\varphi/3)\le(\pi/3) \rightarrow (-1)\le\cos[(\varphi+2\pi)/3)]\le(-0.5)$. Έτσι από την (3.33β) προκύπτει ότι $t_2<0$. Αν γίνει η υπόθεση ότι $\mu_2>0$ τότε από την (3.33β) προκύπτει ότι $\cos[(\varphi+2\pi)/3]>0.5\left[(J_1/3)\Big/\sqrt{(J_1/3)^2-(J_2/3)}\right]$. Εφόσον όμως $J_1>0$ και $J_2<0$ θα πρέπει σύμφωνα με την παραπάνω σχέση να ισχύει $\cos[(\varphi+2\pi)/3)]>0$ (Άτοπο). Επομένως $\mu_2<0$, και άρα με βάση την (3.39) $\mu_3<0$. Έτσι $\mu_1>0$, $\mu_2<0$ και $\mu_3<0$. **Δηλαδή σε αυτό το πεδίο τιμών των θλιπτικών φορτίων, εμφανίζεται η υποπερίπτωση λύσης B_2.**

Έστω ότι $G>G_3$ οπότε $P_3<P_4$. Και στην περίπτωση αυτή το σύνολο των τιμών των θλιπτικών φορτίων χωρίζεται σε τρία πεδία σε κάθε ένα από τα οποία ισχύουν τα εξής:

- **<u>Πεδίο Π΄$_1$, $0<P<P_3$:</u>** Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι στην περίπτωση αυτή $\alpha(P)>0$ για κάθε τιμή των τριών εδαφικών παραμέτρων, και επομένως αποκλείεται να εμφανιστεί μορφή λύσης που ανήκει στην κατηγορία Β (Σχήμα 3.4). Άρα δεν τίθεται θέμα διερεύνησης υποπεριπτώσεων της κατηγορίας αυτής.
- **<u>Πεδίο Π΄$_2$, $P_3<P<P_4$:</u>** Στο πεδίο αυτό ισχύουν: $J_1>0$, $J_2>0$ και $J_3<0$. Ακολουθώντας παρόμοια μέθοδο με αυτήν που ακολουθήθηκε και για το Πεδίο Π_3 αποδεικνύεται ότι $\mu_1>0$. Επίσης από τη σχέση (3.33β) προκύπτει ότι $t_2<0$ και επειδή $J_1>0$, αλλά και $\mu_2=t_2-(J_1/3)$: $\mu_2<0$. Τέλος η (3.39) επιβάλλει $\mu_1\mu_2\mu_3>0$, και επειδή $\mu_1>0$ και $\mu_2<0$ άρα $\mu_3<0$. **Άρα σε αυτό το πεδίο τιμών των θλιπτικών φορτίων, εμφανίζεται η υποπερίπτωση λύσης B_2.**
- **<u>Πεδίο Π΄$_3$, $P>P_4$:</u>** Στο πεδίο αυτό ισχύουν: $J_1>0$, $J_2<0$ και $J_3<0$. Τα πρόσημα των J_i είναι όμοια με αυτά του πεδίου Π_3 στην περίπτωση $G<G_3$. Επομένως όπως και στην περίπτωση εκείνη: $\mu_1>0$, $\mu_2<0$ και $\mu_3<0$. **Δηλαδή σε αυτό το πεδίο τιμών των θλιπτικών φορτίων, εμφανίζεται η υποπερίπτωση λύσης B_2.**

Με όλη την παραπάνω διαδικασία «σαρώθηκε» όλο το πεδίο των τιμών των τριών παραμέτρων του εδαφικού προσομοιώματος αλλά και των τιμών του αξονικού φορτίου όταν αυτό είναι θλιπτικό. Από την διερεύνηση αυτή προέκυψε το γενικό συμπέρασμα ότι από το σύνολο των πιθανών μορφών λύσης που δίνονται στον Πίνακα 3.2α οι μόνες που είναι δυνατό να εμφανιστούν για την συγκεκριμένη περίπτωση είναι οι περιπτώσεις: A_1, B_1, B_2 όπως φαίνεται και από τον παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα (Πίνακας 3.3).

Πίνακας 3.3. Υποπεριπτώσεις της κατηγορίας Β όπου αυτή εμφανίζεται.

		ΠΕΔΙΑ ΤΙΜΩΝ ΘΛΙΠΤΙΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ								
		ΠΕΔΙΟ Π_1 $0<P<P_4$			**ΠΕΔΙΟ Π_2** $P_4<P<P_3$			**ΠΕΔΙΟ Π_3** $P>P_3$		
$G<G_3$ ($P_3>P_4$)	Πρόσημα J_i	$J_1<0$	$J_2>0$	$J_3<0$	$J_1<0$	$J_2<0$	$J_3<0$	$J_1>0$	$J_2<0$	$J_3<0$
	Πρόσημα μ_i	$\mu_1>0$	$\mu_2>0$	$\mu_3>0$	$\mu_1>0$	$\mu_2<0$	$\mu_3<0$	$\mu_1>0$	$\mu_2<0$	$\mu_3<0$
	Περίπτωση λύσης	**B_1**			**B_2**			**B_2**		
		ΠΕΔΙΟ Π΄$_1$ $0<P<P_3$			**ΠΕΔΙΟ Π΄$_2$** $P_3<P<P_4$			**ΠΕΔΙΟ Π΄$_3$** $P>P_4$		
$G>G_3$ ($P_3<P_4$)	Πρόσημα J_i	Αποκλειστικά Περίπτωση **A_1**			$J_1>0$	$J_2>0$	$J_3<0$	$J_1>0$	$J_2<0$	$J_3<0$
	Πρόσημα μ_i				$\mu_1>0$	$\mu_2<0$	$\mu_3<0$	$\mu_1>0$	$\mu_2<0$	$\mu_3<0$
	Περίπτωση λύσης				**B_2**			**B_2**		

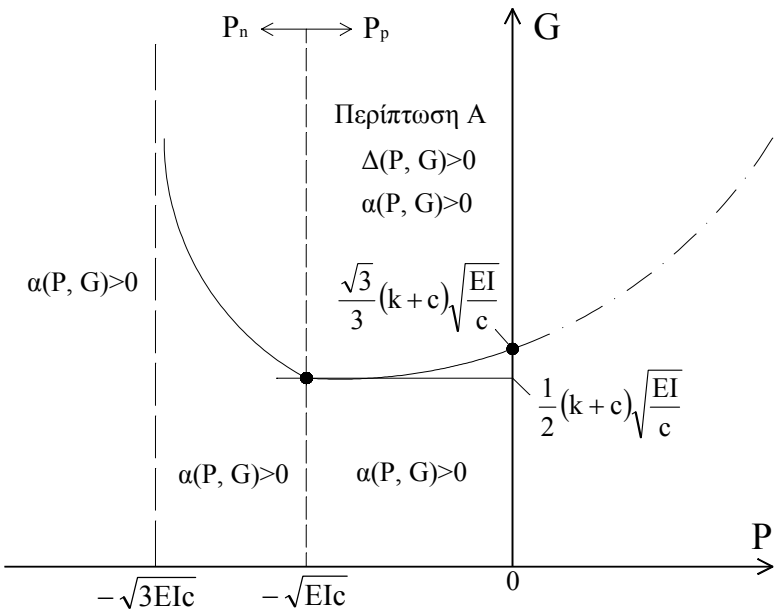
Περίπτωση εφελκυστικού φορτίου

Α' Στάδιο διερεύνησης

Και στην περίπτωση εφελκυστικού φορτίου ισχύει η (3.40) για αρνητικές τιμές του P. Όπως αποδείχθηκε, στην Παράγραφο 3.2.1.2α, όταν $G_2<G<G_1$ (τα G_1, G_2 δίνονται από τις σχέσεις (3.43α), (3.43β) αντίστοιχα) η εξίσωση α(P)=0 έχει ρίζες οι οποίες δεν είναι θετικές, και επομένως δεν αντιστοιχούν σε θλιπτικά φορτία. Επίσης αποδείχθηκε ότι όταν $G>G_1$ η εξίσωση αυτή έχει δυο ετερόσσημες ρίζες από τις οποίες η P_p (η θετική) δίνεται από τη (3.44), ενώ η αρνητική P_n δίνεται από τη σχέση:

$$P_n = -\frac{1}{2}\frac{EI(k+c)}{G} - \frac{1}{2}EI\sqrt{3\left[\frac{4c}{EI} - \frac{(k+c)^2}{G^2}\right]} \tag{3.52}$$

Επομένως, στην περίπτωση εφελκυστικού φορτίου, για $G<G_2$ η έκφραση α(P) έχει σταθερά αρνητικό πρόσημο, ενώ για $G>G_2$ υπάρχει τιμή αξονικού εφελκυστικού φορτίου (που δίνεται από την (3.44) για $P > -\sqrt{EIc}$ και από την (3.52) για $P < -\sqrt{EIc}$) για την οποία επαληθεύεται η εξίσωση α(P)=0. Δηλαδή για $G>G_2$ η έκφραση α(P) μπορεί να έχει και θετικό πρόσημο, γεγονός που σημαίνει ότι γενικά στην περίπτωση εφελκυστικού φορτίου είναι πιθανή η εμφάνιση μορφών λύσης που ανήκουν τόσο στην κατηγορία Α όσο και στην κατηγορία Β. Τέλος σχηματίζοντας το όριο της σχέσης (3.52) όταν $G\to+\infty$ τότε προκύπτει: $\lim_{G\to+\infty} P_n = -\sqrt{3EIc}$. Αυτό σημαίνει ότι όταν $P < -\sqrt{3EIc}$ τότε α(P)<0 ανεξαρτήτως τιμής των εδαφικών παραμέτρων k, G, c. Τα παραπάνω δίνονται παραστατικά στο διάγραμμα του σχήματος 3.5.



Σχήμα 3.5. Διάγραμμα διερεύνησης του πρόσημου του α(P,G) για την περίπτωση εφελκυστικού φορτίου.

Β' Στάδιο διερεύνησης

Από το πρώτο στάδιο της διερεύνησης προέκυψε το συμπέρασμα ότι είναι δυνατή η εμφάνιση μορφών λύσης που ανήκουν τόσο στην κατηγορία Α όσο και στην κατηγορία Β. Στην περίπτωση εφελκυστικού φορτίου, οι συντελεστές J_1, J_2, J_3 έχουν τα εξής πρόσημα: $J_1<0$, $J_2>0$ και $J_3<0$. Τα πρόσημα αυτά είναι σταθερά και ανεξάρτητα των τιμών που μπορεί να λάβει η αξονική φόρτιση. Με βάση τα πρόσημα αυτά βγαίνουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Εφόσον $J_3<0$, από τον Πίνακα 3.2α προκύπτει ότι για κάθε τιμή εφελκυστικού φορτίου για την οποία η μορφή λύσης ανήκει στην κατηγορία Α, η μορφή αυτή αντιστοιχεί στην υποπερίπτωση A_1.
- Από τα δεδομένα πρόσημα των συντελεστών J_1, J_2, J_3 προκύπτει το συμπέρασμα ότι όταν εμφανίζεται μορφή λύσης που ανήκει στην κατηγορία Β η μορφή αυτή αντιστοιχεί στην υποπερίπτωση B_1 (βλέπε σχετική απόδειξη που δόθηκε για το Πεδίο Π_1 στην περίπτωση θλιπτικού φορτίου).

3.3.2.2. Δοκός Timoshenko

<u>Θεωρία α' τάξης</u>

Οι συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης (3.22), J_1, J_2, J_3 για την παρούσα περίπτωση δίνονται από τις σχέσεις (3.12α) – (3.12γ). Μπορεί να αποδειχθεί ότι η διακρίνουσα Δ στην περίπτωση αυτή είναι μια συνάρτηση της μορφής: $\Delta(G)=(A/G^4)+(B/G^3)+(\Gamma/G^2)+(E/G)+Z$. Τα Α, Β, Γ, Ε, Ζ, είναι πολύπλοκες εκφράσεις των k, c, G και με πρόσημα που μεταβάλλονται εντός του πεδίου τιμών των παραμέτρων αυτών. Επομένως το πρώτο στάδιο της διερεύνησης θα γίνει με τη βοήθεια της έκφρασης:

$$\alpha(G) = -\left(\frac{k+c}{3}\right)^2 \frac{1}{G^2} + \left[\frac{c}{9\Phi}(k-2c)\right]\frac{1}{G} + \frac{c}{3}\left(\frac{1}{EI} - \frac{c}{3\Phi^2}\right) \tag{3.53}$$

Α' Στάδιο διερεύνησης

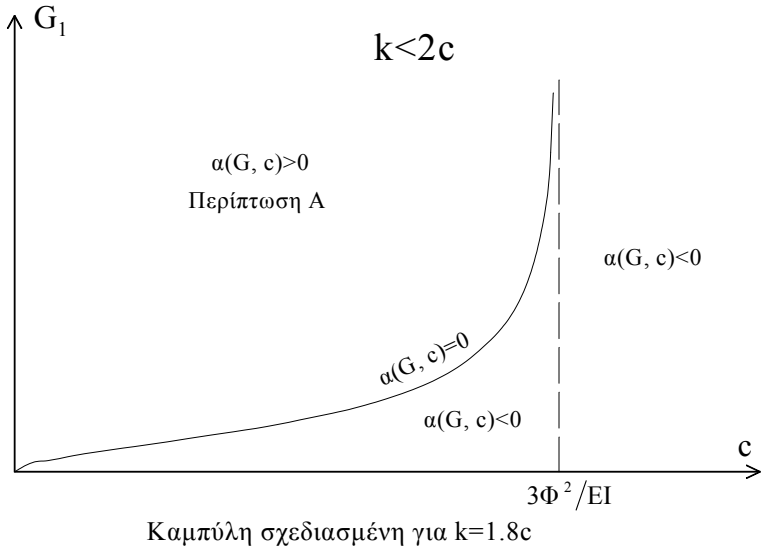
Η διερεύνηση της (3.53) θα γίνει για τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. **<u>k<2c</u>**: Όταν k<2c και $c > 3\Phi^2/EI$ τότε για κάθε τιμή της σταθεράς του διατμητικού επιπέδου G, η α(G) λαμβάνει αρνητικές τιμές (Σχήμα 3.6). Επομένως σε αυτό το πεδίο τιμών των παραμέτρων k, c είναι πιθανή η εμφάνιση μορφών λύσης που ανήκουν τόσο στην κατηγορία Α όσο και στην κατηγορία Β.

   Όταν $c < 3\Phi^2/EI$ τότε η ακόλουθη χαρακτηριστική τιμή του G:

$$G_1 = -\frac{EI\Phi(k-2c)}{2(3\Phi^2 - EIc)} + \frac{\sqrt{3EI\Phi^2\left[c(4\Phi^2 - EIc)k^2 + 4c^2(2\Phi^2 - EIc)k + 4c^3\Phi^2\right]}}{2c(3\Phi^2 - EIc)} \tag{3.54}$$

   αποτελεί ρίζα της εξίσωσης α(G)=0 και επομένως σε αυτό το πεδίο τιμών των k, c, η (3.53) αλλάζει πρόσημο. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι όταν $G>G_1$ τότε α(G)>0, και επομένως οι μόνες πιθανές μορφές λύσης που μπορούν να εμφανιστούν ανήκουν στην κατηγορία Α. Αντίστοιχα όταν $G<G_1$ τότε α(G)<0 (βλέπε Σχήμα 3.6).



Σχήμα 3.6. Διερεύνηση του προσήμου της έκφρασης α(G) για την περίπτωση k<2c.

2. **<u>k>2c</u>:** Όταν k>2c η διερεύνηση πραγματοποιείται στα παρακάτω πεδία τιμών της παραμέτρου c:

α. $c < 3\Phi^2/EI$ (Σχήμα 3.7β): Στην περίπτωση αυτή όταν $G<G_1$ (το G_1 δίνεται από τη σχέση (3.54)) τότε α(G)<0, ενώ όταν $G>G_1$ τότε α(G)>0. Επομένως είναι πιθανές τόσο οι λύσεις της κατηγορίας A όσο και της κατηγορίας B. Πάντως επειδή η α(G) λαμβάνει αρνητικές τιμές μόνον για ένα μικρό εύρος τιμών των c, G είναι πολύ πιθανό να μην εμφανίζεται καθόλου λύση που ανήκει στην κατηγορία B.

β. $3\Phi^2/EI < c < 4\Phi^2/EI$ (Σχήμα 3.7α): Όταν η παράμετρος c λαμβάνει τιμές εντός αυτού του πεδίου, τότε για τη διερεύνηση του προσήμου της α(G) ορίζεται η παρακάτω χαρακτηριστική τιμή του k:

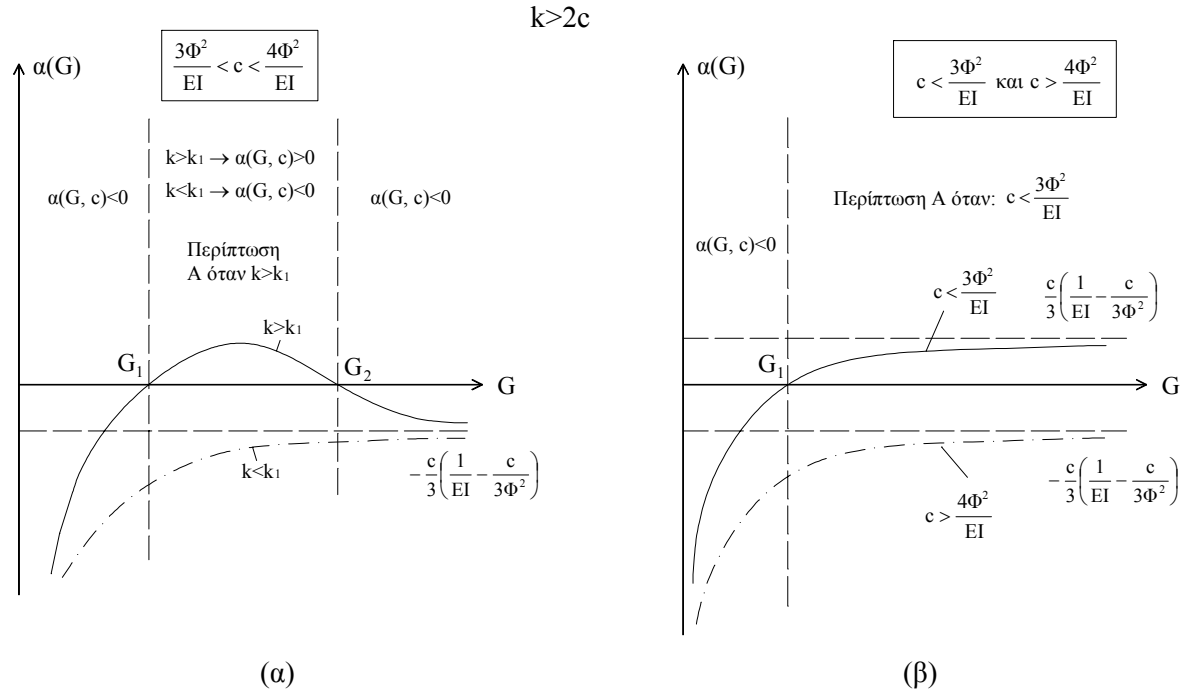
$$k_1 = 2c\left[-\left(\frac{2\Phi^2 - EIc}{4\Phi^2 - EIc}\right) + \frac{\sqrt{EIc\left(EIc - 3\Phi^2\right)}}{4\Phi^2 - EIc}\right] \tag{3.55}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι σε αυτό το πεδίο τιμών του c, ισχύει: $k_1>2c$. Όταν $k<k_1$, τότε η α(G) λαμβάνει αρνητικές τιμές για κάθε τιμή του G, γεγονός που δεν αποκλείει την εμφάνιση τόσο της κατηγορίας A όσο και της κατηγορίας B. Όταν $k>k_1$ τότε ορίζονται δυο χαρακτηριστικές τιμές της παραμέτρου G:

$$G_{1,2} = -\frac{EI\Phi(k-2c)}{2(3\Phi^2 - EIc)} \pm \frac{\sqrt{3EI\Phi^2\left[c(4\Phi^2 - EIc)k^2 + 4c^2(2\Phi^2 - EIc)k + 4c^3\Phi^2\right]}}{2c(3\Phi^2 - EIc)} \quad (G_2 > G_1) \tag{3.56}$$

Όταν $G<G_1$ ή $G>G_2$ τότε α(G)<0 ενώ εάν $G_1<G<G_2$ τότε α(G)>0. Επομένως υπάρχει διάστημα τιμών του G εντός του οποίου εμφανίζονται μόνον λύσεις που ανήκουν στην κατηγορία A (όταν $G_1<G<G_2$). Η πιθανότητα εμφάνισης λύσεων που ανήκουν στην κατηγορία B περιορίζεται μόνο σε τιμές του c πολύ κοντά στην τιμή $4\Phi^2/EI$.

γ. $c > 4\Phi^2/EI$ (Σχήμα 3.7β): Στο πεδίο αυτό για κάθε τιμή του G, η α(G) λαμβάνει μόνον αρνητικές τιμές. Επομένως είναι δυνατή η εμφάνιση λύσεων και της κατηγορίας A και της κατηγορίας B. Μάλιστα επειδή μπορεί να αποδειχθεί ότι το όριο της έκφρασης α(G) όταν τείνει στο +∞ είτε η παράμετρος k, είτε η παράμετρος c, είναι το -∞, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια οριακή τιμή της παραμέτρου G πάνω από την οποία ισχύει σταθερά Δ<0 και επομένως αποκλείεται η εμφάνιση λύσεων της κατηγορίας A.



Σχήμα 3.7. Διαγράμματα προσδιορισμού του προσήμου του α(G,c) για την περίπτωση της δοκού Timoshenko (Θεωρία α' τάξης)

Β' Στάδιο διερεύνησης

Για τα δεδομένα πρόσημα των J_1, J_2, J_3 αποδεικνύεται – όπως και στην περίπτωση της δοκού Euler στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης – ότι οι υποπεριπτώσεις λύσης που εμφανίζονται είναι οι A_1 και B_1.

<u>Θεωρία β΄ τάξης</u>

Στην περίπτωση αυτή οι συντελεστές J_1, J_2, J_3 δίνονται από τις σχέσεις (3.9α) – (3.9γ). Όπως γίνεται κατανοητό από τις σχέσεις αυτές, η παρούσα περίπτωση – πέρα από την μεγαλύτερη πολυπλοκότητα σε σχέση με τις προηγούμενες περιπτώσεις – έχει την ιδιομορφία να χαρακτηρίζεται από εκφράσεις των J_i οι οποίες εμφανίζουν στο σημείο P=Φ ασυνέχεια. Πράγματι τα πλευρικά όρια των εκφράσεων αυτών όταν το P→Φ είναι διάφορα μεταξύ τους και μη πεπερασμένα. Επομένως το πρόβλημα της διερεύνησης των πιθανών μορφών λύσης της (3.22) θα πρέπει να διασπαστεί σε δυο κλάδους που καθένας από αυτούς αντιστοιχεί σε τιμές του αξονικού φορτίου μικρότερες ή μεγαλύτερες του Φ. Η παραπάνω διάκριση έχει νόημα μόνον για την περίπτωση θλιπτικού φορτίου. Πριν εκτεθούν τα συμπεράσματα της διερεύνησης θα πρέπει να τονιστεί ότι για τιμές του αξονικού φορτίου που βρίσκονται στην περιοχή γύρω από την τιμή Φ οι εξαιρετικά υψηλές τιμές των παραμέτρων, καθιστούν αριθμητικά ασταθείς όλες τις εκφράσεις.

Εκτός από το διαχωρισμό του προβλήματος της διερεύνησης με βάση το κριτήριο P<Φ ή P>Φ, υπάρχει η δυνατότητα περαιτέρω διάσπασης του με βάση την οριακή τιμή που λαμβάνουν οι συντελεστές J_1, J_2 όταν P→Φ. Πιο συγκεκριμένα με βάση τις παρακάτω παρατηρήσεις:

- Όταν $c > \left[\Phi^2/(EI)\right]$ τότε $\lim_{P\to\Phi^-} J_1 = -\infty$, ενώ όταν $c < \left[\Phi^2/(EI)\right]$ τότε $\lim_{P\to\Phi^-} J_1 = +\infty$,
- Όταν G>G_1 τότε $\lim_{P\to\Phi^-} J_2 = +\infty$, ενώ όταν G<$G_1$ τότε $\lim_{P\to\Phi^-} J_2 = -\infty$, όπου το G_1 δίνεται από τη σχέση:

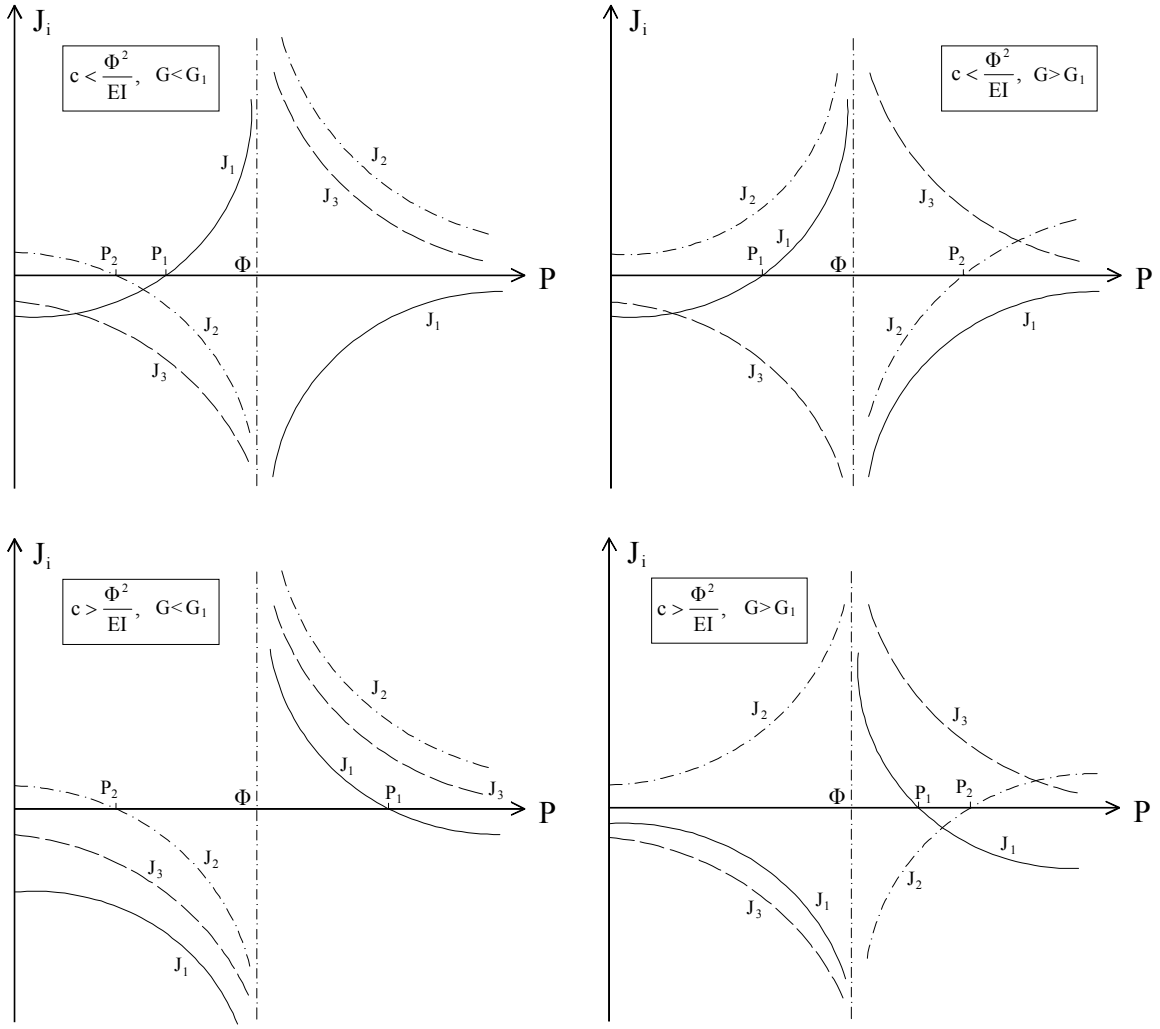
$$G_1 = \Phi\left[\left(\frac{k}{c}+1\right)-\frac{EIk}{\Phi^2}\right] \tag{3.57}$$

- $\lim\limits_{P\to\Phi^-} J_3 = -\infty$ ανεξαρτήτως τιμών των εδαφικών παραμέτρων k, c, G,

αλλά και με βάση το κριτήριο P<Φ η P>Φ, το πεδίο τιμών των δυο εδαφικών παραμέτρων c, G διακρίνεται σε 8 επιμέρους πεδία, τα οποία χαρακτηρίζονται από διαφορετικό και συγκεκριμένο κατά περίπτωση συνδυασμό προσήμων των συντελεστών J_i. Τα πεδία αυτά δίνονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 3.4), αλλά και στο Σχήμα 3.8 όπου δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των J_i κατά περίπτωση.

Πίνακας 3.4. Τα πρόσημα των συντελεστών J_i εντός των πεδίων τιμών των παραμέτρων c, G.

		P<Φ			P>Φ		
		J_1	J_2	J_3	J_1	J_2	J_3
$c > \frac{\Phi^2}{EI}$	$G>G_1$	-	+	-	+/-	-/+	+
	$G<G_1$	-	+/-	-	+/-	+	+
$c < \frac{\Phi^2}{EI}$	$G>G_1$	-/+	+	-	-	-/+	+
	$G<G_1$	-/+	+/-	-	-	+	+



Σχήμα 3.8. Γραφικές παραστάσεις των συντελεστών J_i για την περίπτωση θλιπτικού φορτίου.

Ο διαχωρισμός του προβλήματος στις υποπεριπτώσεις αυτές διευκολύνει τη διαδικασία διερεύνησης, καθώς σε κάθε μια από αυτές είναι σαφώς ορισμένα τα πρόσημα των συντελεστών J_i.

Α' Στάδιο διερεύνησης

Η μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί για το πρώτο στάδιο της διερεύνησης διαφέρει από τις προηγούμενες περιπτώσεις, καθώς η μεγάλη πολυπλοκότητα των συντελεστών J_i καθιστά αδύνατη την αναλυτική διαδικασία. Έτσι θα πραγματοποιηθεί αριθμητική και όχι αναλυτική διερεύνηση η οποία θα επικεντρωθεί αποκλειστικά σε εκείνο το πεδίο τιμών των τριών εδαφικών παραμέτρων που ανταποκρίνεται σε τιμές που είναι πιθανό να εμφανιστούν στην πράξη. Το πεδίο αυτό οριοθετείται από τις σχέσεις: $c < \left[\Phi^2/(EI)\right]$ και $G<G_1$ (το G_1 δίνεται από τη σχέση (3.57)). Όλη η παρακάτω διερεύνηση αφορά το συγκεκριμένο πεδίο τιμών. Κατ' αρχήν θα μελετηθεί το πεδίο τιμών του αξονικού φορτίου (0,Φ).

Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 3.8, για τιμές του αξονικού φορτίου μικρότερες του Φ, οι συντελεστές J_1, J_2 αλλάζουν πρόσημο. Ορίζονται έτσι οι παρακάτω χαρακτηριστικές τιμές του αξονικού φορτίου:

$$P_1 = \frac{EI\left[\Phi k + c(\Phi + G)\right]}{EI(k + c) + \Phi G} \tag{3.58α}$$

$$P_2 = \frac{c(\Phi G + EIk)}{\Phi(k + c)} \tag{3.58β}$$

Όταν $P<P_1$ τότε $J_1<0$ (και αντίστοιχα όταν $P>P_1$ τότε $J_1>0$), ενώ όταν $P<P_2$ τότε $J_2>0$ (και αντίστοιχα όταν $P>P_2$ τότε $J_2<0$). Επειδή γενικά $P_1 \neq P_2$, το πεδίο (0,Φ) διακρίνεται σε τρία επιμέρους πεδία. Όπως θα αποδειχθεί παρακάτω, εντός του μελετούμενου πεδίου τιμών των c, G δεν υπάρχει σταθερή σχέση διάταξης μεταξύ των P_1 και P_2 (δηλαδή υπάρχει περίπτωση να ισχύει, τόσο $P_1>P_2$ όσο και $P_1<P_2$). Επομένως κατά τη διαδικασία που θα ακολουθήσει, θα πρέπει να μελετηθεί τόσο η περίπτωση $P_1>P_2$ αλλά και η περίπτωση $P_1<P_2$. Τα πρόσημα που λαμβάνουν οι συντελεστές J_1, J_2, J_3 κατά περίπτωση, δίνονται από τον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 3.5).

Πίνακας 3.5. Τα πρόσημα των J_1, J_2, J_3 στο πεδίο που ορίζεται από τις συνθήκες $c < \left[\Phi^2/(EI)\right]$ και $G<G_1$.

	$P_1>P_2$				$P_1<P_2$			
	$P<\Phi$			$P>\Phi$	$P<\Phi$			$P>\Phi$
	$0<P<P_2$	$P_2<P<P_1$	$P>P_1$		$0<P<P_1$	$P_1<P<P_2$	$P>P_2$	
J_1	-	-	+	-	-	+	+	-
J_2	+	-	-	+	+	+	-	+
J_3	-	-	-	+	-	-	-	+

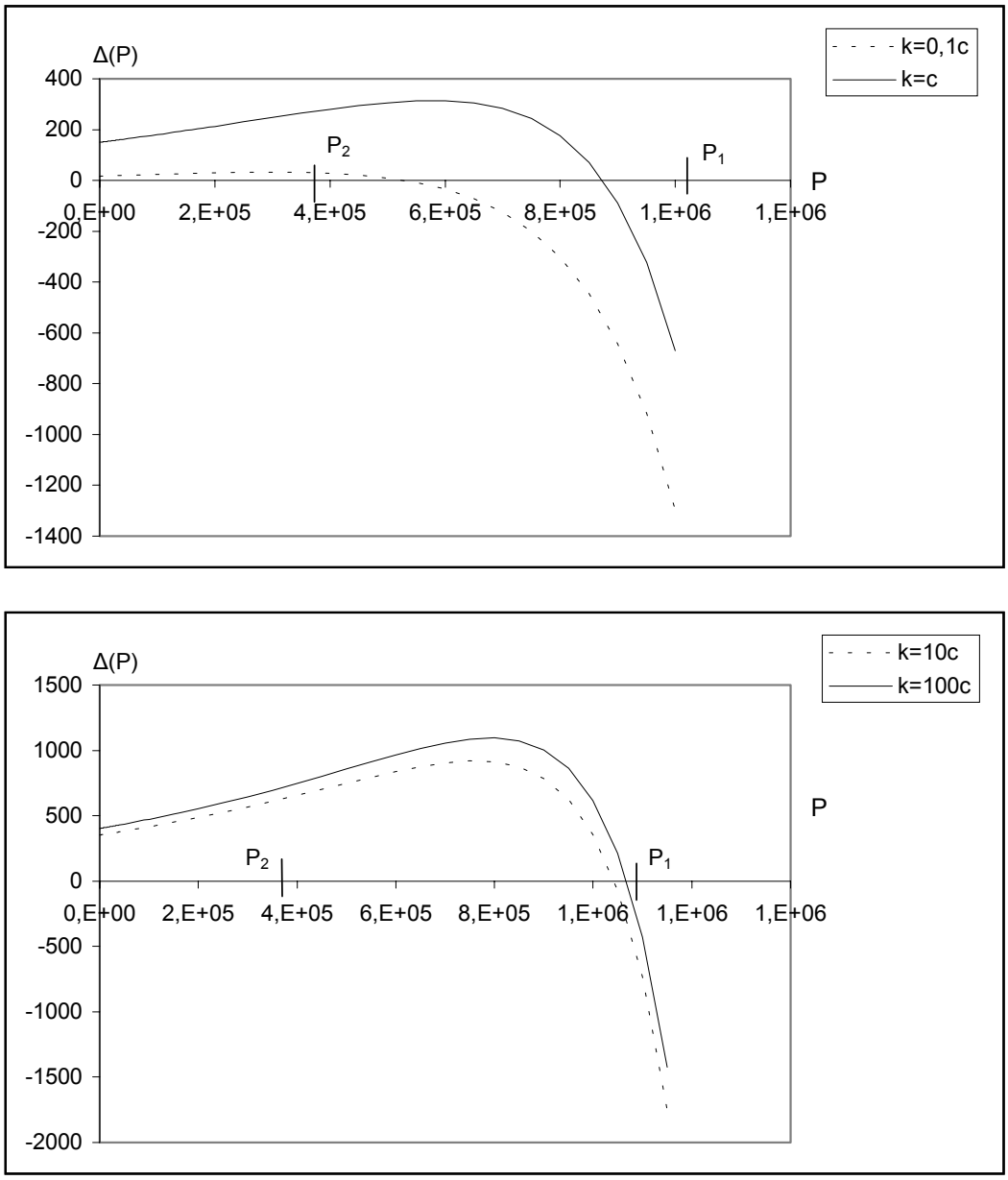
Η διαδικασία διερεύνησης που ακολουθήθηκε συνίσταται στα παρακάτω βήματα:

1. Το μελετούμενο πεδίο τιμών των εδαφικών παραμέτρων c, G, διακριτοποιήθηκε ως εξής:

- Το πεδίο τιμών της παραμέτρου c (0, Φ^2/EI) διακριτοποιήθηκε με τις εξής οκτώ τιμές: $c=0.01(\Phi^2/EI)$, $c=0.05(\Phi^2/EI)$, $c=0.1(\Phi^2/EI)$, $c=0.2(\Phi^2/EI)$, $c=0.4(\Phi^2/EI)$, $c=0.6(\Phi^2/EI)$, $c=0.8(\Phi^2/EI)$, $c=1.0(\Phi^2/EI)$.

- Το πεδίο τιμών της παραμέτρου G (0, G_1) διακριτοποιήθηκε με αντίστοιχο τρόπο με εννέα τιμές: $G=0.001G_1$, $G=0.01G_1$, $G=0.05G_1$, $G=0.1G_1$, $G=0.2G_1$, $G=0.4G_1$, $G=0.6G_1$, $G=0.8G_1$, $G=1.0G_1$.

2. Σχηματίστηκαν όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των παραπάνω διακριτών τιμών των c, G. Για κάθε ζεύγος τιμών (c, G) σχεδιάστηκαν σε σύστημα αξόνων Δ – P γραφήματα της διακρίνουσας Δ, για τις παρακάτω τιμές της παραμέτρου k: k=0.1c, c, 10c και 100c (ενδεικτικές καμπύλες για την περίπτωση $c=0.1(\Phi^2/EI)$ / $G=0.1G_1$ δίνονται στο Σχήμα 3.9).



Σχήμα 3.9. Καμπύλες της διακρίνουσας Δ(P) για την περίπτωση $c=0.1(\Phi^2/EI)$ / $G=0.1G_1$

3. Για κάθε καμπύλη, προσδιορίστηκαν, οι μεταβολές του προσήμου της διακρίνουσας Δ, και τα σημεία (τιμές του αξονικού θλιπτικού φορτίου P) αλλαγής προσήμου της. Παράλληλα προσδιορίστηκε η θέση των σημείων αλλαγής του προσήμου σε σχέση με τις χαρακτηριστικές τιμές του αξονικού φορτίου P_1, P_2 (σχέσεις 3.58α, 3.58β), καθώς και η σχέση διάταξης των τιμών αυτών ($P_1>P_2$ ή $P_2>P_1$).

Τα γενικά συμπεράσματα που προέκυψαν από την παραπάνω διερεύνηση είναι τα ακόλουθα:

1. Η εξίσωση $\Delta(P)=0$ έχει σε κάθε περίπτωση – πλην της οριακής περιπτώσεως $c=1.0(\Phi^2/EI)$ / $G=G_1$ – μια ρίζα εντός του διαστήματος $0<P<\Phi$. Αυτό σημαίνει ότι εντός του διαστήματος αυτού η διακρίνουσα $\Delta(P)$ αλλάζει πρόσημο. Επομένως είναι πιθανή η εμφάνιση μορφών λύσης που ανήκουν τόσο στην κατηγορία Α όσο και στην κατηγορία Β.
2. Γενικά η ρίζα της εξίσωσης $\Delta(P)=0$ βρίσκεται στο διάστημα (P_2,Φ) όταν $P_1>P_2$ ή στο διάστημα (P_1,Φ) όταν $P_2>P_1$. Στην πλειονότητα των περιπτώσεων η ρίζα αυτή βρίσκεται εντός του διαστήματος που ορίζουν οι τιμές P_1, P_2.

Για την περίπτωση $P>\Phi$ ακολουθήθηκε η ίδια διακριτοποίηση του πεδίου τιμών των παραμέτρων c, G όπως και στην περίπτωση $P<\Phi$. Από την διερεύνηση αυτή προέκυψαν τα παρακάτω συμπεράσματα:

Αποδείχθηκε ότι για συγκεκριμένους συνδυασμούς τιμών των τριών εδαφικών παραμέτρων εντός του μελετούμενου πεδίου τιμών τους, η εξίσωση $\Delta(P)=0$ έχει μια (π.χ. όταν $c=0.4(\Phi^2/EI)$ / $G=0.4G_1$ / $k=c$) ή δυο ρίζες (π.χ. όταν $c=0.2(\Phi^2/EI)$ / $G=0.2G_1$ / $k=c$). Επομένως στις περιπτώσεις αυτές η διακρίνουσα Δ αλλάζει πρόσημο. Υπάρχουν βέβαια περιπτώσεις συνδυασμών τιμών των τριών παραμέτρων για τους οποίους η εξίσωση $\Delta(P)=0$ δεν έχει καμία ρίζα (π.χ. όταν $c=0.2(\Phi^2/EI)$ / $G=0.4G_1$ / $k=c$), και δεδομένου ότι γενικά – όπως μπορεί να αποδειχθεί αναλυτικά – ισχύει:

$$\lim_{P\to+\infty}\Delta(P)=-\frac{1}{3}\left[\frac{\Phi(k+c)}{6EIG}\left(\frac{\Phi}{EI}-\frac{k+c}{G}\right)\right]^2<0$$

προκύπτει το συμπέρασμα ότι $\Delta(P)<0$ σε όλο το πεδίο τιμών $P>\Phi$. Από τις παραπάνω παρατηρήσεις προκύπτει το γενικό συμπέρασμα ότι στο πεδίο τιμών $P>\Phi$ είναι πιθανή η εμφάνιση περιπτώσεων λύσης που ανήκουν τόσο στην κατηγορία Α όσο και στην κατηγορία Β.

Β' Στάδιο διερεύνησης

Για τιμές του αξονικού φορτίου $P<\Phi$ το δεύτερο στάδιο της διερεύνησης των υποπεριπτώσεων της κατηγορίας Β θα πρέπει να γίνει – σύμφωνα με το δεύτερο συμπέρασμα του πρώτου σταδίου – εντός των διαστημάτων (P_2, P_1) και (P_1,Φ) για την περίπτωση $P_1>P_2$, και εντός των διαστημάτων (P_1, P_2), (P_2,Φ) για την περίπτωση $P_1<P_2$ (Πίνακας 3.5).

- **$P_1>P_2$ / $P_2<P<P_1$:** $J_1<0$, $J_2<0$, $J_3<0$. Η περίπτωση αυτή είναι αντίστοιχη με αυτή του πεδίου Π_2 που μελετήθηκε στα πλαίσια της διερεύνησης της δοκού Euler β' τάξης (Πίνακας 3.3). Όπως αποδείχθηκε για την περίπτωση εκείνη, στα δεδομένα πρόσημα των J_i αντιστοιχεί η υποπερίπτωση λύσης B_2.
- **$P_1>P_2$ / $P>P_1$ και $P_1<P_2$ / $P>P_2$:** $J_1>0$, $J_2<0$, $J_3<0$. Η περίπτωση αυτή είναι αντίστοιχη με αυτή του πεδίου Π_3 που μελετήθηκε στα πλαίσια της διερεύνησης της δοκού Euler β' τάξης (Πίνακας 3.3). Όπως αποδείχθηκε για την περίπτωση εκείνη, στα δεδομένα πρόσημα των J_i αντιστοιχεί η Περίπτωση B_2.
- **$P_1<P_2$ / $P_1<P<P_2$:** $J_1>0$, $J_2>0$, $J_3<0$. Η περίπτωση αυτή είναι αντίστοιχη με την περίπτωση του πεδίου Π'_2 που μελετήθηκε στα πλαίσια της διερεύνησης της δοκού Euler β' τάξης (Πίνακας 3.3). Όπως αποδείχθηκε για τα δεδομένα πρόσημα των J_i αντιστοιχεί η Περίπτωση B_2.

Όσον αφορά τις υποπεριπτώσεις της κατηγορίας Α, το γεγονός ότι σε όλο το πεδίο (0,Φ) ισχύει $J_3<0$ οδηγεί στο συμπέρασμα – σύμφωνα με τον Πίνακα 3.2α – ότι στο συγκεκριμένο πεδίο είναι πιθανή η εμφάνιση μόνο της υποπερίπτωσης A_1.

Για τιμές του αξονικού φορτίου P>Φ, όσο αναφορά τις υποπεριπτώσεις της κατηγορίας Β, μπορεί να αποδειχθεί ότι εμφανίζεται η B_3. Η απόδειξη έχει ως εξής: Τα πρόσημα των συντελεστών J_i είναι (Πίνακας 3.5): $J_1<0$, $J_2>0$, $J_3>0$. Από τη σχέση (3.39) προκύπτει ότι $\mu_1\mu_2\mu_3<0$. Όπως αποδείχθηκε κατά τη διερεύνηση της δοκού Euler στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης (Παράγραφος 3.2.1.2), όταν Δ<0 η ρίζα μ_1 είναι πάντα θετική ($\mu_1>0$). Μπορεί επίσης να αποδειχθεί με τρόπο παρόμοιο με εκείνον που παρουσιάστηκε κατά τη διερεύνηση της δοκού Euler στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης (Παράγραφος 3.2.1.1) ότι για τα δεδομένα πρόσημα των J_i η εξίσωση (3.24) έχει τουλάχιστον δυο θετικές ρίζες. Ωστόσο επειδή $\mu_1\mu_2\mu_3<0$ αποκλείεται να είναι και οι τρεις ρίζες θετικές. Επομένως στην περίπτωση αυτή η (3.24) έχει δυο θετικές ρίζες και μια αρνητική. Από τις σχέσεις (3.33β), (3.33γ) προκύπτει ότι $t_2<t_3$ και επομένως επειδή $\mu_i=t_i-(J_1/3)$ συνεπάγεται ότι $\mu_2<\mu_3$. Αυτό σημαίνει ότι η ρίζα μ_2 είναι αρνητική και η μ_3 θετική. Δηλαδή: $\mu_1>0$, $\mu_2<0$, $\mu_3>0$. Αυτός ο συνδυασμός προσήμων των μ_1, μ_2, μ_3 αντιστοιχεί σύμφωνα με τον Πίνακα 3.2α στην υποπερίπτωση B_3.

Όσον αφορά τις υποπεριπτώσεις της κατηγορίας Α για τιμές του αξονικού φορτίου P>Φ, το γεγονός ότι για τις τιμές αυτές $J_3>0$ οδηγεί στο συμπέρασμα – σύμφωνα με τον Πίνακα 3.2α – ότι η εμφανιζόμενη υποπερίπτωση είναι η A_2.

Για την περίπτωση εφελκυστικού φορτίου πραγματοποιήθηκε μια παρόμοιας μορφής διερεύνηση στο ίδιο πεδίο τιμών των εδαφικών παραμέτρων. Από το πρώτο στάδιο της διερεύνησης προέκυψε το γενικό συμπέρασμα ότι εντός του πεδίου τιμών P<0, η εξίσωση Δ(P)=0 αλλάζει πρόσημο και επομένως είναι δυνατή η εμφάνιση μορφών λύσης που ανήκουν τόσο στην κατηγορία Α όσο και στην κατηγορία Β. Από το δεύτερο στάδιο της διερεύνησης προέκυψε το γενικό συμπέρασμα ότι οι δυνατές υποπεριπτώσεις λύσης είναι οι A_1 και B_1.

Τα αποτελέσματα της διερεύνησης όλων των περιπτώσεων που εξετάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 3.6. Δυνατές μορφές λύσης της εξίσωσης 3.22 για όλες τις περιπτώσεις του Πίνακα 3.1

			Δυνατές μορφές λύσης κατά τον Πίνακα 3.2α
Euler	α' τάξη		A_1 / B_1
	β' τάξη	Θλιπτικό φορτίο	A_1 / B_1 / B_2
		Εφελκυστικό φορτίο	A_1 / B_1
Timoshenko	α' τάξη		A_1 / B_1
	β' τάξη	Θλιπτικό φορτίο	A_1 / A_2 / B_2 / B_3
		Εφελκυστικό φορτίο	A_1 / B_1

3.4. Σχηματισμός των μητρώων δυσκαμψίας

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστεί η διαδικασία σχηματισμού των μητρώων δυσκαμψίας για όλες τις περιπτώσεις του Πίνακα 3.1. Ο σχηματισμός των μητρώων θα γίνει με δυο μεθόδους:

1. **Μέθοδος Α'**: Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή τα μητρώα δυσκαμψίας θα σχηματιστούν με χρήση των συναρτήσεων που αποτελούν τις ακριβείς λύσεις των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα. Οι συναρτήσεις αυτές καταστρώθηκαν στην Παράγραφο 2 του παρόντος κεφαλαίου.
2. **Μέθοδος Β'**: Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή τα μητρώα δυσκαμψίας θα σχηματιστούν με χρήση προσεγγιστικών συναρτήσεων παρεμβολής, δηλαδή με την κλασσική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Η χρησιμότητα τις ανάπτυξης των μητρώων αυτών συνίσταται στην αντιμετώπιση προβλημάτων όπου είτε η διατομή της δοκού είτε κάποια από τις εδαφικές παραμέτρους δεν είναι σταθερή κατά μήκος της δοκού. Επομένως απαιτείται διακριτοποίηση των δοκών σε επί μέρους στοιχεία. Εξάλλου είναι δυνατή και η χρήση των αναλυτικών λύσεων των εξισώσεων ως συναρτήσεων παρεμβολής.

3.4.1. Δοκός Timoshenko

3.4.1.1. Θεωρία β' τάξης

Οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα είναι οι (3.7α), (3.7β) και (3.10) όπως προέκυψε από τη διαδικασία που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 3.2.1.1. Η μορφή των συναρτήσεων που αποτελούν την ακριβή λύση των (3.7α), (3.7β) δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη εντός του πεδίου τιμών που μπορούν να λάβουν οι τρεις εδαφικοί παράμετροι c, k, G και το αξονικό φορτίο. Σύμφωνα με τον Πίνακα 3.6 οι διαφορετικές μορφές λύσης είναι τέσσερις στην περίπτωση θλιπτικού φορτίου (A_1, A_2, B_2, B_3), και δυο στην περίπτωση εφελκυστικού φορτίου (A_1, B_1). Επομένως αν ακολουθηθεί η μέθοδος Α' θα πρέπει να σχηματιστούν πέντε διαφορετικά μητρώα δυσκαμψίας (για τις μορφές λύσης A_1, A_2, B_1, B_2, B_3) έτσι ώστε να καλυφθεί όλο το εύρος του πεδίου τιμών των c, k, G και P. Αντίθετα αν επιλεγεί η μέθοδος Β' ο σχηματισμός του μητρώου δυσκαμψίας δεν απαιτεί διαχωρισμό σε υποπεριπτώσεις καθώς θα γίνει χρήση μιας αλγεβρικής συνάρτησης παρεμβολής η οποία μπορεί να προσεγγίσει – με κατάλληλη διακριτοποίηση του προβλήματος – την ακριβή λύση ανεξαρτήτως των τιμών που μπορούν να λάβουν οι παράμετροι c, k, G αλλά και το αξονικό φορτίο P.

3.4.1.1α. Μέθοδος Α'

Αρχικά θα πρέπει να καθοριστούν οι βασικές και οι δευτερεύουσες παράμετροι του προβλήματος. Αν ληφθεί υπόψη ότι για τα εντατικά μεγέθη M, V, V_G ισχύουν οι ακόλουθες γνωστές σχέσεις:

$$M(x) = EI\left(\frac{d\psi}{dx}\right) \tag{3.59α}$$

$$V(x) = EI\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right) + P\left(\frac{dw}{dx}\right) \tag{3.59β}$$

$$V_G(x) = G\left(\frac{dw_k}{dx}\right) \tag{3.59γ}$$

τότε η σχέση (3.5) παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\delta\pi_T = \left[M(x)\delta\psi\right]_0^L + \int_0^L \left[-EI\frac{d^2\psi}{dx^2} + \Phi\left(\psi - \frac{dw}{dx}\right)\right]\delta\psi dx + \left[V_G(x)\delta w_k\right]_0^L + \left[V(x)\delta w\right]_0^L +$$

$$+\int_0^L \left[c\left(w_k - w\right) + kw_k - G\frac{d^2 w_k}{dx^2}\right]\delta w_k dx + \int_0^L \left[c\left(w - w_k\right) - \Phi\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx} - \psi\right) + P\frac{d^2 w}{dx^2} - q(x)\right]\delta w dx \qquad (3.60)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει το συμπέρασμα ότι βασικές παράμετροι του προβλήματος είναι τα μεγέθη μετακίνησης (γενικευμένες μετακινήσεις): w (συνολική κατακόρυφη μετακίνηση), w_k (κατακόρυφη μετακίνηση της διατμητικής στρώσης), και ψ (γωνία στροφής των διατομών). Αντιστοίχως οι δευτερεύουσες παράμετροι είναι τα εντατικά μεγέθη τα οποία είναι εργικώς ανταποκρινόμενα στις βασικές παραμέτρους. Επομένως οι δευτερεύουσες παράμετροι είναι: η ροπή κάμψης της δοκού M, η τέμνουσα δύναμη της δοκού V, και η τέμνουσα δύναμη που καταπονεί τη διατμητική στρώση V_G. Ο συνολικός αριθμός των βασικών και των δευτερευόντων παραμέτρων είναι 6, αριθμός που είναι ίσος με τη συνολική τάξη του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (3.7α), (3.7β) και (3.10), που διέπουν το πρόβλημα.

Το επόμενο στάδιο της μεθόδου αφορά τον καθορισμό των συναρτήσεων που περιγράφουν τις βασικές παραμέτρους του προβλήματος, δηλαδή τις μετακινήσεις w, w_k, ψ. Δεδομένης της τάξης του προβλήματος, οι συναρτήσεις αυτές θα πρέπει να έχουν την παρακάτω γενική μορφή:

$$w(x) = C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + C_4 f_4 + C_5 f_5 + C_6 f_6 \qquad (3.61\alpha)$$

$$w_k(x) = C_1' f_1 + C_2' f_2 + C_3' f_3 + C_4' f_4 + C_5' f_5 + C_6' f_6 \qquad (3.61\beta)$$

$$\psi(x) = C_1'' f_1 + C_2'' f_2 + C_3'' f_3 + C_4'' f_4 + C_5'' f_5 + C_6'' f_6 \qquad (3.61\gamma)$$

Οι συναρτήσεις (3.61β), (3.61γ) στα πλαίσια της μεθόδου Α' θα πρέπει να είναι οι ακριβείς λύσεις των ομογενών εξισώσεων των (3.7α), (3.7β). Η συνάρτηση (3.61α) προκύπτει από τις άλλες δυο μέσω της σχέσης (3.10). Εφόσον γίνεται χρήση των συναρτήσεων που αποτελούν την ακριβή λύση του προβλήματος, η μορφή των συναρτήσεων $f_1 - f_6$ εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων c, k, G και του αξονικού φορτίου P. Όπως τονίστηκε και πιο πάνω για την περίπτωση της δοκού Timoshenko στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης οι πιθανές μορφές που μπορούν να λάβουν οι $f_1 - f_6$ αντιστοιχούν στις περιπτώσεις A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 των Πινάκων 3.2α και 3.2β. Είναι προφανές ότι στις περιπτώσεις αυτές αντιστοιχούν και διαφορετικά μητρώα δυσκαμψίας. Ωστόσο η διαδικασία σχηματισμού τους είναι κοινή, και παρακάτω θα παρουσιαστεί με τέτοιο γενικό τρόπο ώστε να μπορεί να ειδικευτεί εύκολα, για κάθε μια από τις πιθανές μορφές λύσης.

Από τις σχέσεις (3.61α), (3.61β) και (3.61γ) προκύπτει το συμπέρασμα ότι προκειμένου να ορισθούν πλήρως οι βασικές παράμετροι του προβλήματος θα πρέπει να προσδιοριστούν οι 18 σταθερές ολοκλήρωσης $C_1 - C_6$, $C_1' - C_6'$ και $C_1'' - C_6''$. Από τη σχέση (3.60) προκύπτει ότι οι συνοριακές συνθήκες μέσω των οποίων είναι δυνατός ο προσδιορισμός των σταθερών αυτών είναι έξι. Επομένως ο αριθμός των συνοριακών συνθηκών είναι ανεπαρκής. Ωστόσο οι σταθερές ολοκλήρωσης δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, καθώς οι σταθερές $C_1 - C_6$ μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των σταθερών $C_1' - C_6'$ με τη βοήθεια της σχέσης (3.10). Επίσης, οι σταθερές $C_1'' - C_6''$ μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των σταθερών $C_1' - C_6'$ με τη βοήθεια της σχέσης (3.6γ). Επομένως οι συναρτήσεις (3.61α) - (3.61γ) μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$w(x) = C_1' f_{1w} + C_2' f_{2w} + C_3' f_{3w} + C_4' f_{4w} + C_5' f_{5w} + C_6' f_{6w} \tag{3.62α}$$

$$w_k(x) = C_1' f_1 + C_2' f_2 + C_3' f_3 + C_4' f_4 + C_5' f_5 + C_6' f_6 \tag{3.62β}$$

$$\psi(x) = C_1' f_{1\psi} + C_2' f_{2\psi} + C_3' f_{3\psi} + C_4' f_{4\psi} + C_5' f_{5\psi} + C_6' f_{6\psi} \tag{3.62γ}$$

Στις παραπάνω σχέσεις οι συναρτήσεις f_{iw}, $f_{i\psi}$ είναι εκφράσεις των συναρτήσεων f_i. Επομένως η μορφή των εκφράσεων αυτών εξαρτάται από την μορφή λύσης των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος. Επί παραδείγματι για την περίπτωση κατά την οποία σχηματίζεται το μητρώο δυσκαμψίας για την μορφή λύσης A_1 οι εκφράσεις αυτές είναι:

$$\begin{aligned} f_{1w} &= A_1 f_1 & f_{4w} &= A_3 f_4 - A_2 f_3 \\ f_{2w} &= A_1 f_2 & f_{5w} &= A_3 f_5 - A_2 f_6 \\ f_{3w} &= A_3 f_3 + A_2 f_4 & f_{6w} &= A_3 f_6 + A_2 f_5 \end{aligned} \tag{3.63α}$$

$$\begin{aligned} f_{1\psi} &= A_4 f_1 & f_{4\psi} &= A_6 f_3 + A_5 f_4 \\ f_{2\psi} &= -A_4 f_2 & f_{5\psi} &= -A_5 f_5 - A_6 f_6 \\ f_{3\psi} &= A_5 f_3 - A_6 f_4 & f_{6\psi} &= A_6 f_5 - A_5 f_6 \end{aligned} \tag{3.63β}$$

Όπου:

$$A_1 = \left(1 + \frac{k}{c}\right) - \frac{G}{c} R_1^2 \qquad A_2 = 2RQ\frac{G}{c} \qquad A_3 = \left(1 + \frac{k}{c}\right) - \frac{G}{c}\left(R^2 - Q^2\right)$$

$$A_4 = \left[\frac{\Phi R_1}{-EIR_1^2 + \Phi}\right] A_1 \qquad A_5 = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2}\Phi \qquad A_6 = \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\beta_1^2 + \beta_2^2}\Phi$$

$$\alpha_1 = A_3 R + A_2 Q \qquad \alpha_2 = A_2 R - A_3 Q$$

$$\beta_1 = -EI\left(R^2 - Q^2\right) + \Phi \qquad \beta_2 = 2EIRQ$$

Τα R_1, R, Q δίνονται από τις σχέσεις (3.30α), (3.30β), (3.30γ) αντίστοιχα.

Επόμενο βήμα είναι η έκφραση των βασικών παραμέτρων και των δευτερευόντων παραμέτρων συναρτήσει των σταθερών ολοκλήρωσης C_1' - C_6'. Για το σκοπό αυτό, τίθενται κατ' αρχήν:

$$\begin{aligned} u_1 &= w(0) & u_2 &= \psi(0) & u_3 &= w_k(0) \\ u_4 &= w(L) & u_5 &= \psi(L) & u_6 &= w_k(L) \end{aligned} \tag{3.64α}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= EI\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)_{x=0} + P\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = V(0) & s_2 &= -EI\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x=0} = M(0) & s_3 &= -G\left(\frac{dw_k}{dx}\right)_{x=0} = V_G(0) \\ s_4 &= -EI\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)_{x=L} - P\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=L} = V(L) & s_5 &= EI\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x=L} = M(L) & s_6 &= G\left(\frac{dw_k}{dx}\right)_{x=L} = V_G(L) \end{aligned} \tag{3.64β}$$

Οι σχέσεις (3.64α) και (3.64β) μπορούν να γραφούν σε μητρωϊκή ως εξής:

$$[u] = [R][C'] \tag{3.65α}$$

$$[s] = [Q][C'] \tag{3.65β}$$

Όπου:

$$[u]^T = |\, u_1 \,\vdots\, u_2 \,\vdots\, u_3 \,\vdots\, u_4 \,\vdots\, u_5 \,\vdots\, u_6 \,| \tag{3.66α}$$

$$[s]^T = |\, s_1 \,\vdots\, s_2 \,\vdots\, s_3 \,\vdots\, s_4 \,\vdots\, s_5 \,\vdots\, s_6 \,| \tag{3.66β}$$

$$[C']^T = |\, C'_1 \,\vdots\, C'_2 \,\vdots\, C'_3 \,\vdots\, C'_4 \,\vdots\, C'_5 \,\vdots\, C'_6 \,| \tag{3.66γ}$$

Η μορφή των μητρώων [R], [Q] εξαρτάται από την μορφή λύσης της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος. Για την περίπτωση λύσης A_1 τα εν λόγω μητρώα είναι:

$$[R] = \begin{bmatrix} A_1 & A_1 & A_3 & -A_2 & A_3 & A_2 \\ A_4 & -A_4 & A_5 & A_6 & -A_5 & A_6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ f_{1wL} & f_{2wL} & f_{3wL} & f_{4wL} & f_{5wL} & f_{6wL} \\ f_{1\psi L} & f_{2\psi L} & f_{3\psi L} & f_{4\psi L} & f_{5\psi L} & f_{6\psi L} \\ f_{1L} & f_{2L} & f_{3L} & f_{4L} & f_{5L} & f_{6L} \end{bmatrix} \tag{3.67α}$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} d_1 & -d_1 & d_2 & d_3 & -d_2 & d_3 \\ -EIA_4R_1 & -EIA_4R_1 & -EIb_4 & -EIb_3 & -EIb_4 & EIb_3 \\ -GR_1 & GR_1 & -GR & -GQ & GR & -GQ \\ -d_1f_{1L} & d_1f_{2L} & -d_2f_{3L}+d_3f_{4L} & -d_3f_{3L}-d_2f_{4L} & d_2f_{5L}+d_3f_{6L} & -d_3f_{5L}+d_2f_{6L} \\ EIA_4R_1f_{1L} & EIA_4R_1f_{2L} & EI(b_4f_{3L}-b_3f_{4L}) & EI(b_3f_{3L}+b_4f_{4L}) & EI(b_4f_{5L}+b_3f_{6L}) & EI(b_4f_{6L}-b_3f_{5L}) \\ GR_1f_{1L} & -GR_1f_{2L} & G(Rf_{3L}-Qf_{4L}) & G(Rf_{4L}+Qf_{3L}) & -G(Rf_{5L}+Qf_{6L}) & G(-Rf_{6L}+Qf_{5L}) \end{bmatrix} \tag{3.67β}$$

Όπου:

$d_1 = EI(A_4R_1^2) + P(A_1R_1)$ $\quad$ $d_2 = EIb_1 + P\alpha_1$ $\quad$ $d_3 = EIb_2 - P\alpha_2$

$b_1 = (R^2 - Q^2)A_5 - (2RQ)A_6$ $\quad$ $b_2 = (R^2 - Q^2)A_6 + (2RQ)A_5$

$b_3 = A_6R + A_5Q$ $\quad$ $b_4 = A_5R - A_6Q$

Η αντιστροφή της σχέσης (3.65α) δίνει:

$$[C] = [R]^{-1}[u] \tag{3.68}$$

Εισάγοντας την παραπάνω σχέση στην (3.65β) προκύπτει:

$$[s] = [Q][R]^{-1}[u] \Rightarrow [s] = [K][u] \tag{3.69}$$

Το διαστάσεων 6x6 μητρώο $[K] = [Q][R]^{-1}$ είναι το ζητούμενο μητρώο δυσκαμψίας. Με παρόμοια διαδικασία μπορούν να σχηματιστούν τα μητρώα R, Q που αντιστοιχούν στις μορφές λύσης A_2, B_1, B_2, B_3 οι οποίες σύμφωνα με τον Πίνακα 3.6, αποτελούν τις δυνατές μορφές λύσης για την περίπτωση της δοκού Timoshenko στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης. Τα μητρώα αυτά δίνονται στο Παράρτημα Α.

3.4.1.1β. Μέθοδος Β'

Πρώτο βήμα στην διαδικασία σχηματισμού των μητρώων δυσκαμψίας σύμφωνα τη μέθοδο Β' είναι η επιλογή των συναρτήσεων παρεμβολής με τις οποίες θα προσεγγιστεί η λύση των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος. Η πιο συνήθης μορφή συναρτήσεων παρεμβολής είναι οι αλγεβρικές συναρτήσεις. Επομένως αντί των συναρτήσεων που αποτελούν την ακριβή λύση του προβλήματος (Πίνακες 3.2α, 3.2β), η διαδικασία ξεκινά από τις συναρτήσεις:

$$w_k(x) = C'_1 + C'_2 x + C'_3 x^2 + C'_4 x^3 + C'_5 x^4 + C'_6 x^5 \tag{3.70α}$$

$$\psi(x) = C''_1 + C''_2 x + C''_3 x^2 + C''_4 x^3 + C''_5 x^4 + C''_6 x^5 \tag{3.70β}$$

Έχοντας καθορίσει τη μορφή των δυο από τις τρεις συναρτήσεις που καθορίζουν τους δυο από τους τρεις αγνώστους του προβλήματος, ορίζεται και η τρίτη (η συνάρτηση w της συνολικής κατακόρυφης μετακίνησης) με τη βοήθεια της σχέσης (3.10):

$$\begin{aligned} w(x) = {} & \left(1+\frac{k}{c}\right)C'_1 + \left[\left(1+\frac{k}{c}\right)x\right]C'_2 + \left[\left(1+\frac{k}{c}\right)x^2 - 2\frac{G}{c}\right]C'_3 + \left[\left(1+\frac{k}{c}\right)x^3 - 6\left(\frac{G}{c}\right)x\right]C'_4 + \\ & + \left[\left(1+\frac{k}{c}\right)x^4 - 12\left(\frac{G}{c}\right)x^2\right]C'_5 + \left[\left(1+\frac{k}{c}\right)x^5 - 20\left(\frac{G}{c}\right)x^3\right]C'_6 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Παράλληλα, μέσω της σχέσης (3.6γ) επιτυγχάνεται ο συσχετισμός των σταθερών $C_1' - C_6'$ με τις σταθερές $C_1'' - C_6''$, οπότε η σχέση (3.70β) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \psi(x) = {} & \left(1+\frac{k}{c}\right)C'_2 + \left[2\left(1+\frac{k}{c}\right)x\right]C'_3 + 3\left[2r + \left(1+\frac{k}{c}\right)x^2\right]C'_4 + 4x\left[6r + \left(1+\frac{k}{c}\right)x^2\right]C'_5 + \\ & + 5\left[\left(1+\frac{k}{c}\right)x^4 + 12rx^2 + 24\frac{EI}{\Phi}r\right]C'_6 \end{aligned} \tag{3.72α}$$

Όπου:

$$r = \frac{EI}{\Phi}\left(1+\frac{k}{c}\right) - \frac{G}{c} \tag{3.72β}$$

Επόμενο βήμα είναι η έκφραση των βασικών παραμέτρων (γενικευμένες μετακινήσεις) συναρτήσει των σταθερών ολοκλήρωσης $C_1' - C_6'$, δηλαδή ο σχηματισμός του μητρώου [R]. Η κατάστρωση των σχέσεων (3.64α) με εφαρμογή των (3.70α), (3.71) και (3.72α) δίνει:

$$[R] = \begin{bmatrix} \left(1+\frac{k}{c}\right) & 0 & -2\frac{G}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1+\frac{k}{c}\right) & 0 & 6r & 0 & 120\frac{EI}{\Phi}r \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(1+\frac{k}{c}\right) & \left(1+\frac{k}{c}\right)L & \left(1+\frac{k}{c}\right)L^2 - 2\frac{G}{c} & \left(1+\frac{k}{c}\right)L^3 - 6\frac{G}{c}L & \left(1+\frac{k}{c}\right)L^4 - 12\frac{G}{c}L^2 & \left(1+\frac{k}{c}\right)L^5 - 20\frac{G}{c}L^3 \\ 0 & \left(1+\frac{k}{c}\right) & 2\left(1+\frac{k}{c}\right)L & 3\left[2r + \left(1+\frac{k}{c}\right)L^2\right] & 4L\left[6r + \left(1+\frac{k}{c}\right)L^2\right] & 5\left[\left(1+\frac{k}{c}\right)L^4 + 12rL^2 + 24\frac{EI}{\Phi}r\right] \\ 1 & L & L^2 & L^3 & L^4 & L^5 \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

Οι σχέσεις (3.70α), (3.71) και (3.72α) μπορούν να γραφούν σε μητρωϊκή μορφή ως εξής:

$$w_k = [f][C'] \tag{3.74α}$$

$$w = [f_w][C'] \tag{3.74β}$$

$$\psi = [f_\psi][C'] \tag{3.74γ}$$

Όπου το ανάστροφο του μητρώου στήλη $[C']^T$ δίνεται από τη σχέση (3.66γ), ενώ:

$$[f] = \left[1 \;\vdots\; x \;\vdots\; x^2 \;\vdots\; x^3 \;\vdots\; x^4 \;\vdots\; x^5\right] \tag{3.75α}$$

$$[f_w] = \left[\left(1+\frac{k}{c}\right) \;\vdots\; \left(1+\frac{k}{c}\right)x \;\vdots\; \left(1+\frac{k}{c}\right)x^2 - 2\frac{G}{c} \;\vdots\; \left(1+\frac{k}{c}\right)x^3 - 6\left(\frac{G}{c}\right)x \;\vdots\; \left(1+\frac{k}{c}\right)x^4 - 12\left(\frac{G}{c}\right)x^2 \;\vdots\; \left(1+\frac{k}{c}\right)x^5 - 20\left(\frac{G}{c}\right)x^3\right] \tag{3.75β}$$

$$[f_\psi] = \left[0 \;\vdots\; \left(1+\frac{k}{c}\right) \;\vdots\; 2\left(1+\frac{k}{c}\right)x \;\vdots\; 3\left[2r + \left(1+\frac{k}{c}\right)x^2\right] \;\vdots\; 4x\left[6r + \left(1+\frac{k}{c}\right)x^2\right] \;\vdots\; 5\left[\left(1+\frac{k}{c}\right)x^4 + 12rx^2 + 24\frac{EI}{\Phi}r\right]\right] \tag{3.75γ}$$

Τα μητρώα $[f_W]$ και $[f_\psi]$ συνδέονται με το μητρώο [f] με τις παρακάτω μητρωικές σχέσεις:

$$[f_w]^T = [J_w][f]^T \tag{3.76α}$$

$$[f_\psi]^T = [J_\psi][f]^T \tag{3.76β}$$

Τα μητρώα $[J_w]$, $[J_\psi]$ είναι:

$$[J_w] = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} k+c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k+c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2G & 0 & k+c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6G & 0 & k+c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12G & 0 & k+c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20G & 0 & k+c \end{bmatrix} \tag{3.77α}$$

$$[J_\psi] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+\frac{k}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\left(1+\frac{k}{c}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6r & 0 & 3\left(1+\frac{k}{c}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24r & 0 & 4\left(1+\frac{k}{c}\right) & 0 & 0 \\ 120\frac{EI}{\Phi}r & 0 & 60r & 0 & 5\left(1+\frac{k}{c}\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{3.77β}$$

Αν εισαχθεί η (3.68) στις (3.74β) και (3.74γ), και αν ληφθούν υπόψη οι (3.76α) και (3.76β), προκύπτει:

$$w = [f][J_w]^T[R]^{-1}[u] \tag{3.78α}$$

$$\psi = [f][J_\psi]^T[R]^{-1}[u] \tag{3.78β}$$

Τέλος αν τεθούν:

$$[N_{wk}] = [f][R]^{-1} \tag{3.79α}$$

$$[N_w] = [f][J_w]^T[R]^{-1} \tag{3.79β}$$

$$[N_\psi] = [f][J_\psi]^T[R]^{-1} \tag{3.79γ}$$

οι σχέσεις (3.74α), (3.78α) και (3.78β) γράφονται:

$$w_k = [N_{wk}][u] \tag{3.80α}$$

$$w = [N_w][u] \tag{3.80β}$$

$$\psi = [N_\psi][u] \tag{3.80γ}$$

Επειδή ως γνωστό ισχύει w_c=w-w_k προκύπτει ότι:

$$w_c = w - w_k = \{[N_w] - [N_{wk}]\}[u] = [N_{wc}][u] \tag{3.81}$$

Τα μητρώα $[N_w]$, $[N_{wk}]$, $[N_\psi]$ και $[N_{wc}]$ είναι τα μητρώα των συναρτήσεων μορφής.

Στο σημείο αυτό υπενθυμίζεται ότι η παραπάνω διαδικασία μπορεί να γίνει και για τις συναρτήσεις που αποτελούν την ακριβή λύση των εξισώσεων του προβλήματος (Πίνακες 3.2α και 3.2β).

Είναι γνωστό ότι ισχύουν:

$$\frac{d\psi}{dx} = \left(\frac{d}{dx}[N_\psi]\right)[u] = [B_b][u] \tag{3.82α}$$

$$\frac{dw}{dx} = \left(\frac{d}{dx}[N_w]\right)[u] = [B_w][u] \tag{3.82β}$$

$$\frac{dw_k}{dx} = \left(\frac{d}{dx}[N_{wk}]\right)[u] = [B_{wk}][u] \tag{3.82γ}$$

$$\frac{dw}{dx} - \psi = \left(\frac{d}{dx}[N_w]\right)[u] - [N_\psi][u] = \left[\frac{d}{dx}[N_w] - [N_\psi]\right][u] = [B_S][u] \tag{3.82δ}$$

και επιπλεόν:

$$w_k^2 = w_k w_k = ([N_{wk}][u])^T([N_{wk}][u]) = [u]^T[N_{wk}]^T[N_{wk}][u] \tag{3.83α}$$

$$w_c^2 = w_c w_c = ([N_{wc}][u])^T([N_{wc}][u]) = [u]^T[N_{wc}]^T[N_{wc}][u] \tag{3.83β}$$

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 = [u]^T[B_b]^T[B_b][u] \tag{3.83γ}$$

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = [u]^T[B_w]^T[B_w][u] \tag{3.83δ}$$

$$\left(\frac{dw_k}{dx}\right)^2 = [u]^T[B_{wk}]^T[B_{wk}][u] \tag{3.83ε}$$

$$\left(\frac{dw}{dx} - \psi\right)^2 = [u]^T[B_S]^T[B_S][u] \tag{3.83στ}$$

Αντικαθιστώντας τις (3.83α) – (3.83στ) στην (3.1) – και θέτοντας q=0 – προκύπτει:

$$\pi_T = \frac{1}{2}[u]^T\left(\int_0^L EI[B_b]^T[B_b]dx\right)[u] + \frac{1}{2}[u]^T\left(\int_0^L c[N_{wc}]^T[N_{wc}]dx\right)[u] + \frac{1}{2}[u]^T\left(\int_0^L k[N_{wk}]^T[N_{wk}]dx\right)[u] +$$
$$+\frac{1}{2}[u]^T\left(\int_0^L G[B_{wk}]^T[B_{wk}]dx\right)[u] + \frac{1}{2}[u]^T\left(\int_0^L \Phi[B_S]^T[B_S]dx\right)[u] - \frac{1}{2}[u]^T\left(\int_0^L P[B_w]^T[B_w]dx\right)[u] \quad (3.84)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\pi_T = \frac{1}{2}[u]^T([K_b]+[K_s]+[K_c]+[K_k]+[K_G]-[K_g])[u] = \frac{1}{2}[u]^T[K][u] \quad (3.85)$$

Το μητρώο [K] είναι το ζητούμενο μητρώο δυσκαμψίας. Το μητρώο αυτό συντίθεται από τα παρακάτω μητρώα:

$[K_b]=\int_0^L EI[B_b]^T[B_b]dx$	είναι το τμήμα του μητρώου δυσκαμψίας που αντιστοιχεί στην καμπτική παραμόρφωση της δοκού
$[K_s]=\int_0^L \Phi[B_S]^T[B_S]dx$	είναι το τμήμα του μητρώου δυσκαμψίας που αντιστοιχεί στην διατμητική παραμόρφωση της δοκού
$[K_c]=\int_0^L c[N_{wc}]^T[N_{wc}]dx$	είναι το τμήμα του μητρώου δυσκαμψίας που αντιστοιχεί στην παραμόρφωση της άνω στρώσης των ελατηρίων
$[K_k]=\int_0^L k[N_{wk}]^T[N_{wk}]dx$	είναι το τμήμα του μητρώου δυσκαμψίας που αντιστοιχεί στην παραμόρφωση της άνω στρώσης των ελατηρίων
$[K_G]=\int_0^L G[B_{wk}]^T[B_{wk}]dx$	είναι το τμήμα του μητρώου δυσκαμψίας που αντιστοιχεί στην παραμόρφωση της διατμητικής στρώσης
$[K_g]=\int_0^L P[B_w]^T[B_w]dx$	είναι το γεωμετρικό μητρώο δυσκαμψίας της δοκού

3.4.1.2. Θεωρία α' τάξης

Οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα είναι οι (3.11α), (3.11β) και (3.10). Όπως τονίστηκε στην Παράγραφο 3.2.1.2 οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από τις αντίστοιχες εξισώσεις της θεωρίας β' τάξης, θέτοντας για το αξονικό φορτίο την τιμή μηδέν. Σύμφωνα με τον Πίνακα 3.6 για την συγκεκριμένη περίπτωση οι διαφορετικές μορφές της αναλυτικής λύσης είναι δυο: οι A_1 και B_1.

3.4.1.2α. Μέθοδος Α'

Τα μητρώα [R], [Q] που είναι απαραίτητα για τον σχηματισμό του μητρώου δυσκαμψίας δίνονται από τις σχέσεις (3.67α) και (3.67β) για την περίπτωση λύσης A_1. Στα μητρώα αυτά – όπως και σε όλες τις εκφράσεις που χρησιμοποιούνται για το σχηματισμό τους και παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 4.1.1α. – πρέπει να τεθεί P=0. Αντίστοιχα για την περίπτωση λύσης B_1 ισχύουν οι αντίστοιχες εκφράσεις της θεωρίας β' τάξης για μηδενική τιμή του αξονικού φορτίου (βλέπε Παράρτημα Α).

3.4.1.2β. Μέθοδος Β'

Οι αλγεβρικές συναρτήσεις παρεμβολής που χρησιμοποιούνται και στην περίπτωση αυτή δίνονται από τις σχέσεις (3.70α), (3.71) και (3.72α). Επομένως ισχύουν όλες οι σχέσεις που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 3.4.1.1β. με τη διαφορά ότι το μητρώο δυσκαμψίας δίνεται από τη σχέση:

$$[K]=[K_b]+[K_s]+[K_c]+[K_k]+[K_G]$$

καθώς στη θεωρία πρώτης τάξης, δεν ορίζεται το γεωμετρικό μητρώο δυσκαμψίας.

3.4.2. Δοκός Euler – Bernoulli

3.4.2.1. Θεωρία β' τάξης

Οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα είναι οι (3.16α) και (3.16β). Σύμφωνα με τον Πίνακα 3.6 οι πιθανές μορφές λύσης των εξισώσεων αυτών είναι τρεις στην περίπτωση θλιπτικού φορτίου (A_1, B_1, B_2), και δυο στην περίπτωση εφελκυστικού φορτίου (A_1, B_1).

3.4.2.1α. Μέθοδος Α'

Τα εντατικά μεγέθη του προβλήματος M, V, V_G δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$M(x)=EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) \tag{3.86α}$$

$$V(x)=EI\left(\frac{d^3w}{dx^3}\right)+P\left(\frac{dw}{dx}\right) \tag{3.86β}$$

$$V_G(x)=G\left(\frac{dw_k}{dx}\right) \tag{3.86γ}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω σχέσεις η (3.14) παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$0=\left[M(x)\delta\left(\frac{dw}{dx}\right)-V(x)\delta w\right]_0^L+\left[V_G(x)\delta w_k\right]_0^L+\int_0^L\left[EI\frac{d^4w}{dx^4}+c(w-w_k)+P\frac{d^2w}{dx^2}-q(x)\right]\delta w dx+$$
$$+\int_0^L\left[kw_k+c(w_k-w)-G\frac{d^2w_k}{dx^2}\right]\delta w_k dx \tag{3.87}$$

Από τη (3.87) προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι βασικές παράμετροι του προβλήματος είναι τα μεγέθη μετακίνησης (γενικευμένες μετακινήσεις): w (συνολική κατακόρυφη μετακίνηση), w_k (κατακόρυφη μετακίνηση της διατμητικής στρώσης), και dw/dx (η γωνία στροφής των διατομών της δοκού η οποία ως γνωστό ταυτίζεται με την ελαστική της γραμμή, σύμφωνα με τις παραδοχές της θεωρίας Euler). Οι βασικές αυτές παράμετροι συνδέονται με τις γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Αντιστοίχως οι δευτερεύουσες παράμετροι είναι τα εντατικά μεγέθη του προβλήματος, δηλαδή η ροπή κάμψης της δοκού M, η τέμνουσα δύναμη της δοκού V, και η τέμνουσα δύναμη που καταπονεί τη διατμητική στρώση V_G. Οι δευτερεύουσες παράμετροι συνδέονται με τις φυσικές συνοριακές συνθήκες.

Επόμενο στάδιο της διαδικασίας αποτελεί ο καθορισμός των συναρτήσεων που περιγράφουν τις βασικές παραμέτρους του προβλήματος. Δεδομένου του γεγονότος ότι η μία εκ των τριών βασικών παραμέτρων (η dw/dx) συνδέεται με μία εκ των άλλων δυο – και πιο συγκεκριμένα με την w της οποίας και αποτελεί πρώτη

παράγωγο – είναι προφανές ότι αρκεί ο καθορισμός των συναρτήσεων που περιγράφουν τις w, w_k. Οι συναρτήσεις αυτές στα πλαίσια της μεθόδου Α' θα πρέπει να αποτελούν την ακριβή λύση του προβλήματος και έχουν την μορφή των εξισώσεων (3.61α) και (3.61β). Επομένως οι συναρτήσεις f_1 – f_6 που υπεισέρχονται στις εξισώσεις αυτές θα έχουν τη μορφή που δίνεται στους Πίνακες 3.2α και 3.2β για τις περιπτώσεις A_1, B_1, B_2. Παρακάτω θα παρουσιαστεί συνοπτικά η διαδικασία σχηματισμού του μητρώου δυσκαμψίας για την περίπτωση λύσης B_1. Τα μητρώα που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις A_1, B_2 θα δοθούν στο Παράρτημα Α.

Στην περίπτωση κατά την οποία οι τιμές των τριών εδαφικών παραμέτρων k, c, G και του αξονικού φορτίου οδηγούν στην περίπτωση λύσης B_1, τότε σύμφωνα με τον Πίνακα 3.2α οι συναρτήσεις που περιγράφουν τις μετακινήσεις w, w_k είναι:

$$w(x) = C_1 e^{Rx} + C_2 e^{-Rx} + C_3 e^{R_1 x} + C_4 e^{-R_1 x} + C_5 e^{R_2 x} + C_6 e^{-R_2 x} \tag{3.88α}$$

$$w_k(x) = C_1' e^{Rx} + C_2' e^{-Rx} + C_3' e^{R_1 x} + C_4' e^{-R_1 x} + C_5' e^{R_2 x} + C_6' e^{-R_2 x} \tag{3.88β}$$

Οι σταθερές ολοκλήρωσης C_1 – C_6 και C_1' - C_6' δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, καθώς συσχετίζονται με τη σχέση (3.10). Έτσι οι σχέσεις (3.88α, β) μπορούν να γραφούν:

$$w(x) = C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + C_4 f_4 + C_5 f_5 + C_6 f_6 \tag{3.88γ}$$

$$w_k(x) = C_1 f_{1k} + C_2 f_{2k} + C_3 f_{3k} + C_4 f_{4k} + C_5 f_{5k} + C_6 f_{6k} \tag{3.88δ}$$

Όπου:

$$\begin{aligned} f_{1k} &= A_1 f_1 & f_{4k} &= A_2 f_4 \\ f_{2k} &= A_1 f_2 & f_{5k} &= A_3 f_5 \\ f_{3k} &= A_2 f_3 & f_{6k} &= A_3 f_6 \end{aligned} \tag{3.89α}$$

$$A_1 = \left[\frac{c}{(k+c) - GR^2}\right] \qquad A_2 = \left[\frac{c}{(k+c) - GR_1^2}\right] \qquad A_3 = \left[\frac{c}{(k+c) - GR_2^2}\right] \tag{3.89β}$$

Τα R, R_1, R_2 δίνονται στον Πίνακα 3.2β (περίπτωση B_1).

Ακολουθεί η έκφραση των βασικών και των δευτερευόντων παραμέτρων συναρτήσει των σταθερών ολοκλήρωσης C_1 - C_6.

$$\begin{aligned} u_1 &= w(0) & u_2 &= \left.\frac{dw}{dx}\right|_0 & u_3 &= w_k(0) \\ u_4 &= w(L) & u_5 &= \left.\frac{dw}{dx}\right|_L & u_6 &= w_k(L) \end{aligned} \tag{3.90α}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= EI\left(\frac{d^3 w}{dx^3}\right)_{x=0} + P\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = V(0) & s_2 &= -EI\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)_{x=0} = M(0) & s_3 &= -G\left(\frac{dw_k}{dx}\right)_{x=0} = V_G(0) \\ s_4 &= -EI\left(\frac{d^3 w}{dx^3}\right)_{x=L} - P\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=L} = V(L) & s_5 &= EI\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)_{x=L} = M(L) & s_6 &= G\left(\frac{dw_k}{dx}\right)_{x=L} = V_G(L) \end{aligned} \tag{3.90β}$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν σε μητρωϊκή μορφή ανάλογη των σχέσεων (3.65α) και (3.65β).

Τα μητρώα [R], [Q] για την περίπτωση λύσης B_1 είναι:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ R & -R & R_1 & -R_1 & R_2 & -R_2 \\ A_1 & A_1 & A_2 & A_2 & A_3 & A_3 \\ e^{RL} & e^{-RL} & e^{R_1L} & e^{-R_1L} & e^{R_2L} & e^{-R_2L} \\ Re^{RL} & -Re^{-RL} & R_1e^{R_1L} & -R_1e^{-R_1L} & R_2e^{R_2L} & -R_2e^{-R_2L} \\ A_1e^{RL} & A_1e^{-RL} & A_2e^{R_1L} & A_2e^{-R_1L} & A_3e^{R_2L} & A_3e^{-R_2L} \end{bmatrix} \tag{3.91α}$$

$$Q = \begin{bmatrix} (EIR^2+P)R & -(EIR^2+P)R & (EIR_1^2+P)R_1 & -(EIR_1^2+P)R_1 & (EIR_2^2+P)R_2 & -(EIR_2^2+P)R_2 \\ -EIR^2 & -EIR^2 & -EIR_1^2 & -EIR_1^2 & -EIR_2^2 & -EIR_2^2 \\ -GA_1R & GA_1R & -GA_2R_1 & GA_2R_1 & -GA_3R_2 & GA_3R_2 \\ -(EIR^2+P)Re^{RL} & (EIR^2+P)Re^{-RL} & -(EIR_1^2+P)R_1e^{R_1L} & (EIR_1^2+P)R_1e^{-R_1L} & -(EIR_2^2+P)R_2e^{R_2L} & (EIR_2^2+P)R_2e^{-R_2L} \\ EIR^2e^{RL} & EIR^2e^{-RL} & EIR_1^2e^{R_1L} & EIR_1^2e^{-R_1L} & EIR_2^2e^{R_2L} & EIR_2^2e^{-R_2L} \\ GA_1Re^{RL} & -GA_1Re^{-RL} & GA_2R_1e^{R_1L} & -GA_2R_1e^{-R_1L} & GA_3R_2e^{R_2L} & -GA_3R_2e^{-R_2L} \end{bmatrix} \tag{3.91β}$$

Το μητρώο $[K] = [Q][R]^{-1}$ είναι το ζητούμενο μητρώο δυσκαμψίας.

3.4.2.1β. Μέθοδος Β'

Η διαδικασία της μεθόδου ξεκινά ως γνωστόν από την επιλογή των αλγεβρικών συναρτήσεων παρεμβολής:

$$w(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5x^4 + C_6x^5 \tag{3.92α}$$

$$w_k(x) = C_1' + C_2'x + C_3'x^2 + C_4'x^3 + C_5'x^4 + C_6'x^5 \tag{3.92β}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (3.10) επιτυγχάνεται ο συσχετισμός των σταθερών $C_1 - C_6$ με τις σταθερές $C_1' - C_6'$, οπότε η σχέση (3.92β) παίρνει τη εξής μορφή:

$$w_k(x) = \frac{c}{k+c}C_1 + \left(\frac{c}{k+c}x\right)C_2 + \frac{c}{k+c}\left(\frac{2G}{k+c} + x^2\right)C_3 + \frac{c}{k+c}\left(\frac{6G}{k+c} + x^2\right)xC_4 +$$
$$+ \frac{c}{k+c}\left[\frac{24G^2}{(k+c)^2} + \frac{12G}{k+c}x^2 + x^4\right]C_5 + \frac{c}{k+c}\left[\frac{120G^2}{(k+c)^2} + \frac{20G}{k+c}x^2 + x^4\right]xC_6 \tag{3.93}$$

Επόμενο βήμα είναι ο σχηματισμός του μητρώου [R] μέσω του οποίου εκφράζονται οι βασικές παράμετροι του προβλήματος (3.90α) συναρτήσει των σταθερών ολοκλήρωσης $C_1 - C_6$.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c}{k+c} & 0 & \frac{2Gc}{(k+c)^2} & 0 & \frac{24G^2c}{(k+c)^3} & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 & L^4 & L^5 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 & 4L^3 & 5L^4 \\ \frac{c}{k+c} & \frac{cL}{k+c} & \frac{c}{k+c}\left(\frac{2G}{k+c}+L^2\right) & \frac{cL}{k+c}\left(\frac{6G}{k+c}+L^2\right) & \frac{c}{k+c}\left[\frac{24G^2}{(k+c)^2}+\frac{12GL^2}{(k+c)}+L^4\right] & \frac{cL}{k+c}\left[\frac{120G^2}{(k+c)^2}+\frac{20GL^2}{(k+c)}+L^4\right] \end{bmatrix} \tag{3.94}$$

Οι σχέσεις (3.92α) και (3.93) μπορούν να γραφούν σε μητρωϊκή μορφή ως εξής:

$$w = [f][C] \tag{3.95α}$$

$$w_k = [f_k][C] \tag{3.95β}$$

Όπου το ανάστροφο του μητρώου στήλη $[C]^T$ δίνεται από τη σχέση (3.66γ) ενώ:

$$[f] = [1 \;\vdots\; x \;\vdots\; x^2 \;\vdots\; x^3 \;\vdots\; x^4 \;\vdots\; x^5] \tag{3.96α}$$

$$[f_k] = \left[\frac{c}{k+c} \;\vdots\; \frac{cx}{k+c} \;\vdots\; \frac{c}{k+c}\left(\frac{2G}{k+c}+x^2\right) \;\vdots\; \frac{cx}{k+c}\left(\frac{6G}{k+c}+x^2\right) \;\vdots\; \frac{c}{k+c}\left[\frac{24G^2}{(k+c)^2}+\frac{12Gx^2}{(k+c)}+x^4\right] \;\vdots\; \frac{cx}{k+c}\left[\frac{120G^2}{(k+c)^2}+\frac{20Gx^2}{(k+c)}+x^4\right]\right] \tag{3.96β}$$

Τα μητρώα [f] και $[f_k]$ συνδέονται με την παρακάτω μητρωϊκή σχέση:

$$[f_k]^T = [J][f]^T \tag{3.97}$$

όπου το μητρώο J είναι το εξής:

$$J = \frac{c}{k+c}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2G}{k+c} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6G}{k+c} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{24G^2}{(k+c)^2} & 0 & \frac{12G}{k+c} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{120G^2}{(k+c)^2} & 0 & \frac{20G}{k+c} & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.98}$$

Με τρόπο παρόμοιο με τον οποίο εκτέθηκε στην Παράγραφο 3.4.1.1β μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύουν:

$$w = [N_w][u] \tag{3.99α}$$

$$w_k = [N_{wk}][u] \tag{3.99β}$$

$$w_c = w - w_k = \{[N_w]-[N_{wk}]\}[u] = [N_{wc}][u] \tag{3.99γ}$$

όπου $[N_w]$, $[N_{wk}]$ είναι τα μητρώα των συναρτήσεων μορφής:

$$[N_w] = [f][R]^{-1} \tag{3.100α}$$

$$[N_{Wk}] = [f][J]^T[R]^{-1} \tag{3.100β}$$

Επειδή μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύουν:

$$\frac{dw}{dx} = \left(\frac{d}{dx}[N_w]\right)[u] = [B_w][u] \rightarrow \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = [u]^T[B_w]^T[B_w][u] \tag{3.101α}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \left(\frac{d^2}{dx^2}[N_w]\right)[u] = [B_b][u] \rightarrow \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 = [u]^T[B_b]^T[B_b][u] \tag{3.101β}$$

$$\frac{dw_k}{dx} = \left(\frac{d}{dx}[N_{wk}]\right)[u] = [B_{wk}][u] \rightarrow \left(\frac{dw_k}{dx}\right)^2 = [u]^T[B_{wk}]^T[B_{wk}][u] \tag{3.101γ}$$

$$w_k^2 = w_k w_k = ([N_{wk}][u])^T([N_{wk}][u]) = [u]^T[N_{wk}]^T[N_{wk}][u] \tag{3.101δ}$$

$$w_c^2 = w_c w_c = ([N_{wc}][u])^T([N_{wc}][u]) = [u]^T[N_{wc}]^T[N_{wc}][u] \tag{3.101ε}$$

η σχέση (3.13) – και αφού τεθεί q=0 – παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\pi_E = \frac{1}{2}[u]^T\left(\int_0^L EI[B_b]^T[B_b]dx\right)[u] + \frac{1}{2}[u]^T\left(\int_0^L c[N_{wc}]^T[N_{wc}]dx\right)[u] +$$
$$+\frac{1}{2}[u]^T\left(\int_0^L k[N_{wk}]^T[N_{wk}]dx\right)[u] + \frac{1}{2}[u]^T\left(\int_0^L G[B_{wk}]^T[B_{wk}]dx\right)[u] - \frac{1}{2}[u]^T\left(\int_0^L P[B_w]^T[B_w]dx\right)[u] \tag{3.102}$$

ή

$$\pi_E = \frac{1}{2}[u]^T([K_b] + [K_c] + [K_k] + [K_G] - [K_g])[u] = \frac{1}{2}[u]^T[K][u] \tag{3.103}$$

Το μητρώο [K] είναι το ζητούμενο μητρώο δυσκαμψίας.

3.4.2.2. Θεωρία α' τάξης

Οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα είναι οι (3.19α), (3.19β) και προκύπτουν από τις αντίστοιχες εξισώσεις της θεωρίας β' τάξης, θέτοντας για το αξονικό φορτίο την τιμή μηδέν. Σύμφωνα με τον Πίνακα 3.6 για την συγκεκριμένη περίπτωση οι διαφορετικές μορφές της αναλυτικής λύσης είναι δυο: οι A_1 και B_1.

3.4.2.2α. Μέθοδος Α'

Τα μητρώα δυσκαμψίας για την παρούσα περίπτωση, προκύπτουν – τόσο για την μορφή λύσης A_1, όσο και για τη μορφή λύσης B_1 – από τα αντίστοιχα μητρώα της θεωρίας β' τάξης, εάν στις σχετικές εκφράσεις των πινάκων [R], [Q] τεθεί P=0 (βλέπε Παράρτημα Α).

3.4.2.2β. Μέθοδος Β'

Οι κατάλληλες για την παρούσα περίπτωση αλγεβρικές συναρτήσεις παρεμβολής δίνονται από τις σχέσεις (3.92α) και (3.93). Επομένως ισχύουν όλες οι σχέσεις που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 3.4.2.1β, με τη διαφορά ότι το μητρώο δυσκαμψίας δίνεται τώρα από τη σχέση:

$$[K] = [K_b] + [K_c] + [K_k] + [K_G] \tag{3.104}$$

καθώς στη θεωρία α' τάξης, δεν ορίζεται το γεωμετρικό μητρώο δυσκαμψίας.

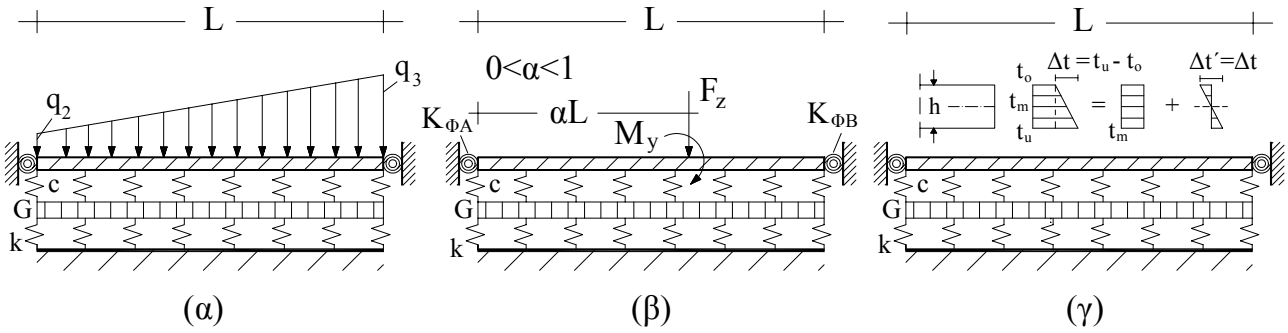
3.5. Σχηματισμός των μητρώων φόρτισης

Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιαστεί η διαδικασία σχηματισμού των μητρώων φόρτισης για τις παρακάτω φορτιστικές καταστάσεις:

- καθολική τραπεζοειδή φόρτιση,
- φόρτιση από μοναχικό φορτίο ή ροπή σε τυχούσα θέση, και
- φόρτιση λόγω ανομοιόρφης θερμοκρασιακής μεταβολής Δt της άνω και κάτω ίνας της διατομής.

Ο σχηματισμός των μητρώων αυτών θα γίνει για όλες τις περιπτώσεις του Πίνακα 3.1 καθώς και για κάθε μια από τις αναλυτικές μορφές λύσης που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις αυτές (Πίνακας 3.6). Όπως και στην περίπτωση των μητρώων δυσκαμψίας, θα σχηματιστούν τα μητρώα φόρτισης τόσο με τις ακριβείς λύσεις των διαφορικών εξισώσεων κάθε περίπτωσης (Μέθοδος Α'), όσο και με τις αλγεβρικές συναρτήσεις παρεμβολής (Μέθοδος Β').

Πρέπει να τονιστεί επίσης ότι τα μητρώα φόρτισης θα σχηματιστούν όχι για την περίπτωση της αμφίπακτης δοκού, αλλά για την περίπτωση δοκού με στροφικά ελατήρια στα άκρα (Σχήμα 3.10).



Σχήμα 3.10. Οι τρεις περιπτώσεις φόρτισης για τις οποίες σχηματίστηκαν τα μητρώα φόρτισης: καθολική τραπεζοειδής φόρτιση (α), μοναχικό φορτίο ή ροπή σε τυχούσα θέση (β), ανομοιόμορφη θερμοκρασιακή μεταβολή (γ)

Ο λόγος για τον οποίο θα γίνει θεώρηση στροφικών ελατηρίων οφείλεται στο ότι τελικός στόχος είναι ο σχηματισμός των μητρώων φόρτισης για το γενικευμένο στοιχείο δοκού το οποίο εμπεριέχει τόσο ακάμπτους βραχίονες στα άκρα του όσο και στροφικά ελατήρια στα σημεία σύνδεσης των βραχιόνων με το εσωτερικό – εύκαμπτο τμήμα του στοιχείου αυτού.

Όπως είναι γνωστό τα μητρώα φόρτισης δεν προκύπτουν από τη λύση των ομογενών διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος, αλλά από την αντίστοιχη μη ομογενή. Η λύση των μη ομογενών αυτών εξισώσεων προκύπτει ως άθροισμα των συναρτήσεων που αποτελούν τη γενική λύση των αντιστοίχων ομογενών, και των ειδικών λύσεων που εξαρτώνται από τον τύπο της εξωτερικής φόρτισης.

Ειδικά για το μητρώο φόρτισης που αντιστοιχεί στην περίπτωση μοναχικού φορτίου δεν υφίσταται ειδική λύση για τις διαφορικές εξισώσεις του προβλήματος, καθώς στην περίπτωση αυτή το μοναχικό φορτίο αποτελεί ένα σημείο ασυνέχειας στο πεδίο ορισμού των εξισώσεων. Επομένως στην περίπτωση αυτή δεν μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος που εφαρμόζεται για τις περιπτώσεις «συνεχών» φορτίσεων, αλλά η μέθοδος των αρχικών παραμέτρων.

3.5.1. Καθολική τραπεζοειδής φόρτιση

3.5.1.1. Δοκός Timoshenko

Η διαδικασία σχηματισμού του μητρώου φόρτισης με βάση τις αναλυτικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων (Μέθοδος Α'), θα παρουσιαστεί γενικά για την περίπτωση της δοκού Timoshenko ανεξαρτήτως τόσο της τάξης ανάλυσης (θεωρία α' ή β' τάξης) όσο και των πιθανών μορφών λύσης των εξισώσεων αυτών (Πίνακας 3.6). Η γενική μορφή των σχέσεων οι οποίες θα προκύψουν από την διαδικασία αυτή θα είναι δυνατό να ειδικευτεί για κάθε περίπτωση. Η ίδια λογική – όσον αφορά την τάξη ανάλυσης – θα ακολουθηθεί και για την περίπτωση σχηματισμού του μητρώου φόρτισης με βάση τις αλγεβρικές συναρτήσεις παρεμβολής (Μέθοδος Β').

3.5.1.1α. Μέθοδος Α'

Στην περίπτωση καθολικής φόρτισης από τραπεζοειδές φορτίο, η σχέση που δίνει την ανά μονάδα μήκους τιμή του φορτίου είναι (Σχήμα 3.10):

$$q(x) = q_2 + \left(\frac{q_3 - q_2}{L}\right)x \tag{3.105}$$

Επομένως οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων (3.7α) και (3.7β) είναι οι εξής:

$$w_k(x) = C_1'f_1 + C_2'f_2 + C_3'f_3 + C_4'f_4 + C_5'f_5 + C_6'f_6 + \left(\frac{q_3 - q_2}{kL}x + \frac{q_2}{k}\right) \tag{3.106α}$$

$$\psi(x) = C_1'f_{1\psi} + C_2'f_{2\psi} + C_3'f_{3\psi} + C_4'f_{4\psi} + C_5'f_{5\psi} + C_6'f_{6\psi} + \left(\frac{k+c}{kc}\right)\frac{q_3 - q_2}{L} \tag{3.106β}$$

ενώ από τις σχέσεις (3.10), (3.62α) και (3.105) προκύπτει:

$$w(x) = C_1'f_{1w} + C_2'f_{2w} + C_3'f_{3w} + C_4'f_{4w} + C_5'f_{5w} + C_6'f_{6w} + \frac{k+c}{kc}\left(\frac{q_3 - q_2}{L}x + q_2\right) \tag{3.106γ}$$

(Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημανθεί ότι εάν τεθεί $q_2=q_3=q$ προκύπτουν οι αντίστοιχες λύσεις για την περίπτωση ομοιόμορφου φορτίου. Η ίδια επισήμανση όπως είναι φυσικό ισχύει και για το μητρώο φόρτισης που θα προκύψει από την παρακάτω διαδικασία).

Προκειμένου να σχηματιστεί το μητρώο φόρτισης θα πρέπει να προσδιοριστούν τα εντατικά μεγέθη M, V, και V_G στα άκρα της δοκού. Επομένως θα πρέπει να σχηματιστεί το μητρώο:

$$\left[P^{(Tr)}\right]^T = \left[V^{(Tr)}(0) \vdots M^{(Tr)}(0) \vdots V_G^{(Tr)}(0) \vdots V^{(Tr)}(L) \vdots M^{(Tr)}(L) \vdots V_G^{(Tr)}(L)\right] \tag{3.107}$$

Τα εντατικά μεγέθη M, V, και V_G υπολογίζονται από τις κλασικές σχέσεις (3.59α, β, γ). Για τον υπολογισμό αυτό θα πρέπει να προσδιοριστούν οι σταθερές ολοκλήρωσης C_1' - C_6', μέσω των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος. Ο αριθμός των συνοριακών συνθηκών που απαιτούνται είναι τρεις για κάθε άκρο. Δυο από τις συνθήκες αυτές προκύπτουν από τις δεδομένες συνθήκες στήριξης της δοκού (Σχήμα 3.10), ενώ η τρίτη προκύπτει από την σχέση (3.5). Πιο συγκεκριμένα, ο όρος $\left[G\left(\frac{dw_k}{dx}\right)\delta w_k\right]_0^L$ της σχέσης (3.5), δηλώνει ότι στα άκρα του στοιχείου x=0 και x=L, θα πρέπει να είναι μηδενική είτε η κατακόρυφη μετακίνηση του διατμητικού επιπέδου w_k, είτε η τέμνουσα δύναμη $V_G=G(dw_k/dx)$ που το καταπονεί έτσι

ώστε μαζί με την ταυτόχρονη ικανοποίηση των εξισώσεων (3.6α) – (3.6γ) και των υπολοίπων τεσσάρων συνοριακών συνθηκών (δυο ανά άκρο) να εκπληρώνεται η ισότητα $\delta\pi_T=0$. Προκειμένου να προσδιοριστούν τα μεγέθη έντασης του μητρώου φόρτισης θα πρέπει να δεσμευτούν τα μεγέθη μετακίνησης στα άκρα της δοκού. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε δεσμευμένα τα άκρα του διατμητικού επιπέδου ως προς την κατακόρυφη μετακίνηση τους w_k. Έτσι στα άκρα του στοιχείου x=0 και x=L, οι συνοριακές συνθήκες είναι:

- <u>x=0</u>

$$w(0)=0 \tag{3.108α}$$

$$\psi(0)=-\frac{M(0)}{K_{\Phi A}} \rightarrow \psi(0)=\left(\frac{EI}{K_{\Phi A}}\right)\frac{d\psi}{dx}\bigg|_{x=0} \tag{3.108β}$$

$$w_k(0)=0 \tag{3.108γ}$$

- <u>x=L</u>

$$w(L)=0 \tag{3.109α}$$

$$\psi(L)=\frac{M(L)}{K_{\Phi B}} \rightarrow \psi(L)=-\left(\frac{EI}{K_{\Phi B}}\right)\frac{d\psi}{dx}\bigg|_{x=L} \tag{3.109β}$$

$$w_k(L)=0 \tag{3.109γ}$$

Με βάση τις 6 συνοριακές συνθήκες (3.108α, β, γ), (3.109α, β, γ), και τις εκφράσεις των μεγεθών μετακίνησης (3.106α, β, γ), προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα έξι εξισώσεων, από το οποίο υπολογίζονται οι σταθερές ολοκλήρωσης $C'_1 - C'_6$. Το σύστημα αυτό έχει τη μορφή:

$$[F_{Tr}][C']=[V_{Tr}] \tag{3.110}$$

όπου $[F_{Tr}]$ είναι το διαστάσεων 6x6 μητρώο των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος, $[C']$ είναι το διάνυσμα των αγνώστων σταθερών $C'_1 - C'_6$ (σχέση 3.66γ), και $[V_{Tr}]$ είναι το διάνυσμα των σταθερών όρων του συστήματος. Τα μητρώα $[F_{Tr}]$, $[V_{Tr}]$ είναι τα εξής:

$$[F_{Tr}]=\begin{bmatrix} f_{1w0} & f_{2w0} & f_{3w0} & f_{4w0} & f_{5w0} & f_{6w0} \\ f_{1\psi 0}-\left(\frac{EI}{K_{\Phi A}}\right)f'_{1\psi 0} & f_{2\psi 0}-\left(\frac{EI}{K_{\Phi A}}\right)f'_{2\psi 0} & f_{3\psi 0}-\left(\frac{EI}{K_{\Phi A}}\right)f'_{3\psi 0} & f_{4\psi 0}-\left(\frac{EI}{K_{\Phi A}}\right)f'_{4\psi 0} & f_{5\psi 0}-\left(\frac{EI}{K_{\Phi A}}\right)f'_{5\psi 0} & f_{6\psi 0}-\left(\frac{EI}{K_{\Phi A}}\right)f'_{6\psi 0} \\ f_{10} & f_{20} & f_{30} & f_{40} & f_{50} & f_{60} \\ f_{1wL} & f_{2wL} & f_{3wL} & f_{4wL} & f_{5wL} & f_{6wL} \\ f_{1\psi L}+\left(\frac{EI}{K_{\Phi B}}\right)f'_{1\psi L} & f_{2\psi L}+\left(\frac{EI}{K_{\Phi B}}\right)f'_{2\psi L} & f_{3\psi L}+\left(\frac{EI}{K_{\Phi B}}\right)f'_{3\psi L} & f_{4\psi L}+\left(\frac{EI}{K_{\Phi B}}\right)f'_{4\psi L} & f_{5\psi L}+\left(\frac{EI}{K_{\Phi B}}\right)f'_{5\psi L} & f_{6\psi L}+\left(\frac{EI}{K_{\Phi B}}\right)f'_{6\psi L} \\ f_{1L} & f_{2L} & f_{3L} & f_{4L} & f_{5L} & f_{6L} \end{bmatrix} \tag{3.111}$$

$$[V_{Tr}]^T=-\left[\left(\frac{k+c}{kc}\right)q_2 \;\vdots\; \left(\frac{k+c}{kc}\right)\left(\frac{q_3-q_2}{L}\right) \;\vdots\; \frac{q_2}{k} \;\vdots\; \left(\frac{k+c}{kc}\right)q_3 \;\vdots\; \left(\frac{k+c}{kc}\right)\left(\frac{q_3-q_2}{L}\right) \;\vdots\; \frac{q_3}{k}\right] \tag{3.112}$$

Η σχέση (3.111) ισχύει γενικά για την περίπτωση της δοκού Timoshenko, αφού οι συναρτήσεις f_{iw}, $f_{i\psi}$, f_i, καθώς και οι παράγωγοι τους που υπεισέρχονται στον πίνακα $[F_{Tr}]$, μπορούν να λάβουν μορφές που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις λύσης που είναι δυνατό να λάβουν τόσο οι εξισώσεις (3.7α), (3.7β), (3.10) της θεωρίας β' τάξης, όσο και οι εξισώσεις (3.11α), (3.11β), (3.10) της θεωρίας α' τάξης. Υπενθυμίζεται ότι

οι πιθανές μορφές λύσης για την περίπτωση της δοκού Timoshenko είναι σύμφωνα με τον Πίνακα 3.6 οι A_1, B_1, B_2 (βλέπε και Πίνακες 3.2α, και 3.2β).

Η αντιστροφή του μητρώου $[F_{Tr}]$ οδηγεί στην λύση του γραμμικού συστήματος (3.110) και επομένως στον προσδιορισμό των σταθερών ολοκλήρωσης $C'_1 - C'_6$. Έτσι με εφαρμογή των σχέσεων (3.59α, β, γ) είναι δυνατός ο σχηματισμός του μητρώου φόρτισης (Σχέση 3.107).

3.5.1.1β. Μέθοδος Β'

Κάνοντας χρήση των αλγεβρικών συναρτήσεων παρεμβολής, η σχέση που οδηγεί στον προσδιορισμό του μητρώου φόρτισης είναι:

$$\left[P^{(Tr)}\right]^T = \int_0^L [N_w]\left[q_2 + \left(\frac{q_3 - q_2}{L}\right)x\right]dx \rightarrow \left[P^{(Tr)}\right]^T = q_2\int_0^L [N_w]dx + \left(\frac{q_3 - q_2}{L}\right)\int_0^L [N_w]xdx \tag{3.113}$$

όπου $[N_w]^T$ είναι το μητρώο των συναρτήσεων μορφής της συνολικής κατακόρυφης μετακίνησης w. Θέτοντας $q_2=q_3=q$ προκύπτει το μητρώο φόρτισης για την περίπτωση ομοιόμορφου φορτίου. Λαμβάνοντας υπόψη την (3.79β) η σχέση (3.113) λαμβάνει τη μορφή:

$$\left[P^{(Tr)}\right]^T = q_2\int_0^L [f][J_w]^T[R]^{-1}dx + \left(\frac{q_3 - q_2}{L}\right)\int_0^L [f][J_w]^T[R]^{-1}xdx \tag{3.114α}$$

Το μητρώο [f] δίνεται από τη σχέση (3.75α) ενώ υπάρχει και η δυνατότητα χρήσης του αντίστοιχου μητρώου που σχηματίζεται από τις στοιχειώδεις συναρτήσεις που συνθέτουν τις αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων του προβλήματος (βλέπε Πίνακα 3.2α). Τα μητρώα $[J_w]$, $[R]^{-1}$ δίνονται από τις σχέσεις (3.77α) και (3.73) αντίστοιχα, ενώ εάν γίνει χρήση των συναρτήσεων που αποτελούν τις αναλυτικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος μπορούν να υπολογιστούν με τρόπο ανάλογο με αυτό που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 3.4.1.1β. Επειδή τα μητρώα $[J_w]$, $[R]^{-1}$ έχουν σε κάθε περίπτωση σταθερά στοιχεία, μπορούν να βγουν έξω από τα ολοκληρώματα, οπότε η σχέση (3.114α) παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\left[P^{(Tr)}\right]^T = \left\{q_2\int_0^L [f]dx + \left(\frac{q_3 - q_2}{L}\right)\int_0^L [f]xdx\right\}[J_w]^T[R]^{-1} \tag{3.114β}$$

Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις, και κατόπιν αλγεβρικών μετασχηματισμών προκύπτει:

$$\left[P^{(Tr)}\right] = \begin{bmatrix} V(0) \\ \cdots \\ M(0) \\ \cdots \\ V_G(0) \\ \cdots \\ V(L) \\ \cdots \\ M(L) \\ \cdots \\ V_G(L) \end{bmatrix} = \frac{L}{2}\begin{bmatrix} q_2 + q_3 \\ \cdots \\ (L/3)(q_2 + 2q_3) \\ \cdots \\ (L^2/6)(q_2 + 3q_3) \\ \cdots \\ (L^3/10)(q_2 + 4q_3) \\ \cdots \\ (L^4/15)(q_2 + 5q_3) \\ \cdots \\ (L^5/21)(q_2 + 6q_3) \end{bmatrix}\left([R]^{-1}\right)^T[J_w] \tag{3.115}$$

Πρέπει τέλος να τονιστεί ότι είναι δυνατό από τη σχέση 3.114β να προκύψει το μητρώο φόρτισης, και για την περίπτωση φόρτισης τμήματος της δοκού με τραπεζοειδές φορτίο. Για να επιτευχθεί αυτό θα πρέπει να αλλάξουν τα όρια ολοκλήρωσης, έτσι ώστε να καλύπτουν το εύρος της δοκού το οποίο φορτίζεται.

3.5.1.2. Δοκός Euler – Bernoulli

Και στην περίπτωση της δοκού Euler – Bernoulli θα παρουσιαστεί η διαδικασία σχηματισμού του μητρώου φόρτισης ανεξαρτήτως τάξης ανάλυσης και ανεξαρτήτως μορφής της αναλυτικής λύσης των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος.

3.5.1.2α. Μέθοδος Α'

Στην περίπτωση καθολικής φόρτισης με τραπεζοειδές φορτίο οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων (3.16α) και (3.16β) είναι:

$$w(x) = C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + C_4 f_4 + C_5 f_5 + C_6 f_6 + \frac{k+c}{kc}\left(\frac{q_3 - q_2}{L} x + q_2\right) \tag{3.116α}$$

$$w_k(x) = f_{1k} C_1 + f_{2k} C_2 + f_{3k} C_3 + f_{4k} C_4 + f_{5k} C_5 + f_{6k} C_6 + \frac{1}{k}\left(\frac{q_3 - q_2}{L} x + q_2\right) \tag{3.116β}$$

Οι απαραίτητες συνοριακές συνθήκες προσδιορισμού των σταθερών ολοκλήρωσης είναι:

- <u>x=0</u>

$$w(0) = 0 \tag{3.117α}$$

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{M(0)}{K_{\Phi A}} \rightarrow \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = \left(\frac{EI}{K_{\Phi A}}\right)\left.\frac{d^2 w}{dx^2}\right|_{x=0} \tag{3.117β}$$

$$w_k(0) = 0 \tag{3.117γ}$$

- <u>x=L</u>

$$w(L) = 0 \tag{3.118α}$$

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=L} = \frac{M(L)}{K_{\Phi B}} \rightarrow \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=L} = -\left(\frac{EI}{K_{\Phi B}}\right)\left.\frac{d^2 w}{dx^2}\right|_{x=L} \tag{3.118β}$$

$$w_k(L) = 0 \tag{3.118γ}$$

Οι παραπάνω συνοριακές συνθήκες σχηματίζουν ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων ανάλογο του συστήματος που δίνεται από τη σχέση (3.110). Το μητρώο $[V_{Tr}]$ δίνεται από τη σχέση (3.112) ενώ το $[F_{Tr}]$ είναι:

$$[F_{Tr}] = \begin{bmatrix} f_{10} & f_{20} & f_{30} & f_{40} & f_{50} & f_{60} \\ f'_{10} - \left(\frac{EI}{K_{\Phi A}}\right) f''_{10} & f'_{20} - \left(\frac{EI}{K_{\Phi A}}\right) f''_{20} & f'_{30} - \left(\frac{EI}{K_{\Phi A}}\right) f''_{30} & f'_{40} - \left(\frac{EI}{K_{\Phi A}}\right) f''_{40} & f'_{50} - \left(\frac{EI}{K_{\Phi A}}\right) f''_{50} & f'_{60} - \left(\frac{EI}{K_{\Phi A}}\right) f''_{60} \\ f_{1k0} & f_{2k0} & f_{3k0} & f_{4k0} & f_{5k0} & f_{6k0} \\ f_{1L} & f_{2L} & f_{3L} & f_{4L} & f_{5L} & f_{6L} \\ f'_{1L} + \left(\frac{EI}{K_{\Phi B}}\right) f''_{1L} & f'_{2L} + \left(\frac{EI}{K_{\Phi B}}\right) f''_{2L} & f'_{3L} + \left(\frac{EI}{K_{\Phi B}}\right) f''_{3L} & f'_{4L} + \left(\frac{EI}{K_{\Phi B}}\right) f''_{4L} & f'_{5L} + \left(\frac{EI}{K_{\Phi B}}\right) f''_{5L} & f'_{6L} + \left(\frac{EI}{K_{\Phi B}}\right) f''_{6L} \\ f_{1kL} & f_{2kL} & f_{3kL} & f_{4kL} & f_{5kL} & f_{6kL} \end{bmatrix} \tag{3.119}$$

Κατά τα λοιπά η περαιτέρω διαδικασία σχηματισμού του μητρώου φόρτισης είναι ανάλογη με αυτή που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 3.5.1.1α.

3.5.1.2β. Μέθοδος Β'

Ακολουθώντας διαδικασία ανάλογη με αυτή που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 3.5.1.1β προκύπτει το ζητούμενο μητρώο φόρτισης:

$$[P_{Tr}]=\begin{bmatrix} V(0) \\ \cdots \\ M(0) \\ \cdots \\ V_G(0) \\ \cdots \\ V(L) \\ \cdots \\ M(L) \\ \cdots \\ V_G(L) \end{bmatrix}=\frac{L}{2}\begin{bmatrix} q_2+q_3 \\ \cdots \\ (L/3)(q_2+2q_3) \\ \cdots \\ (L^2/6)(q_2+3q_3) \\ \cdots \\ (L^3/10)(q_2+4q_3) \\ \cdots \\ (L^4/15)(q_2+5q_3) \\ \cdots \\ (L^5/21)(q_2+6q_3) \end{bmatrix}\left([R]^{-1}\right)^T \tag{3.120}$$

Το μητρώο [R] δίνεται από τη σχέση (3.94). Υπενθυμίζεται και στο σημείο αυτό η δυνατότητα χρήσης των συναρτήσεων που αποτελούν τις αναλυτικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων (3.16α) και (3.16β).

3.5.2. Μοναχικό φορτίο σε τυχούσα θέση

3.5.2.1. Δοκός Timoshenko

Στην περίπτωση φόρτισης της δοκού με μοναχικό φορτίο σε τυχούσα θέση, οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα είναι οι ομογενείς διαφορικές εξισώσεις (3.8α), (3.8β) και η σχέση (3.10), καθώς στην περίπτωση σημειακών φορτίσεων δεν υφίσταται ειδική λύση των αντιστοίχων μη ομογενών εξισώσεων (3.7α), (3.7β). Έτσι, για την ανάπτυξη του μητρώου φόρτισης με βάση την ακριβή μέθοδο Α', θα εφαρμοστεί η μέθοδος των αρχικών παραμέτρων.

Όπως και στην περίπτωση του μητρώου φόρτισης για καθολική τραπεζοειδή φόρτιση, έτσι και στην παρούσα, θα παρουσιαστεί η διαδικασία σχηματισμού του μητρώου, ανεξαρτήτως τόσο της τάξης ανάλυσης (θεωρία α' ή β' τάξης), όσο και των πιθανών μορφών λύσης των αντιστοίχων εξισώσεων (Πίνακας 3.6). Από τη γενική μορφή των σχέσεων οι οποίες θα προκύψουν, θα είναι δυνατή η ειδίκευση για κάθε περίπτωση.

3.5.2.1α. Μέθοδος Α'

Σύμφωνα με τη μέθοδο των αρχικών παραμέτρων, τα μεγέθη μετακίνησης και έντασης εκφράζονται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε οι αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσης $C'_1 - C'_6$ των εξισώσεων (3.62α), (3.62β), (3.62γ) αποκτούν φυσική ερμηνεία με βάση τις συνοριακές συνθήκες που προδιαγράφονται στο ένα άκρο του στοιχείου.

Όπως τονίστηκε στην Παράγραφο 3.4.1.1α οι παράμετροι του προβλήματος είναι η συνολική κατακόρυφη μετακίνηση w(x), η κατακόρυφη μετακίνηση της διατμητικής στρώσης $w_k(x)$, η γωνία στροφής των διατομών ψ(x), η ροπή κάμψης M(x), η τέμνουσα δύναμη V(x), και η τέμνουσα δύναμη που καταπονεί τη διατμητική στρώση $V_G(x)$. Οι τιμές των παραμέτρων αυτών στην αρχή του τοπικού συστήματος

αναφοράς του στοιχείου x=0, αποτελούν τις **αρχικές παραμέτρους** w_0, w_{k0}, ψ_0, M_0, V_0 και V_{G0}. Οι αρχικές παράμετροι συνδέονται με τις σταθερές ολοκλήρωσης μέσω της παρακάτω μητρωϊκής σχέσης:

$$[y_0] = [F_0^*][C'] \tag{3.121}$$

Όπου:

$$[y_0]^T = [w_0 \vdots \psi_0 \vdots w_{k0} \vdots V_0 \vdots M_0 \vdots V_{G0}] \tag{3.122}$$

είναι το μητρώο των αρχικών παραμέτρων, ενώ το μητρώο $[F_0^*]$ είναι ένα 6x6 μητρώο η μορφή του εξαρτάται από τη μορφή λύσης των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος. Έτσι οι εκφράσεις των σταθερών ολοκλήρωσης προκύπτουν από την αντιστροφή της (3.121):

$$[C'] = [F_0^*]^{-1}[y_0] \tag{3.123}$$

Όπως είναι γνωστό (Σχέση 3.74α), ισχύει:

$$w_k(x) = [f][C']$$

Συνδυάζοντας επίσης τις (3.74β), (3.74γ) με τις (3.76α), (3.76β) αντίστοιχα, προκύπτουν:

$$w(x) = [f][J_w]^T[C'] \tag{3.124α}$$

$$\psi(x) = [f][J_\psi]^T[C'] \tag{3.124β}$$

Εισάγοντας την (3.123) στην (3.74α) και στις (3.124α), (3.124β) προκύπτουν:

$$w_k(x) = [f][F_0^*]^{-1}[y_0] \tag{3.125α}$$

$$w(x) = [f][J_w]^T[F_0^*]^{-1}[y_0] \tag{3.125β}$$

$$\psi(x) = [f][J_\psi]^T[F_0^*]^{-1}[y_0] \tag{3.125γ}$$

όπου [f] είναι το μητρώο των γραμμικώς ανεξαρτήτων στοιχειωδών συναρτήσεων που συνθέτουν τη λύση των διαφορικών εξισώσεων και εξαρτώνται από την περίπτωση λύσης (Πίνακας 3.2α), ενώ τα μητρώα $[J_w]$ και $[J_\psi]$ συνδέουν τις συναρτήσεις f_i με τις συναρτήσεις f_{iw} και $f_{i\psi}$ αντίστοιχα (βλέπε σχέσεις 3.63α, 3.63β για την περίπτωση λύσης A_1).

Με τις σχέσεις (3.125α), (3.125β), (3.125γ) επιτυγχάνεται η συσχέτιση των γεωμετρικών μεγεθών του προβλήματος με τις αρχικές παραμέτρους. Ανάλογες σχέσεις μπορούν να σχηματιστούν και για τα εντατικά μεγέθη. Ξεκινώντας από τις σχέσεις υπολογισμού των εντατικών μεγεθών και ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με αυτήν που ακολουθήθηκε και για τα μεγέθη μετακίνησης, προκύπτουν:

$$M(x) = EI[f']\left\{[J_\psi]^T[F_0^*]^{-1}\right\}[y_0] \tag{3.125δ}$$

$$V(x) = \left\{EI[f''][J_\psi]^T + P[f'][J_w]^T\right\}[F_0^*]^{-1}[y_0] \tag{3.125ε}$$

$$V_G(x) = G[f'][F_0^*]^{-1}[y_0] \tag{3.125στ}$$

Οι σχέσεις (3.125α) – (3.125στ) μπορούν να γραφούν σε μια ενιαία μητρωϊκή μορφή ως εξής:

$$\begin{bmatrix} w(x) \\ \psi(x) \\ w_k(x) \\ V(x) \\ M(x) \\ V_G(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [f][J_w]^T \\ [f][J_\psi]^T \\ [f] \\ EI[f''][J_\psi]^T + P[f'][J_w]^T \\ EI[f'][J_\psi]^T \\ G[f'] \end{bmatrix} \left[F_0^*\right]^{-1}[y_0] \Rightarrow [y(x)] = \left\{[F^*][F_0^*]^{-1}\right\}[y_0] \Rightarrow [y(x)] = [F][y_0] \tag{3.126}$$

Το μητρώο [F] είναι το μητρώο **μεταφοράς** το οποίο συνδέει τις αρχικές παραμέτρους με τις αντίστοιχες τιμές των παραμέτρων σε κάθε διατομή της δοκού. Μετά από την εκτέλεση αλγεβρικών μετασχηματισμών η σχέση (3.126) δίνει τις παρακάτω σχέσεις:

$$w(x) = w_0 W_1(x) + \psi_0 W_2(x) + w_{k0} W_3(x) + V_0 W_4(x) + M_0 W_5(x) + V_{G0} W_6(x) \tag{3.127α}$$

$$\psi(x) = w_0 G_1(x) + \psi_0 G_2(x) + w_{k0} G_3(x) + V_0 G_4(x) + M_0 G_5(x) + V_{G0} G_6(x) \tag{3.127β}$$

$$w_k(x) = w_0 W_{k1}(x) + \psi_0 W_{k2}(x) + w_{k0} W_{k3}(x) + V_0 W_{k4}(x) + M_0 W_{k5}(x) + V_{G0} W_{k6}(x) \tag{3.127γ}$$

$$V(x) = w_0 V_1(x) + \psi_0 V_2(x) + w_{k0} V_3(x) + V_0 V_4(x) + M_0 V_5(x) + V_{G0} V_6(x) \tag{3.127δ}$$

$$M(x) = w_0 M_1(x) + \psi_0 M_2(x) + w_{k0} M_3(x) + V_0 M_4(x) + M_0 M_5(x) + V_{G0} M_6(x) \tag{3.127ε}$$

$$V_G(x) = w_0 V_{G1}(x) + \psi_0 V_{G2}(x) + w_{k0} V_{G3}(x) + V_0 V_{G4}(x) + M_0 V_{G5}(x) + V_{G0} V_{G6}(x) \tag{3.127στ}$$

Έτσι το μητρώο μεταφοράς [F] μπορεί να πάρει την παρακάτω γενική μορφή:

$$[F] = \begin{bmatrix} W_1(x) & W_2(x) & W_3(x) & W_4(x) & W_5(x) & W_6(x) \\ G_1(x) & G_2(x) & G_3(x) & G_4(x) & G_5(x) & G_6(x) \\ W_{k1}(x) & W_{k2}(x) & W_{k3}(x) & W_{k4}(x) & W_{k5}(x) & W_{k6}(x) \\ V_1(x) & V_2(x) & V_3(x) & V_4(x) & V_5(x) & V_6(x) \\ M_1(x) & M_2(x) & M_3(x) & M_4(x) & M_5(x) & M_6(x) \\ V_{G1}(x) & V_{G2}(x) & V_{G3}(x) & V_{G4}(x) & V_{G5}(x) & V_{G6}(x) \end{bmatrix} \tag{3.128}$$

Τα στοιχεία – συναρτήσεις του παραπάνω μητρώου εξαρτώνται από τη μορφή λύσης της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος (Πίνακας 3.2α) και δίνονται στο Παράρτημα Α.

Η επιρροή του μοναχικού κατακόρυφου φορτίου F_z λαμβάνεται υπόψη με βάση το ακόλουθο σκεπτικό:

Έστω ότι το φορτίο F_z δρα σε απόσταση αL ($0<\alpha<1$) από την αρχή του τοπικού συστήματος του στοιχείου x=0 (Σχήμα 3.10). Θεωρώντας ότι οι συνθήκες (αρχικές παράμετροι) στο σημείο x=0 είναι γνωστές, τότε οι εξισώσεις (3.127α) – (3.127στ) περιγράφουν τις 6 παραμέτρους του προβλήματος στην περιοχή $x<\alpha L$.

Το μοναχικό φορτίο F_z έχει επιρροή στις παραμέτρους του προβλήματος για x>αL, όμοια με αυτήν που θα είχε ένα κατακόρυφο φορτίο στο σημείο x=0 για x>0. Αυτό σημαίνει ότι η επιρροή του κατακόρυφου φορτίου προστίθεται στην επιρροή της τέμνουσας V(x) στην περιοχή x>αL. Επομένως θα πρέπει να προστεθούν αλγεβρικά στις (3.127α) – (3.127στ) όροι όμοιοι με αυτούς που περιέχουν την αρχική παράμετρο V_0, πολλαπλασιασμένοι με την τιμή του φορτίου F_z. Οι όροι αυτοί θα πρέπει να είναι μηδενικοί για x<αL. Έτσι η επιρροή του κατακόρυφου φορτίου F_z π.χ. στην συνολική κατακόρυφη μετακίνηση του στοιχείου w, λαμβάνεται υπόψη, αν στην (3.127α) προστεθεί όρος της μορφής $-F_zW_4(x-\alpha L)$. Το αρνητικό πρόσημο του όρου αυτού εξηγείται από το γεγονός ότι θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η αρνητική τέμνουσα που προκαλείται από το κατακόρυφο φορτίο δεξιά του σημείου εφαρμογής x=αL. Ακολουθώντας το παραπάνω σκεπτικό οι συναρτήσεις που περιγράφουν τις παραμέτρους του προβλήματος με την επιρροή του κατακορύφου φορτίου δίνονται από τις σχέσεις:

$$w(x) = w_0W_1(x) + \psi_0W_2(x) + w_{k0}W_3(x) + V_0W_4(x) + M_0W_5(x) + V_{G0}W_6(x) - F_zW_4(x-\alpha L) \quad (3.129\alpha)$$

$$\psi(x) = w_0G_1(x) + \psi_0G_2(x) + w_{k0}G_3(x) + V_0G_4(x) + M_0G_5(x) + V_{G0}G_6(x) - F_zG_4(x-\alpha L) \quad (3.129\beta)$$

$$w_k(x) = w_0W_{k1}(x) + \psi_0W_{k2}(x) + w_{k0}W_{k3}(x) + V_0W_{k4}(x) + M_0W_{k5}(x) + V_{G0}W_{k6}(x) - F_zW_{k4}(x-\alpha L) \quad (3.129\gamma)$$

$$V(x) = w_0V_1(x) + \psi_0V_2(x) + w_{k0}V_3(x) + V_0V_4(x) + M_0V_5(x) + V_{G0}V_6(x) - F_zV_4(x-\alpha L) \quad (3.129\delta)$$

$$M(x) = w_0M_1(x) + \psi_0M_2(x) + w_{k0}M_3(x) + V_0M_4(x) + M_0M_5(x) + V_{G0}M_6(x) - F_zM_4(x-\alpha L) \quad (3.129\varepsilon)$$

$$V_G(x) = w_0V_{G1}(x) + \psi_0V_{G2}(x) + w_{k0}V_{G3}(x) + V_0V_{G4}(x) + M_0V_{G5}(x) + V_{G0}V_{G6}(x) - F_zV_{G4}(x-\alpha L) \quad (3.129\sigma\tau)$$

Οι σχέσεις αυτές ισχύουν για x>αL, ενώ για x<αL ισχύουν οι (3.127α) – (3.127στ). Η μητρωϊκη μορφή των (3.129α) – (3.129στ) είναι η εξής:

$$[y(x)] = [F][y_0] - F_z[y(x-\alpha L)] \quad (3.130)$$

Όπου:

$$[y(x-\alpha L)]^T = [W_4(x-\alpha L) \vdots G_4(x-\alpha L) \vdots W_{k4}(x-\alpha L) \vdots V_4(x-\alpha L) \vdots M_4(x-\alpha L) \vdots V_{G4}(x-\alpha L)] \quad (3.131)$$

είναι το μητρώο – στήλη που εκφράζει την επιρροή του κατακόρυφου φορτίου.

Το ζητούμενο μητρώο φόρτισης έχει την γενική μορφή:

$$[P^{(Fz)}]^T = [V^{(Fz)}(0) \vdots M^{(Fz)}(0) \vdots V_G^{(Fz)}(0) \vdots V^{(Fz)}(L) \vdots M^{(Fz)}(L) \vdots V_G^{(Fz)}(L)] \quad (3.132)$$

Οι όροι του μητρώου αυτού μπορούν να υπολογιστούν από τις εξισώσεις (3.129α) – (3.129στ) αρκεί να είναι γνωστές όλες οι αρχικές παράμετροι. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να είναι γνωστά τόσο τα τρία μεγέθη μετακίνησης όσο και τα μεγέθη έντασης στο άκρο x=0. Οι συνοριακές συνθήκες (3.108α, β, γ) που ισχύουν και στην παρούσα περίπτωση προδιαγράφουν τα τρία μεγέθη μετακίνησης. Για τον προσδιορισμό των τριών μεγεθών έντασης του άκρου x=0 θα χρησιμοποιηθούν οι συνοριακές συνθήκες (3.109α, β, γ) του άκρου x=L. Η εφαρμογή των σχέσεων (3.129α) – (3.129στ) για x=L λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπόψη τις συνοριακές συνθήκες του άκρων x=0, L δίνει:

$$w_L = V_0W_{4L} + M_0\left(W_{5L} - \frac{W_{2L}}{K_{\Phi A}}\right) + V_{G0}W_{6L} - F_zW_4[L(1-\alpha)] = 0 \quad (3.133\alpha)$$

$$\psi_L = V_0 G_{4L} + M_0\left(G_{5L} - \frac{G_{2L}}{K_{\Phi A}}\right) + V_{G0} G_{6L} - F_z G_4\left[L(1-\alpha)\right] = \frac{M_L}{K_{\Phi B}} \tag{3.133β}$$

$$w_{kL} = V_0 W_{k4L} + M_0\left(W_{k5L} - \frac{W_{k2L}}{K_{\Phi A}}\right) + V_{G0} W_{k6L} - F_z W_{k4}\left[L(1-\alpha)\right] = 0 \tag{3.133γ}$$

$$V_L = V_0 V_{4L} + M_0\left(V_{5L} - \frac{V_{2L}}{K_{\Phi A}}\right) + V_{G0} V_{6L} - F_z V_4\left[L(1-\alpha)\right] \tag{3.133δ}$$

$$M_L = V_0 M_{4L} + M_0\left(M_{5L} - \frac{M_{2L}}{K_{\Phi A}}\right) + V_{G0} M_{6L} - F_z M_4\left[L(1-\alpha)\right] \tag{3.133ε}$$

$$V_{GL} = V_0 V_{G4L} + M_0\left(V_{G5L} - \frac{V_{G2L}}{K_{\Phi A}}\right) + V_{G0} V_{G6L} - F_z V_{G4}\left[L(1-\alpha)\right] \tag{3.133στ}$$

Ο συνδυασμός των εξισώσεων (3.133β) και (3.133ε) δίνει την παρακάτω εξίσωση:

$$\left[G_{4L} - \frac{M_{4L}}{K_{\Phi B}}\right]V_0 + \left[\frac{M_{2L}}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}} - \frac{G_{2L}}{K_{\Phi A}} - \frac{M_{5L}}{K_{\Phi B}} + G_{5L}\right]M_0 + \left[G_{6L} - \frac{M_{6L}}{K_{\Phi B}}\right]V_{G0} = F_z\left[G_4\left[L(1-\alpha)\right] - \frac{M_4\left[L(1-\alpha)\right]}{K_{\Phi B}}\right] \tag{3.134}$$

η οποία μαζί με τις (3.133α) και (3.133γ) συνθέτει ένα σύστημα εξισώσεων από το οποίο μπορούν να υπολογιστούν οι αρχικές παράμετροι V_0, M_0, V_{G0}. Το σύστημα αυτό μπορεί να γραφεί σε μητρωϊκή μορφή ως εξής:

$$\begin{bmatrix} G_{4L} - \frac{M_{4L}}{K_{\Phi B}} & \frac{M_{2L}}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}} - \frac{G_{2L}}{K_{\Phi A}} - \frac{M_{5L}}{K_{\Phi B}} + G_{5L} & G_{6L} - \frac{M_{6L}}{K_{\Phi B}} \\ W_{4L} & W_{5L} - \frac{W_{2L}}{K_{\Phi A}} & W_{6L} \\ W_{k4L} & W_{k5L} - \frac{W_{k2L}}{K_{\Phi A}} & W_{k6L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ M_0 \\ V_{G0} \end{bmatrix} = F_z \begin{bmatrix} G_4\left[L(1-\alpha)\right] - \frac{M_4\left[L(1-\alpha)\right]}{K_{\Phi B}} \\ W_4\left[L(1-\alpha)\right] \\ W_{k4}\left[L(1-\alpha)\right] \end{bmatrix} \tag{3.135}$$

Μετά τον υπολογισμό των αρχικών παραμέτρων V_0, M_0, V_{G0} από την επίλυση του παραπάνω συστήματος είναι δυνατός ο υπολογισμός και των αντιστοίχων παραμέτρων στο άκρο x=L. Επομένως είναι δυνατός και ο σχηματισμός του ζητούμενου μητρώου φόρτισης (3.132). Είναι επίσης δυνατός και ο προσδιορισμός όλων των μεγεθών (κινηματικών – και εντατικών) από τις σχέσεις (3.127α) – (3.127στ) και (3.129α) – (3.129στ). Πρέπει να τονιστεί τέλος ότι για τον σχηματισμό και επίλυση του συστήματος (3.135) αρκεί ο σχηματισμός των μητρώων μεταφοράς η μορφή των οποίων εξαρτάται από την περίπτωση λύσης της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος (Πίνακας 3.2α). Τα μητρώα μεταφοράς για την κάθε δυνατή περίπτωση λύσης (Πίνακας 3.6) δίνονται στο Παράρτημα Α.

3.5.2.1β. Μέθοδος Β'

Ακολουθώντας την κλασσική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, το μητρώο φόρτισης δίνεται από τη σχέση:

$$\left[P^{(Fz)}\right] = F_z\left[N_w\right]^T_{x=\alpha L} \Rightarrow \left[P^{(Fz)}\right] = F_z\left(\left[R\right]^{-1}\right)^T\left[J_w\right]\left[f\right]^T_{x=\alpha L} \tag{3.136}$$

Η σχέση αυτή αποτελεί ειδίκευση της (3.113). Το μητρώο [f] στην περίπτωση που γίνεται χρήση αλγεβρικών συναρτήσεων παρεμβολής δίνεται από τη σχέση (3.75α). Όπως τονίστηκε και στην Παράγραφο

3.5.1.1β υπάρχει και η δυνατότητα χρήσης του αντίστοιχου μητρώου [f] που σχηματίζεται από τις στοιχειώδεις συναρτήσεις που συνθέτουν τις αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων του προβλήματος (βλέπε Πίνακα 3.2α).

Το μητρώα [R], $[J_w]$ δίνονται από τις σχέσεις (3.73), (3.77α) αντίστοιχα στην περίπτωση χρήσης αλγεβρικών συναρτήσεων παρεμβολής, ενώ εάν γίνει χρήση των «ακριβών» συναρτήσεων τα μητρώα αυτά εξαρτώνται από τη περίπτωση λύσης των διαφορικών εξισώσεων.

3.5.2.2. Δοκός Euler – Bernoulli

Οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα είναι οι ομογενείς διαφορικές εξισώσεις (3.17α) και (3.17β). Και στην περίπτωση αυτή για την ανάπτυξη του μητρώου φόρτισης με βάση την ακριβή μέθοδο Α', θα εφαρμοστεί η μέθοδος των αρχικών παραμέτρων.

3.5.2.2α. Μέθοδος Α'

Όπως τονίστηκε στην Παράγραφο 3.4.2.1α οι παράμετροι του προβλήματος είναι η συνολική κατακόρυφη μετακίνηση w(x), η κατακόρυφη μετακίνηση της διατμητικής στρώσης $w_k(x)$, η γωνία στροφής των διατομών (dw/dx), η ροπή κάμψης M(x), η τέμνουσα δύναμη V(x), και η τέμνουσα δύναμη που καταπονεί τη διατμητική στρώση $V_G(x)$. Επομένως οι αρχικές παράμετροι είναι w_0, w_{k0}, dw_0/dx, M_0, V_0 και V_{G0}. Ακολουθώντας την διαδικασία που παρουσιάστηκε αναλυτικά στην προηγούμενη παράγραφο για τη δοκό Timoshenko προκύπτει η μητρωϊκή σχέση η οποία συνδέει τις τιμές των παραμέτρων σε κάθε σημείο του στοιχείου, με τις τιμές των αρχικών παραμέτρων:

$$\begin{bmatrix} w(x) \\ \frac{dw}{dx} \\ w_k(x) \\ V(x) \\ M(x) \\ V_G(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [f] \\ [f'] \\ [f'][J]^T \\ EI[f'''] + P[f'] \\ EI[f''] \\ G[f'][J]^T \end{bmatrix} [F_0^*]^{-1}[y_0] \Rightarrow [y(x)] = \left\{[F^*][F_0^*]^{-1}\right\}[y_0] \Rightarrow [y(x)] = [F][y_0] \tag{3.137}$$

Επομένως στην περίπτωση της δοκού Euler – Bernoulli το μητρώο μεταφοράς έχει τη μορφή:

$$[F] = \begin{bmatrix} W_1(x) & W_2(x) & W_3(x) & W_4(x) & W_5(x) & W_6(x) \\ W_1'(x) & W_2'(x) & W_3'(x) & W_4'(x) & W_5'(x) & W_6'(x) \\ W_{k1}(x) & W_{k2}(x) & W_{k3}(x) & W_{k4}(x) & W_{k5}(x) & W_{k6}(x) \\ V_1(x) & V_2(x) & V_3(x) & V_4(x) & V_5(x) & V_6(x) \\ M_1(x) & M_2(x) & M_3(x) & M_4(x) & M_5(x) & M_6(x) \\ V_{G1}(x) & V_{G2}(x) & V_{G3}(x) & V_{G4}(x) & V_{G5}(x) & V_{G6}(x) \end{bmatrix} \tag{3.138}$$

Τα στοιχεία – συναρτήσεις του παραπάνω μητρώου εξαρτώνται από τη μορφή λύσης της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος (Πίνακας 3.2α).

Η επιρροή του μοναχικού φορτίου F_z για x>αL λαμβάνεται υπόψη με τρόπο ανάλογο με αυτόν που δίνεται από τις σχέσεις (3.129α) – (3.129στ).

Επομένως και στην περίπτωση αυτή ισχύει η (3.130), όπου όμως:

$$\left[y(x-\alpha L)\right]^T = \left[W_4(x-\alpha L) \vdots W_4'(x-\alpha L) \vdots W_{k4}(x-\alpha L) \vdots V_4(x-\alpha L) \vdots M_4(x-\alpha L) \vdots V_{G4}(x-\alpha L)\right] \tag{3.139}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 3.5.2.1α προκύπτει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων από το οποίο υπολογίζονται οι παράμετροι V_0, M_0, V_{G0}:

$$\begin{bmatrix} W_{4L}' - \dfrac{M_{4L}}{K_{\Phi B}} & \dfrac{M_{2L}}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}} - \dfrac{W_{2L}'}{K_{\Phi A}} - \dfrac{M_{5L}}{K_{\Phi B}} + W_{5L}' & W_{6L}' - \dfrac{M_{6L}}{K_{\Phi B}} \\ W_{4L} & W_{5L} - \dfrac{W_{2L}}{K_{\Phi A}} & W_{6L} \\ W_{k4L} & W_{k5L} - \dfrac{W_{k2L}}{K_{\Phi A}} & W_{k6L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ M_0 \\ V_{G0} \end{bmatrix} = F_z \begin{bmatrix} W_4'[L(1-\alpha)] - \dfrac{M_4[L(1-\alpha)]}{K_{\Phi B}} \\ W_4[L(1-\alpha)] \\ W_{k4}[L(1-\alpha)] \end{bmatrix} \tag{3.140}$$

Μετά την επίλυση του συστήματος αυτού είναι δυνατός ο υπολογισμός και των παραμέτρων V_L, M_L, V_{GL} και επομένως ο σχηματισμός του μητρώου φορτίσεως (3.132). Είναι επίσης δυνατός και ο προσδιορισμός όλων των μεγεθών (κινηματικών – και εντατικών) σε κάθε σημείο του στοιχείου, από τις σχέσεις:

$$w(x) = V_0 W_4(x) + M_0\left(W_5(x) - \frac{W_2(x)}{K_{\Phi A}}\right) + V_{G0}W_6(x) - F_z W_4(x-\alpha L) \tag{3.141α}$$

$$\frac{dw}{dx} = V_0 W_4'(x) + M_0\left(W_5'(x) - \frac{W_2'(x)}{K_{\Phi A}}\right) + V_{G0}W_6'(x) - F_z W_4'(x-\alpha L) \tag{3.141β}$$

$$w_k(x) = V_0 W_{k4}(x) + M_0\left(W_{k5}(x) - \frac{W_{k2}(x)}{K_{\Phi A}}\right) + V_{G0}W_{k6}(x) - F_z W_{k4}(x-\alpha L) \tag{3.141γ}$$

$$V(x) = V_0 V_4(x) + M_0\left(V_5(x) - \frac{V_2(x)}{K_{\Phi A}}\right) + V_{G0}V_6(x) - F_z V_4(x-\alpha L) \tag{3.141δ}$$

$$M(x) = V_0 M_4(x) + M_0\left(M_5(x) - \frac{M_2(x)}{K_{\Phi A}}\right) + V_{G0}M_6(x) - F_z M_4(x-\alpha L) \tag{3.141ε}$$

$$V_G(x) = V_0 V_{G4}(x) + M_0\left(V_{G5}(x) - \frac{V_{G2}(x)}{K_{\Phi A}}\right) + V_{G0}V_{G6}(x) - F_z V_{G4}(x-\alpha L) \tag{3.141στ}$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για το τμήμα του στοιχείου που βρίσκεται μετά το σημείο εφαρμογής του φορτίου, x>αL. Για το τμήμα του στοιχείου με x<αL ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις χωρίς όμως τους τελευταίους όρους τους που εκφράζουν την επιρροή του κατακόρυφου φορτίου.

3.5.2.2β. Μέθοδος Β'

Το μητρώο φόρτισης σύμφωνα με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων δίνεται από τη σχέση:

$$\left[P^{(Fz)}\right] = F_z\left[N_w\right]^T_{x=\alpha L} \Rightarrow \left[P^{(Fz)}\right] = F_z\left(\left[R\right]^{-1}\right)^T\left[f\right]^T_{x=\alpha L} \tag{3.142}$$

Τα μητρώα [R], [f] δίνονται από τις σχέσεις (3.94), (3.96α) όταν γίνεται χρήση αλγεβρικών συναρτήσεων παρεμβολής. Εάν γίνει χρήση των συναρτήσεων που αποτελούν την αναλυτική λύση των εξισώσεων (3.17α) και (3.17β) τα μητρώα αυτά εξαρτώνται από τη μορφή λύσης των εξισώσεων αυτών.

3.5.3. Μοναχική ροπή σε τυχούσα θέση

Το διάνυσμα φόρτισης για μοναχική ροπή σε τυχούσα θέση μπορεί να σχηματιστεί ακολουθώντας τη διαδικασία που ακολουθήθηκε και για την περίπτωση κατακόρυφου φορτίου, τόσο με βάση τη Μέθοδο Α' όσο και τη Μέθοδο Β'. Έτσι στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστούν μόνο τα αντίστοιχα σημεία και οι αντίστοιχες σχέσεις που παρουσιάζουν διαφοροποίηση από την περίπτωση φόρτισης με κατακόρυφο φορτίο.

3.5.3.1. Δοκός Timoshenko

3.5.3.1α. Μέθοδος Α'

Ξεκινώντας από τις σχέσεις (3.126), (3.127α) – (3.127στ), (3.128) οι οποίες ισχύουν και στην παρούσα περίπτωση, καθώς είναι ανεξάρτητες από τη μορφή της εξωτερικής φόρτισης, προκύπτει με βάση το σκεπτικό που εκτέθηκε στην Παράγραφο 3.5.2.1α η μητρωϊκή σχέση:

$$[y(x)] = [F][y_0] + M_E[y(x-\alpha L)] \tag{3.143}$$

Όπου:

$$[y(x-\alpha L)]^T = [W_5(x-\alpha L) \vdots G_5(x-\alpha L) \vdots W_{k5}(x-\alpha L) \vdots V_5(x-\alpha L) \vdots M_5(x-\alpha L) \vdots V_{G5}(x-\alpha L)] \tag{3.144}$$

Πρέπει να επισημανθεί ότι τα πρόσημα των όρων που εκφράζουν την επιρροή της μοναχικής ροπής είναι – σε αντίθεση με την περίπτωση του μοναχικού κατακόρυφου φορτίου – θετικά.

Για τον υπολογισμό των αρχικών παραμέτρων V_0, M_0, V_{G0} καταστρώνεται ένα σύστημα τριών εξισώσεων παρόμοιας μορφής με το σύστημα (3.135):

$$\begin{bmatrix} G_{4L} - \frac{M_{4L}}{K_{\Phi B}} & \frac{M_{2L}}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}} - \frac{G_{2L}}{K_{\Phi A}} - \frac{M_{5L}}{K_{\Phi B}} + G_{5L} & G_{6L} - \frac{M_{6L}}{K_{\Phi B}} \\ W_{4L} & W_{5L} - \frac{W_{2L}}{K_{\Phi A}} & W_{6L} \\ W_{k4L} & W_{k5L} - \frac{W_{k2L}}{K_{\Phi A}} & W_{k6L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ M_0 \\ V_{G0} \end{bmatrix} = M_E \begin{bmatrix} \frac{M_5[L(1-\alpha)]}{K_{\Phi B}} - G_5[L(1-\alpha)] \\ -W_5[L(1-\alpha)] \\ -W_{k5}[L(1-\alpha)] \end{bmatrix} \tag{3.145}$$

Η μοναδική διαφοροποίηση του συστήματος αυτού από το (3.135) έγκειται μόνο στο δεύτερο σκέλος των εξισώσεων τους.

Μετά τον προσδιορισμό των παραμέτρων V_0, M_0, V_{G0} είναι δυνατός ο σχηματισμός του μητρώου φόρτισης ακολουθώντας τα βήματα που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 3.5.2.1α.

3.5.3.2α. Μέθοδος Β'

Το μητρώο φόρτισης σύμφωνα με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων δίνεται από τη σχέση:

$$[P^{(My)}] = M_y[N_\psi]^T_{x=\alpha L} \Rightarrow [P^{(My)}] = M_y([R]^{-1})^T[J_\psi][f]^T_{x=\alpha L} \tag{3.146}$$

Τα μητρώα [f], [R], $[J_\psi]$ δίνονται από τις σχέσεις (3.75α), (3.73), και (3.77β) αντίστοιχα στην περίπτωση που γίνεται χρήση αλγεβρικών συναρτήσεων παρεμβολής.

3.5.3.2. Δοκός Euler – Bernoulli

3.5.3.2α. Μέθοδος Α'

Και στην περίπτωση αυτή ισχύουν οι σχέσεις (3.137), (3.138) οι οποίες είναι ανεξάρτητες της εξωτερικής φόρτισης. Με βάση τις σχέσεις αυτές και ακολουθώντας την διαδικασία που περιγράφηκε στις προηγούμενες παραγράφους προκύπτει η μητρωϊκη σχέση που συνδέει τα μεγέθη μετακίνησης και έντασης για x>αL με τις αρχικές παραμέτρους. Η σχέση αυτή είναι ανάλογη της (3.143) με τη διαφορά ότι στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα $[y(x-\alpha L)]^T$ είναι:

$$\left[y(x-\alpha L)\right]^T = \left[W_5(x-\alpha L) \vdots W_5'(x-\alpha L) \vdots W_{k5}(x-\alpha L) \vdots V_5(x-\alpha L) \vdots M_5(x-\alpha L) \vdots V_{G5}(x-\alpha L)\right] \tag{3.147}$$

Το σύστημα εξισώσεων από το οποίο προσδιορίζονται οι αρχικές παράμετροι V_0, M_0, V_{G0} είναι:

$$\begin{bmatrix} W_{4L}' - \dfrac{M_{4L}}{K_{\Phi A}} & \dfrac{M_{2L}}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}} - \dfrac{W_{2L}'}{K_{\Phi A}} - \dfrac{M_{5L}}{K_{\Phi B}} + W_{5L}' & W_{6L}' - \dfrac{M_{6L}}{K_{\Phi B}} \\ W_{4L} & W_{5L} - \dfrac{W_{2L}}{K_{\Phi A}} & W_{6L} \\ W_{k4L} & W_{k5L} - \dfrac{W_{k2L}}{K_{\Phi A}} & W_{k6L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ M_0 \\ V_{G0} \end{bmatrix} = M_y \begin{bmatrix} \dfrac{M_5[L(1-\alpha)]}{K_{\Phi B}} - W_5'[L(1-\alpha)] \\ -W_5[L(1-\alpha)] \\ -W_{k5}[L(1-\alpha)] \end{bmatrix} \tag{3.148}$$

Μετά την επίλυση του παραπάνω συστήματος είναι δυνατός ο σχηματισμός του μητρώου φόρτισης με βάση τα όσα εκτέθηκαν στην Παράγραφο 3.5.2.2α.

3.5.3.2β. Μέθοδος Β'

Το μητρώο φόρτισης σύμφωνα με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων δίνεται από τη σχέση:

$$\left[P^{(My)}\right] = M_y\left[N_w'\right]_{x=\alpha L}^T \Rightarrow \left[P^{(My)}\right] = M_y\left(\left[R\right]^{-1}\right)^T\left[f'\right]_{x=\alpha L}^T \tag{3.149}$$

Όπου το μητρώο [f΄] είναι το μητρώο των πρώτων παραγώγων των συναρτήσεων παρεμβολής. Υπενθυμίζεται ότι τα μητρώα [R], [f] δίνονται από τις σχέσεις (3.94), (3.96α) όταν γίνεται χρήση αλγεβρικών συναρτήσεων παρεμβολής.

3.5.4. Ανομοιόμορφη θερμοκρασιακή μεταβολή Δt

Η ανομοιόμορφη μεταβολή θερμοκρασίας $\Delta t = t_u - t_o$ μεταξύ της άνω και της κάτω ίνας της διατομής (Σχήμα 3.10) έχει διπλή επιρροή στην εντατική κατάσταση του στοιχείου. Πιο συγκεκριμένα η θερμοκρασιακή κατάσταση μπορεί να θεωρηθεί ότι συντίθεται από μια ομοιόμορφη θερμοκρασιακή μεταβολή t_m η οποία είναι η θερμοκρασία του κεντροβαρικού άξονα, και από τη θερμοκρασιακή μεταβολή Δt΄ η οποία είναι κατ' απόλυτη τιμή ίση με την Δt αλλά διατηρεί τον κεντροβαρικό άξονα, χωρίς θερμοκρασιακή μεταβολή. Η σταθερή θερμοκρασιακή μεταβολή t_m προκαλεί ομοιόμορφη αξονική μήκυνση ή βράχυνση. Όταν η παραμόρφωση αυτή εμποδίζεται εμφανίζονται αξονικές δυνάμεις στα άκρα του στοιχείου.

Η ανομοιόμορφη θερμοκρασιακή μεταβολή Δt΄=Δt προκαλεί καμπύλωση στην περίπτωση βέβαια κατά την οποία τα άκρα του στοιχείου έχουν τη δυνατότητα στροφής όπως συμβαίνει στην μελετούμενη περίπτωση λόγω της ύπαρξης των στροφικών ελατηρίων. Η δυνατότητα στροφής που απορρέει από την ύπαρξη των στροφικών ελατηρίων προκαλεί μείωση της αναπτυσσόμενης έντασης σε σχέση με την ένταση

που θα αναπτύσσονταν σε ένα αμφίπακτο στοιχείο (στην οριακή περίπτωση αμφιέρειστου στοιχείου η ένταση είναι μηδενική). Ταυτόχρονα όμως η δυνατότητα μερικής στροφής των άκρων του στοιχείου οδηγεί στην εμφάνιση κατακορύφων μετακινήσεων, και κατά συνέπεια την εμφάνιση αντιδράσεων από το ελαστικό υπόβαθρο. Επομένως η τελική αναπτυσσόμενη ένταση είναι το αποτέλεσμα της μερικής εμπόδισης της στροφής των άκρων του στοιχείου αλλά και των κατανεμημένων αντιδράσεων που προκαλούνται από την παραμόρφωση του ελαστικού υποβάθρου.

Στην παρούσα παράγραφο θα σχηματιστούν τα μητρώα φόρτισης που αντιστοιχούν στην ανομοιόμορφη μεταβολή Δt, ενώ η επιρροή της ομοιόμορφης μεταβολής t_m θα εξεταστεί με σχετικό σχόλιο στην Παράγραφο 3.6.4.2 όπου γίνεται αναφορά στις αξονικές παραμορφώσεις του στοιχείου.

Στην περίπτωση που το στοιχείο υπόκειται σε ανομοιόμορφη μεταβολή θερμοκρασίας Δt, ισχύουν οι ομογενείς διαφορικές εξισώσεις (3.8α) και (3.8β) για την περίπτωση της δοκού Timoshenko, και οι σχέσεις (3.17α) και (3.17β) για την περίπτωση της δοκού Euler – Bernoulli. Επειδή όμως η ανομοιόμορφη μεταβολή θερμοκρασίας Δt είναι καταναγκασμός, οι σχέσεις που δίνουν τις καμπτικές ροπές, αντί των (3.59α) και (3.86α), είναι:

1. Δοκός Timoshenko

$$M(x) = EI\left(\frac{d\psi}{dx} + \frac{\alpha\Delta t}{h}\right) \tag{3.150α}$$

2. Δοκός Euler – Bernoulli

$$M(x) = EI\left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{\alpha\Delta t}{h}\right) \tag{3.150β}$$

Όπου α είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του υλικού του στοιχείου, Δt είναι η θερμοκρασιακή μεταβολή μεταξύ άνω και κάτω ίνας του στοιχείου (Σχήμα 3.10), και h το ύψος της διατομής.

Παρακάτω θα παρουσιαστεί η διαδικασία σχηματισμού των μητρώων φόρτισης, τόσο με την ακριβή μέθοδο (Μέθοδος Α’), όσο και με την προσεγγιστική (Μέθοδος Β’).

3.5.4.1. Δοκός Timoshenko

3.5.4.1α. Μέθοδος Α’

Όπως τονίστηκε και στην εισαγωγή της παρούσας παραγράφου, η κάμψη της δοκού Timoshenko υπό την επήρεια ανομοιόμορφης θερμοκρασιακής μεταβολής Δt διέπεται από τις ομογενείς διαφορικές εξισώσεις (3.8α) και (3.8β) αλλά και τη σχέση (3.10). Επομένως οι ακριβείς λύσεις των εξισώσεων αυτών δίνονται από τις σχέσεις (3.62α), (3.62β) και (3.62γ). Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι οι (3.108α,β,γ) και (3.109α,β,γ). Από τις συνοριακές συνθήκες αυτές και κάνοντας εφαρμογή της σχέσης (3.150α) για τον υπολογισμό των ροπών κάμψης M(x), προκύπτει το παρακάτω γραμμικό σύστημα έξι εξισώσεων, από το οποίο υπολογίζονται οι σταθερές ολοκλήρωσης $C'_1 - C'_6$ των (3.62α), (3.62β) και (3.62γ):

$$[F_{\Delta t}][C'] = [V_{\Delta t}] \tag{3.151}$$

όπου το μητρώο $[F_{\Delta t}]$ δίνεται από τη σχέση (3.111) καθώς $[F_{\Delta t}] \equiv [F_{Tr}]$, ενώ το διάνυσμα $[V_{\Delta t}]$ είναι:

$$[V_{\Delta t}]^T = \left[0 \;\vdots\; \frac{EI\alpha\Delta t}{hK_{\Phi A}} \;\vdots\; 0 \;\vdots\; 0 \;\vdots\; -\frac{EI\alpha\Delta t}{hK_{\Phi B}} \;\vdots\; 0 \right] \tag{3.152}$$

Υπενθυμίζεται ότι οι συναρτήσεις f_{iw}, $f_{i\psi}$, f_i, καθώς και οι παράγωγοι τους που υπεισέρχονται στο μητρώο $[F_{\Delta t}]$, μπορούν να λάβουν μορφές που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις λύσης που είναι δυνατό να λάβουν τόσο οι εξισώσεις (3.7α), (3.7β) της θεωρίας β' τάξης, όσο και οι εξισώσεις (3.11α), (3.11β), της θεωρίας α' τάξης. Η επίλυση του συστήματος (3.151) οδηγεί στον προσδιορισμό των σταθερών ολοκλήρωσης, και έτσι από τις σχέσεις (3.150α), (3.59β) και (3.59γ) είναι δυνατός ο σχηματισμός του ζητουμένου μητρώου φόρτισης:

$$\left[P^{(\Delta t)}\right]^T = \left[V^{(\Delta t)}(0) \;\vdots\; M^{(\Delta t)}(0) \;\vdots\; V_G^{(\Delta t)}(0) \;\vdots\; V^{(\Delta t)}(L) \;\vdots\; M^{(\Delta t)}(L) \;\vdots\; V_G^{(\Delta t)}(L)\right] \tag{3.153}$$

3.5.4.1β. Μέθοδος Β'

Ο σχηματισμός του μητρώου φόρτισης με βάση τη Β' μέθοδο θα πραγματοποιηθεί ξεκινώντας από την γενική σχέση υπολογισμού της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης του συστήματος δοκός – ελαστικό υπόβαθρο:

$$\pi_T = \frac{1}{2}\int_0^L \left[M\kappa + Q\beta + V_G w_k' - P(w')^2 + c(w_c)^2 + k(w_k)^2 - qw\right]dx \tag{3.154}$$

Στην παραπάνω σχέση, από την οποία προκύπτει η σχέση 3.1, κ είναι η καμπυλότητα της δοκού ενώ η εξήγηση των υπολοίπων όρων δίνεται στην Παράγραφο 3.2.2.1. (Πρέπει επίσης να διευκρινιστεί ότι το Q είναι η τέμνουσα δύναμη του στοιχείου που δρα εντός του επιπέδου της διατομής, και όχι η κατακόρυφη δύναμη V που εισάγεται σε όλους υπολογισμούς που προηγήθηκαν).

Για τον σχηματισμό τόσο των μητρώων δυσκαμψίας όσο και των μητρώων φόρτισης που προηγήθηκαν έγινε χρήση της σχέσης κ=M/(EI)=(dψ/dx). Ωστόσο για την συγκεκριμένη περίπτωση όπου το ζητούμενο είναι ο σχηματισμός του μητρώου φόρτισης λόγω ανομοιόμορφης μεταβολής θερμοκρασίας λόγω ενός εσωτερικού καταναγκασμού δηλαδή, η σχέση υπολογισμού των ροπών κάμψης είναι η (3.150α).

Επομένως ο όρος της σχέσης (3.154), (Mκ) που εκφράζει το έργο των καμπτικών ροπών παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\int_0^L (M\kappa)dx \Rightarrow \int_0^L \left[EI\left(\kappa + \frac{\alpha\Delta t}{h}\right)\kappa\right]dx \Rightarrow \int_0^L EI\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 dx + \int_0^L \left(\frac{\alpha EI\Delta t}{h}\right)\frac{d\psi}{dx}dx \tag{3.155α}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (3.83α) και (3.83γ), η (3.155α) λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$\int_0^L (M\kappa)dx \Rightarrow [u]^T\left(\int_0^L EI[B_b]^T[B_b]dx\right)[u] + \left(\int_0^L \left(\frac{\alpha EI\Delta t}{h}\right)[B_b]dx\right)[u] \tag{3.155β}$$

Στην παραπάνω σχέση ο πρώτος όρος είναι το τμήμα του μητρώου δυσκαμψίας που αντιστοιχεί στην καμπτική παραμόρφωση του στοιχείου (βλέπε και Παράγραφο 3.4.1.1β), ενώ ο δεύτερος είναι το μητρώο φόρτισης λόγω της ανομοιόμορφης μεταβολής θερμοκρασίας Δt:

$$\left[P^{(\Delta t)}\right]^T = \int_0^L \left(\frac{\alpha EI\Delta t}{h}\right)[B_b]dx \Rightarrow \left[P^{(\Delta t)}\right]^T = \frac{\alpha\Delta t}{h}\int_0^L EI\left(\frac{d}{dx}[f]\right)[J_\psi]^T[R]^{-1}dx \tag{3.156}$$

Για το σχηματισμό της παραπάνω σχέσης έγινε χρήση της (3.79γ). Τα μητρώα [f], [R], $[J_\psi]$ δίνονται από τις σχέσεις (3.75α), (3.73), και (3.77β) αντίστοιχα στην περίπτωση που γίνεται χρήση αλγεβρικών συναρτήσεων παρεμβολής.

3.5.4.2. Δοκός Euler – Bernoulli

3.5.4.2α. Μέθοδος Α'

Η κάμψη της δοκού Timoshenko υπό την επίδραση ανομοιόμορφης θερμοκρασιακής μεταβολής Δt, διέπεται από τις ομογενείς διαφορικές εξισώσεις (3.17α) και (3.17β) οι ακριβείς λύσεις των οποίων έχουν τη μορφή των (3.88γ, δ). Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι οι (3.117α, β, γ) και (3.117α, β, γ). Από τις συνοριακές συνθήκες αυτές και κάνοντας εφαρμογή της σχέσης (3.151α) για τον υπολογισμό των ροπών κάμψης M(x), προκύπτει γραμμικό σύστημα έξι εξισώσεων ανάλογο του συστήματος που δίνεται από τη (3.151), από το οποίο υπολογίζονται οι σταθερές ολοκλήρωσης $C'_1 - C'_6$. Στο σύστημα αυτό, το μητρώο $[F_{\Delta t}]$ δίνεται από τη σχέση (3.119) καθώς $[F_{\Delta t}] \equiv [F_{Tr}]$, ενώ το διάνυσμα $[V_{\Delta t}]$ από τη σχέση (3.152). Κατά τα λοιπά η διαδικασία σχηματισμού του μητρώου φόρτισης είναι ανάλογη με αυτή που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 3.5.4.1α.

3.5.4.2β. Μέθοδος Β'

Και στην περίπτωση της δοκού Euler – Bernoulli ισχύει το σκεπτικό με βάση το οποίο σχηματίστηκε το αντίστοιχο μητρώο για τη δοκό Timoshenko. Επομένως το μητρώο φόρτισης για την παρούσα περίπτωση δίνεται από τη σχέση:

$$\left[P^{(\Delta t)}\right]^T = \frac{\alpha \Delta t}{h} \int_0^L EI \left(\frac{d^2}{dx^2} [f] \right) [R]^{-1} dx \tag{3.157}$$

Τα μητρώα [R], [f] δίνονται από τις σχέσεις (3.94), (3.96α) όταν γίνεται χρήση αλγεβρικών συναρτήσεων παρεμβολής. Εάν γίνει χρήση των συναρτήσεων που αποτελούν την αναλυτική λύση των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος, τα αντίστοιχα μητρώα εξαρτώνται από τη μορφή λύσης των εξισώσεων αυτών.

3.6. Γενίκευση των μητρώων δυσκαμψίας και φόρτισης – Εισαγωγή του νέου στοιχείου

3.6.1. Εισαγωγή

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστεί το γενικευμένο στοιχείο δοκού σχήματος 3.11. Το νέο αυτό στοιχείο στηρίζεται στην γενίκευση των μητρώων δυσκαμψίας και φόρτισης που σχηματίστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους. Η γενίκευση θα πραγματοποιηθεί σε τρία στάδια:

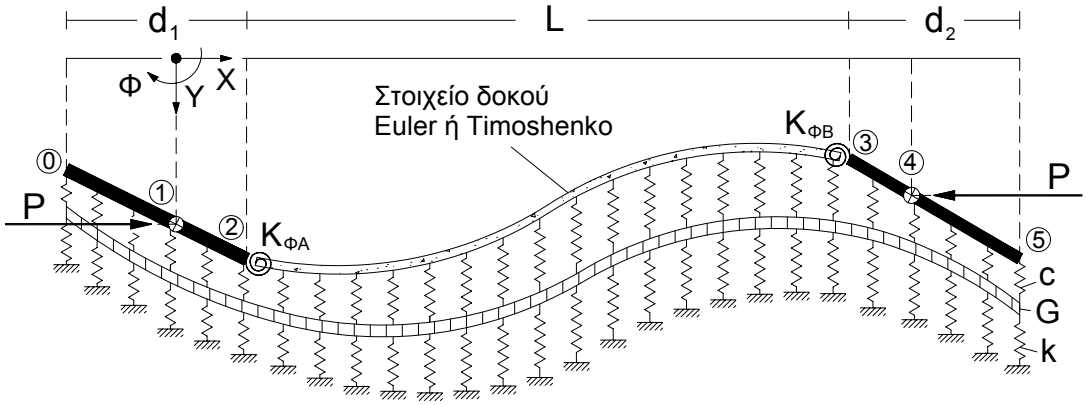
- Κατά το πρώτο στάδιο (Παράγραφος 3.6.2) θα σχηματιστούν τα μητρώα δυσκαμψίας και φόρτισης για το στοιχείο του σχήματος 3.11.
- Στο δεύτερο στάδιο (Παράγραφος 3.6.3.) θα παρουσιαστεί η μέθοδος με την οποία είναι δυνατή η θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου τόσο κατά τη διαμήκη όσο και κατά την εγκάρσια διεύθυνση.
- Τέλος (Παράγραφος 3.6.4.) θα γίνει επέκταση του στοιχείου στο χώρο ενσωματώνοντας επιπλέον τόσο τους αξονικούς όσο και τους στρεπτικούς βαθμούς ελευθερίας σε συνδυασμό με τη θεώρηση αξονικής και στρεπτικής ελαστικής έδρασης.

3.6.2. Προσθήκη ακάμπτων βραχιόνων και στροφικών ελατηρίων

Στην παράγραφο αυτή θα αναπτυχθεί το μητρώο δυσκαμψίας για το νέο στοιχείο δοκού. Το στοιχείο αυτό, του οποίου οι κόμβοι είναι τοποθετημένοι στα σημεία 1 και 4, αποτελείται από 3 τμήματα (Σχήμα 3.11):

- Το τμήμα μεταξύ των κόμβων (0) και (2) που είναι απολύτως στερεό (δηλαδή EF, EI, GF΄→∞),
- Το τμήμα μεταξύ των κόμβων (2) και (3) με EI, GF΄=πεπ. και EF→∞, και,
- Το τμήμα μεταξύ των κόμβων (3) και (5) που είναι επίσης απολύτως στερεό.

Η σύνδεση του τμήματος (2-3) με τα τμήματα (0-2) και (3-5) υλοποιείται μέσω στροφικών ελατηρίων, με ελατηριακές σταθερές $K_{ΦA}$, $K_{ΦB}$ αντιστοίχως. Καθ' όλο το μήκος του το στοιχείο εδράζεται επάνω σε ελαστικό υπόβαθρο τριών παραμέτρων με παραμέτρους k, c, G. Το στοιχείο φορτίζεται και από στατική αξονική (εφελκυστική ή θλιπτική) δύναμη P, η οποία θεωρείται ότι δρα στους κόμβους (1) και (4). Τα τμήματα των βραχιόνων (0 – 1) και (4 – 5) θεωρούνται αξονικώς αφόρτιστα.



Σχήμα 3.11. Το νέο γενικευμένο πεπερασμένο στοιχείο δοκού επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων.

Οι βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου είναι – σύμφωνα με τις παραδοχές του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων – η συνολική κατακόρυφη μετατόπιση w, η συνιστώσα της κατακόρυφης μετατόπισης που οφείλεται στην παραμόρφωση της κάτω στρώσης των ελατηρίων w_k (Σχέση 3.1), και η γωνία στροφής φ (Σχήμα 3.12). Οι βαθμοί ελευθερίας δεν αναφέρονται στους κόμβους (0) και (5) οι οποίοι βρίσκονται στα άκρα του στοιχείου, αλλά στους κόμβους (1) και (4), οι οποίοι βρίσκονται στο εσωτερικό των στερεών βραχιόνων. Οι θέσεις των κόμβων (1) και (4) εντός των βραχιόνων είναι μεταβλητές και αποτελούν παραμέτρους του στοιχείου (παράμετροι ξ_1, ξ_2). Ο λόγος για τη θεώρηση των βοηθητικών κόμβων (0) και (5) συνίσταται στη δυνατότητα που προσδόθηκε στο στοιχείο να λαμβάνει αυτόματα υπόψη την επιρροή των εξωτερικών πτερυγίων των ακριανών πεδίλων.

3.6.2.1. Σχηματισμός των μητρώων δυσκαμψίας

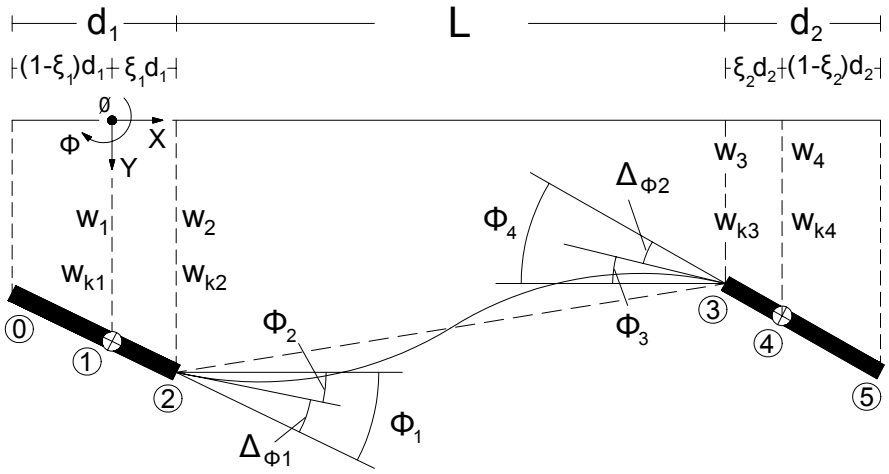
Για το σχηματισμό του μητρώου δυσκαμψίας του νέου στοιχείου θεωρείται ως δεδομένο το αντίστοιχο μητρώο του εσωτερικού τμήματος το οποίο αναπτύχθηκε στις προηγούμενες παραγράφους. Ο σχηματισμός του μητρώου δυσκαμψίας θα γίνει με γενικό τρόπο, χωρίς να ληφθεί υπόψη αν το εσωτερικό του στοιχείου αναφέρεται σε δοκό Timoshenko ή Euler. Στα σημεία που η θεώρηση της μιας ή της άλλης περίπτωσης διαφοροποιεί την πορεία των υπολογισμών ή απαιτεί κάποια διευκρίνιση θα παρατίθεται σχετικό σχόλιο. Η κατάστρωση των εξισώσεων ισορροπίας θα γίνει στην παραμορφωμένη κατάσταση (Θεωρία β' τάξης).

Ο σχηματισμός του μητρώου δυσκαμψίας θα στηριχθεί στον συσχετισμό των συντελεστών του μητρώου δυσκαμψίας του εσωτερικού τμήματος του στοιχείου, που είναι γνωστό, με τους συντελεστές του νέου στοιχείου. Ο συσχετισμός αυτός θα πραγματοποιηθεί σε δυο στάδια:

- Στο πρώτο στάδιο θα σχηματιστούν οι εξισώσεις που συνδέουν τους βαθμούς ελευθερίας των εσωτερικών – βοηθητικών κόμβων του (2), (3) του στοιχείου με τους αντίστοιχους βασικούς κόμβους (1) και (4). Κατά τη συσχέτιση αυτή θα ληφθεί υπόψη και η επιρροή των στροφικών ελατηρίων που βρίσκονται στους εσωτερικούς κόμβους.
- Στο δεύτερο στάδιο θα σχηματιστούν οι εξισώσεις που συνδέουν τα εντατικά μεγέθη που δρουν στους εσωτερικούς κόμβους (2) και (3) – και αποτελούν τους συντελεστές του μητρώου δυσκαμψίας του εσωτερικού τμήματος – με τα ζητούμενα εντατικά μεγέθη των κόμβων (1) και (4). Θα πρέπει να τονιστεί ότι για τον υπολογισμό των εντατικών αυτών μεγεθών θα συνυπολογιστεί και η ένταση που μεταβιβάζεται στους κόμβους (1) και (4) από τα τμήματα των βραχιόνων (0 – 1) και (4 – 5) αντίστοιχα. Τα τμήματα αυτά δέχονται την φόρτιση – αντίδραση του εδάφους και θεωρούνται αξονικώς αφόρτιστα.

Συσχέτιση των βαθμών ελευθερίας

Κατά το στάδιο αυτό θα σχηματιστούν οι σχέσεις που συνδέουν τις μετακινήσεις – βαθμούς ελευθερίας των βοηθητικών κόμβων (2) ήτοι w_2, w_{k2}, φ_2 και (3) ήτοι w_3, w_{k3}, φ_3, με τις μετακινήσεις των βασικών κόμβων (1) ήτοι w_1, w_{k1}, φ_1 και (4) ήτοι w_4, w_{k4}, φ_4 αντίστοιχα (Σχήμα 3.12).



Σχήμα 3.12. Οι βαθμοί ελευθερίας του νέου στοιχείου.

Έχοντας ως δεδομένες τις σχέσεις μέσω των οποίων προσδιορίζονται οι κατακόρυφες μετακινήσεις w, w_k στο εσωτερικό τμήμα του στοιχείου (2 – 3), το πρώτο βήμα στην διαδικασία σχηματισμού των σχέσεων μεταξύ των βαθμών ελευθερίας των βασικών και των βοηθητικών κόμβων αποτελεί ο προσδιορισμός των σχέσεων που διέπουν τις κατακόρυφες μετακινήσεις των ακάμπτων βραχιόνων (0 – 2) και (3 – 5).

Όπως έχει αποδειχθεί, (σχέσεις 3.6β και 3.15β), η εξίσωση η οποία συνδέει τα μεγέθη w, w_k μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή:

$$\frac{d^2 w_k}{dx^2} - \frac{c}{G}\left(1+\frac{k}{c}\right)w_k = -\left(\frac{c}{G}\right)w \tag{3.158}$$

Καθώς οι βραχίονες είναι απολύτως στερεοί, η εξίσωση της συνολικής κατακόρυφης μετακίνησης w του βραχίονα (0 – 2) είναι:

$$w(x) = w_1 + \left(\frac{w_2 - w_1}{\xi_1 d_1}\right)x \Leftrightarrow w(x) = w_1 + \varphi_1 x \tag{3.159}$$

Η λύση της (3.158) λαμβάνοντας υπόψη την (3.159) είναι:

$$w_k(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} + \left(\frac{c}{k+c}\right)\left[w_1 + \left(\frac{w_2 - w_1}{\xi_1 d_1}\right)x\right] \quad \left[-(1-\xi_1)d_1 \le x \le \xi_1 d_1\right] \tag{3.160}$$

Όπου:

$$\lambda = \sqrt{\frac{c}{G}\left(1+\frac{k}{c}\right)} \tag{3.161}$$

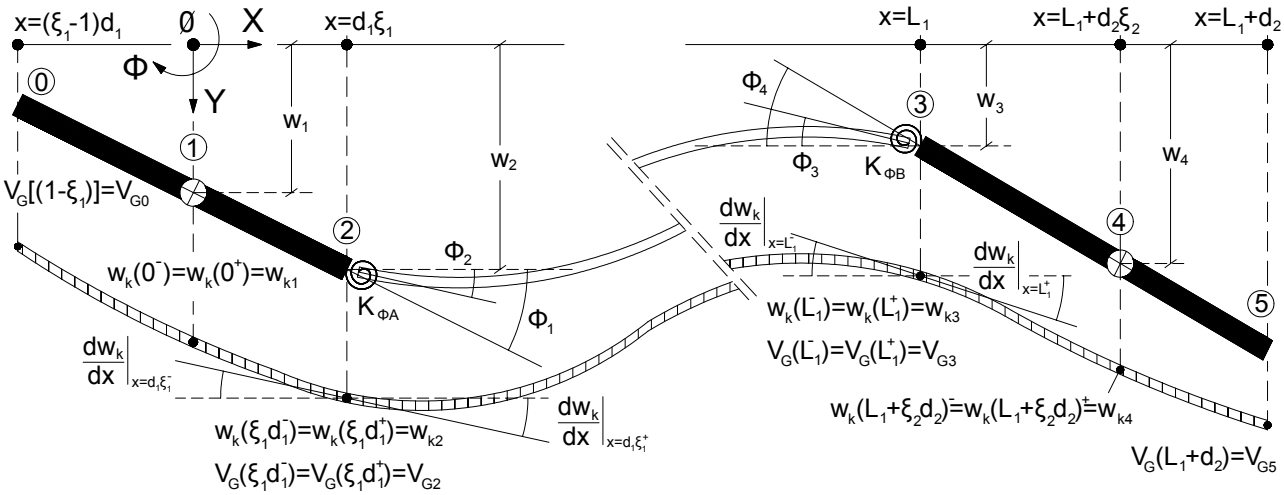
Οι σταθερές ολοκλήρωσης ορίζονται διαφορετικά στο τμήμα (0 – 1) και διαφορετικά στο τμήμα (1 – 2). Το γεγονός αυτό οφείλεται στην τοποθέτηση του βασικού κόμβου (1) στο εσωτερικό του βραχίονα ο οποίος χωρίζει το βραχίονα σε δυο τμήματα.

Για τον προσδιορισμό των σταθερών C_1, C_2 στο τμήμα (0 – 1), οι απαιτούμενες συνοριακές συνθήκες ορίζονται στους κόμβους (0) και (1):

$$w_k\left(x=0^-\right)=w_k\left(x=0^+\right)=w_{k1} \tag{3.162α}$$

$$\left.\frac{dw_k}{dx}\right|_{x=-(1-\xi_1)d_1}=\frac{dw_{k0}}{dx}\Leftrightarrow V_G\left[x=(1-\xi_1)d_1\right]=V_{G0} \tag{3.162β}$$

Η (3.162α) εξασφαλίζει τη συνέχεια των κατακόρυφων μετακινήσεων του διατμητικού στρώματος w_k στον κόμβο (1) (Σχήμα 3.13). Όσον αφορά την (3.162β) πρέπει να τονιστεί ότι στην περίπτωση κατά την οποία δεν λαμβάνεται υπόψη η επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου, τότε $V_{G0}=0$. Ωστόσο, όταν ληφθεί υπόψη η επιρροή αυτή, η τιμή του V_{G0} είναι μη μηδενική, όπως θα δειχθεί αναλυτικά στην Παράγραφο 3.6.3.1. Επειδή η κατάστρωση των εξισώσεων του στοιχείου θα γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι δυνατή η θεώρηση ή όχι της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου, θα θεωρηθεί ότι $V_{G0}\neq 0$.



Σχήμα 3.13. Οι συνοριακές συνθήκες των κόμβων των στερεών βραχιόνων.

Οι συνοριακές συνθήκες για τον προσδιορισμό των σταθερών ολοκλήρωσης της (3.160) στο τμήμα (1 – 2) ορίζονται στον βοηθητικό κόμβο (2) (Σχήμα 3.13). Στον κόμβο αυτό, παρά το ότι ο παραμορφωμένος άξονας του στοιχείου εμφανίζει γόνατο λόγω της ύπαρξης του στροφικού ελατηρίου, το διατμητικό στρώμα παραμένει συνεχές (όσον αφορά την παραμόρφωση του) αφού η άνω στρώση των ελατηρίων του μεταβιβάζει συνεχές – χωρίς τοπικές εξάρσεις – φορτίο. Επομένως οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$w_k\left(x=\xi_1 d_1^-\right)=w_k\left(x=\xi_1 d_1^+\right)=w_{k2} \tag{3.163α}$$

$$\left.\frac{dw_k}{dx}\right|_{x=\xi_1 d_1^-}=\left.\frac{dw_k}{dx}\right|_{x=\xi_1 d_1^+}\Leftrightarrow V_G\left(x=\xi_1 d_1^-\right)=V_G\left(x=\xi_1 d_1^+\right)=V_{G2} \tag{3.163β}$$

Οι συνοριακές συνθήκες (3.162α,β) και (3.163α,β) ορίζουν δυο συστήματα εξισώσεων από τα οποία μπορούν να προσδιοριστούν σε πρώτο στάδιο οι σταθερές ολοκλήρωσης, και σε δεύτερο οι εκφράσεις που δίνουν τις κατακόρυφες μετακινήσεις του διατμητικού στρώματος w_k στα δυο τμήματα του βραχίονα (0 – 2):

Τμήμα (0 – 1)

$$w_k(x)=\frac{c}{c+k}\left[1-\frac{\cosh[\lambda[x+d_1(1-\xi_1)]]}{\cosh[\lambda d_1(1-\xi_1)]}\right]w_1+\left[\frac{\cosh[\lambda[x+d_1(1-\xi_1)]]}{\cosh[\lambda d_1(1-\xi_1)]}\right]w_{k1}+\frac{1}{G\lambda}\left[\frac{\sinh(\lambda x)}{\cosh[\lambda d_1(1-\xi_1)]}\right]V_{G0}+$$
$$+\frac{c}{c+k}\left[x-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\sinh(\lambda x)}{\cosh[\lambda d_1(1-\xi_1)]}\right)\right]\varphi_1 \qquad (3.164\alpha)$$

Τμήμα (1 – 2)

$$w_k(x)=\cosh[\lambda(x-\xi_1 d_1)]w_{k2}+\left[\frac{\sinh[\lambda(x-\xi_1 d_1)]}{\lambda G}\right](-V_{G2})+\frac{c}{k+c}[1-\cosh[\lambda(x-\xi_1 d_1)]]w_1+$$
$$+\frac{c}{k+c}\left[x-\cosh[\lambda(x-\xi_1 d_1)]\xi_1 d_1-\frac{\sinh[\lambda(x-\xi_1 d_1)]}{\lambda}\right]\varphi_1 \qquad (3.164\beta)$$

Η εφαρμογή της σχέσης (3.164β) για x=0 δίνει:

$$w_{k2}=\frac{c}{k+c}\left[\xi_1 d_1-\frac{s_{\xi1}}{\lambda}\right]\varphi_1+\frac{c}{k+c}\left[1-\frac{1}{m_{\xi1}}\right]w_1+\left(\frac{1}{m_{\xi1}}\right)w_{k1}+\left(\frac{s_{\xi1}}{\lambda G}\right)(-V_{G2}) \qquad (3.165)$$

όπου: $s_{\xi1}=\tanh(\lambda\xi_1 d_1)$, $m_{\xi1}=\cosh(\lambda\xi_1 d_1)$, $n_{\xi1}=\sinh(\lambda\xi_1 d_1)$

Στο βραχίονα (3 – 5) οι λύσεις της (3.158) για τα τμήματα (3 – 4) και (4 – 5) είναι:

$$w_k(x)=C_3e^{\lambda(x-L_1)}+C_4e^{-\lambda(x-L_1)}+\left(\frac{c}{k+c}\right)\left[w_3+\left(\frac{w_4-w_3}{\xi_2 d_2}\right)(x-L_1)\right]\quad (L_1\le x\le L_1+\xi_2 d_2) \qquad (3.166\alpha)$$

$$w_k(x)=C_3e^{\lambda[x-(L_1+d_2\xi_2)]}+C_4e^{-\lambda[x-(L_1+d_2\xi_2)]}+\left(\frac{c}{k+c}\right)\left[w_3+\left(\frac{w_4-w_3}{\xi_2 d_2}\right)(x-L_1)\right]\quad (L_1+\xi_2 d_2\le x\le L_1+d_2) \qquad (3.166\beta)$$

όπου $L_1=L+(\xi_1 d_1)$.

Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία που παρουσιάστηκε πιο πάνω για τον βραχίονα (0 – 2), προκύπτουν οι σχέσεις που δίνουν τις κατακόρυφες μετακινήσεις του διατμητικού επιπέδου στα δυο τμήματα του βραχίονα (3 – 4) και (4 – 5):

Τμήμα (3 – 4)

$$w_k(x)=\frac{\sinh[\lambda(x-L_1)]}{\lambda G}V_{G3}+\frac{c}{k+c}[1-\cosh[\lambda(x-L_1)]]w_3+\frac{c}{k+c}\left[(x-L_1)-\frac{\sinh[\lambda(x-L_1)]}{\lambda}\right]\varphi_4+$$
$$+\cosh[\lambda(x-L_1)]w_{k3} \qquad (3.167\alpha)$$

Τμήμα (4 – 5)

$$w_k(x)=\frac{c}{c+k}\left[1-\frac{\cosh[\lambda[x-(L_1+d_2)]]}{\cosh[\lambda d_2(1-\xi_2)]}\right]w_4+\left[\frac{\cosh[\lambda[x-(L_1+d_2)]]}{\cosh[\lambda d_2(1-\xi_2)]}\right]w_{k4}+$$
$$+\frac{c}{c+k}\left[[x-(L_1+d_2\xi_2)]-\frac{\sinh[\lambda[x-(L_1+d_2\xi_2)]]}{\lambda\cosh[\lambda d_2(1-\xi_2)]}\right]\varphi_4+\left[\frac{\sinh[\lambda[x-(L_1+d_2\xi_2)]]}{G\lambda\cosh[\lambda d_2(1-\xi_2)]}\right]V_{G5} \qquad (3.167\beta)$$

Για $x=L_1+(\xi_2 d_2)$ η (3.167α) δίνει:

$$w_{k4}=m_{\xi2}w_{k3}+\frac{n_{\xi2}}{\lambda G}V_{G3}+\frac{c}{k+c}[1-m_{\xi2}]w_3+\frac{c}{k+c}\left[\xi_2 d_2-\frac{n_{\xi2}}{\lambda}\right]\varphi_4 \qquad (3.168\alpha)$$

$$w_{k3} = \left(\frac{1}{m_{\xi 2}}\right) w_{k4} + \frac{c}{k+c}\left[\frac{s_{\xi 2}}{\lambda} - \xi_2 d_2\right]\varphi_4 + \frac{c}{k+c}\left[1 - \frac{1}{m_{\xi 2}}\right] w_4 - \left(\frac{s_{\xi 2}}{\lambda G}\right) V_{G3} \tag{3.168β}$$

Όπου: $s_{\xi 2}=\tanh(\lambda\xi_2 d_2)$, $m_{\xi 2}=\cosh(\lambda\xi_2 d_2)$, $n_{\xi 2}=\sinh(\lambda\xi_2 d_2)$

Οι σχέσεις, που συνδέουν τα υπόλοιπα μεγέθη μετακίνησης των βασικών κόμβων (1), (4) με τα αντίστοιχα μεγέθη των βοηθητικών κόμβων (2), (3) είναι (Σχήμα 3.13):

$$w_2 = w_1 + \varphi_1(\xi_1 d_1) \tag{3.169α}$$

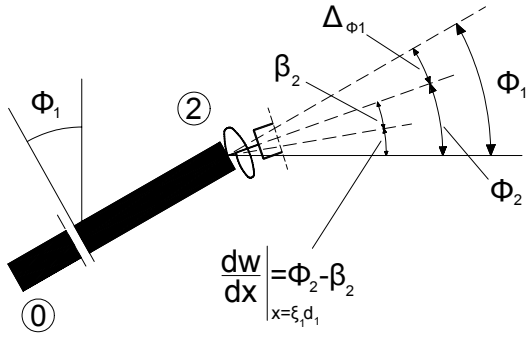
$$\varphi_2 = \varphi_1 - \Delta\varphi_1 \tag{3.169β}$$

$$w_3 = w_4 - \varphi_4(\xi_2 d_2) \tag{3.169γ}$$

$$\varphi_3 = \varphi_4 - \Delta\varphi_2 \tag{3.169δ}$$

Για την περίπτωση της δοκού Timoshenko πρέπει να τονιστεί το εξής: Ενώ στο μεσαίο τμήμα του στοιχείου, εξαιτίας της επιρροής των διατμητικών παραμορφώσεων, η κλίση της ελαστικής γραμμής dw/dx δεν ταυτίζεται με την καμπτική στροφή των διατομών φ (Σχήμα 3.14), στους απολύτως στερεούς βραχίονες του στοιχείου τα δύο αυτά μεγέθη ταυτίζονται: dw/dx≡φ. Ωστόσο, ως βαθμός ελευθερίας λαμβάνεται εδώ η καμπτική στροφή των διατομών. Η επιλογή αυτή γίνεται, επειδή το μητρώο δυσκαμψίας της δοκού Timoshenko αναπτύσσεται με θεώρηση ως βαθμών ελευθερίας των καμπτικών στροφών των διατομών και όχι της κλίσης της ελαστικής γραμμής. Με τον τρόπο αυτό προσομοιώνονται σωστά οι συνθήκες πάκτωσης όπως τονίστηκε και στην Παράγραφο 2.3.2.

Σημειώνεται, επίσης, ότι τα μεγέθη $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$ οφείλονται στο γόνατο που εμφανίζει το διάγραμμα



Σχήμα 3.14. Λεπτομέρεια του κόμβου σύνδεσης του μεσαίου τμήματος με τον απολύτως στερεό βραχίονα στην περίπτωση της δοκού Timoshenko.

των καμπτικών γωνιών στροφής των διατομών στους κόμβους (2) και (3) εξαιτίας της ύπαρξης εκεί των στροφικών ελατηρίων, και δίνονται από τις σχέσεις:

$$\Delta_{\Phi 1} = \frac{M_2}{K_{\Phi A}} \quad \text{και} \quad \Delta_{\Phi 2} = \frac{M_3}{K_{\Phi B}} \tag{3.170}$$

όπου M_2, M_3 είναι οι τιμές των ροπών κάμψης στους βοηθητικούς κόμβους (2), (3), και $K_{\Phi A}$, $K_{\Phi B}$ οι σταθερές των στροφικών ελατηρίων.

Οι σχέσεις (3.165), (3.168β) και (3.169α) – (3.169δ) μπορούν να συνοψιστούν στην παρακάτω μητρωική σχέση:

$$[u_{\varepsilon\sigma\omega\tau}] = [T][u] + [T_1][S_{\varepsilon\sigma\omega\tau}] \tag{3.171}$$

Όπου:

$$[u_{\varepsilon\sigma\omega\tau}]^T = [w_2 \;\vdots\; \varphi_2 \;\vdots\; w_{k2} \;\vdots\; w_3 \;\vdots\; \varphi_3 \;\vdots\; w_{k3}] \tag{3.172α}$$

$$[u]^T = [w_1 \vdots \varphi_1 \vdots w_{k1} \vdots w_4 \vdots \varphi_4 \vdots w_{k4}] \tag{3.172β}$$

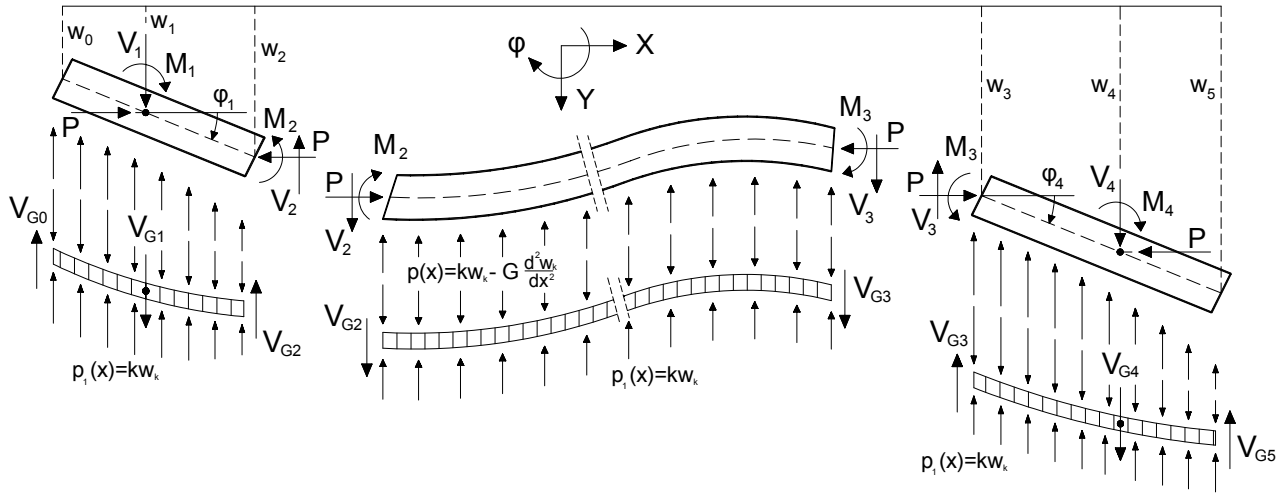
$$[S_{εσωτ}]^T = [V_2 \vdots M_2 \vdots V_{G2} \vdots V_3 \vdots M_3 \vdots V_{G3}] \tag{3.172γ}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c}{k+c}\left(1-\frac{1}{m_{\xi 1}}\right) & \frac{c}{k+c}\left(\xi_1 d_1 - \frac{s_{\xi 1}}{\lambda}\right) & \frac{1}{m_{\xi 1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\xi_2 d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c}{k+c}\left(1-\frac{1}{m_{\xi 2}}\right) & \frac{c}{k+c}\left(\frac{s_{\xi 2}}{\lambda} - \xi_2 d_2\right) & \frac{1}{m_{\xi 2}} \end{bmatrix} \tag{3.172δ}$$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{K_{ΦΑ}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{s_{\xi 1}}{\lambda G} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{K_{ΦΒ}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{s_{\xi 2}}{\lambda G} \end{bmatrix} \tag{3.172ε}$$

Συσχέτιση των μεγεθών έντασης

Στο στάδιο αυτό θα σχηματιστούν οι σχέσεις συσχέτισης των μεγεθών έντασης των βοηθητικών κόμβων (2) ήτοι V_2, M_2, V_{G2} και (3) ήτοι V_3, M_3, V_{G3}, με τα εντατικά μεγέθη των βασικών κόμβων (1) ήτοι V_1, M_1, V_{G1} και (4) ήτοι V_4, M_4, V_{G4} αντίστοιχα (Σχήμα 3.15).



Σχήμα 3.15. Η συσχέτιση των μεγεθών έντασης του εσωτερικού τμήματος του στοιχείου με τα αντίστοιχα μεγέθη των στερεών βραχιόνων.

Καταρχήν μπορούν να συσχετιστούν οι τέμνουσες δυνάμεις V_G του διατμητικού επιπέδου κάνοντας εφαρμογή των σχέσεων που σχηματίστηκαν κατά το προηγούμενο στάδιο. Όπως τονίστηκε στην Παράγραφο 3.4.1.1α η σχέση που δίνει την τέμνουσα του διατμητικού επιπέδου είναι η (3.59γ). Εφαρμόζοντας την σχέση αυτή και σχηματίζοντας τις πρώτες παραγώγους των (3.164α, β) προκύπτουν:

Τμήμα (0 – 1)

$$V_G(x)=\frac{c}{\lambda^2}\left[1-\frac{\cosh(\lambda x)}{m'_{\xi 1}}\right]\varphi_1+(G\lambda)\left[\frac{\sinh[\lambda[x+d_1(1-\xi_1)]]}{m'_{\xi 1}}\right]w_{k1}-\left(\frac{c}{\lambda}\right)\left[\frac{\sinh[\lambda[x+d_1(1-\xi_1)]]}{m'_{\xi 1}}\right]w_1+$$
$$+\left[\frac{\cosh(\lambda x)}{m'_{\xi 1}}\right]V_{G0} \qquad (3.173\alpha)$$

Τμήμα (1 – 2)

$$V_G(x)=\cosh[\lambda(x-\xi_1 d_1)]V_{G2}+(\lambda G)\sinh[\lambda(x-\xi_1 d_1)]w_{k2}-\frac{\lambda Gc}{k+c}\sinh[\lambda(x-\xi_1 d_1)]w_1+$$
$$+\frac{Gc}{k+c}[1-\cosh[\lambda(x-\xi_1 d_1)]-(\lambda\xi_1 d_1)\sinh[\lambda(x-\xi_1 d_1)]]\varphi_1 \qquad (3.173\beta)$$

όπου $m'_{\xi 1}=\cosh[\lambda d_1(1-\xi_1)]$.

Από την σχέση (3.173α) για x=0 προκύπτει:

$$V_{G1}^{\alpha\rho}=V_{G1}(x=0^-)=\frac{1}{m'_{\xi 1}}V_{G0}-\left(\frac{c}{\lambda}s'_{\xi 1}\right)w_1+(G\lambda s'_{\xi 1})w_{k1}+\frac{c}{\lambda^2}\left[1-\frac{1}{m'_{\xi 1}}\right]\varphi_1 \qquad (3.174\alpha)$$

όπου $s'_{\xi 1}=\tanh[\lambda d_1(1-\xi_1)]$.

Αντίστοιχα από την σχέση (3.173β) για x=0, αν ληφθεί υπόψη και η (3.165), προκύπτει:

$$V_{G1}^{\delta}=V_{G1}(x=0^+)=\frac{1}{m_{\xi 1}}V_{G2}-\left(\frac{c}{\lambda}s_{\xi 1}\right)w_1+(\lambda G s_{\xi 1})w_{k1}-\frac{c}{\lambda^2}\left[1-\frac{1}{m_{\xi 1}}\right]\varphi_1 \qquad (3.174\beta)$$

Η παραπάνω διαδικασία, εφαρμοζόμενη για το βραχίονα (3 – 5) οδηγεί στις παρακάτω σχέσεις:

Τμήμα (3 – 4)

$$V_G(x)=(G\lambda)\sinh[\lambda(x-L_1)]w_{k3}-\frac{c}{\lambda}\sinh[\lambda(x-L_1)]w_3+\cosh[\lambda(x-L_1)]V_{G3}+c\left[\frac{1-\cosh[\lambda(x-L_1)]}{\lambda^2}\right]\varphi_4 \qquad (3.175\alpha)$$

Τμήμα (4 – 5)

$$V_G(x)=-\frac{c}{\lambda}\left[\frac{\sinh[\lambda[x-(L_1+d_2)]]}{m'_{\xi 2}}\right]w_4+(G\lambda)\left[\frac{\sinh[\lambda[x-(L_1+d_2)]]}{m'_{\xi 2}}\right]w_{k4}+$$
$$+\frac{c}{\lambda^2}\left[1-\frac{\cosh[\lambda[x-(L_1+\xi_2 d_2)]]}{m'_{\xi 2}}\right]\varphi_4+\left[\frac{\cosh[\lambda[x-(L_1+\xi_2 d_2)]]}{m'_{\xi 2}}\right]V_{G5} \qquad (3.175\beta)$$

όπου $m'_{\xi 2}=\cosh[\lambda d_2(1-\xi_2)]$.

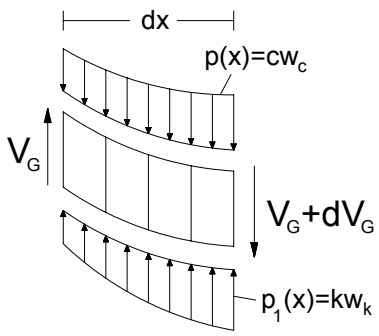
Από την (3.175α) για $x=L_1+\xi_2 d_2$, και λαμβάνοντας υπόψη τις (3.168β) και (3.169γ), προκύπτει:

$$V_{G4}^{\alpha\rho}=V_{G4}(x=L_1+\xi_2 d_2)^-=(G\lambda s_{\xi 2})w_{k4}-\left(\frac{c}{\lambda}s_{\xi 2}\right)w_4+\left(\frac{1}{m_{\xi 2}}\right)V_{G3}+\frac{c}{\lambda^2}\left[1-\frac{1}{m_{\xi 2}}\right]\varphi_4 \qquad (3.176\alpha)$$

Αντίστοιχα από την (3.175β) προκύπτει:

$$V_{G4}^{\delta} = V_{G4}\left(x = L_1 + \xi_2 d_2\right)^{+} = -\left(G\lambda s'_{\xi 2}\right)w_{k4} + \left(\frac{c}{\lambda}s'_{\xi 2}\right)w_4 + \left(\frac{1}{m'_{\xi 2}}\right)V_{G5} + \frac{c}{\lambda^2}\left[1 - \frac{1}{m'_{\xi 2}}\right]\varphi_4 \qquad (3.176\beta)$$

όπου $s'_{\xi 2}=\tanh[\lambda d_2(1-\xi_2)]$.



Σχήμα 3.16. Η ισορροπία των κατακόρυφων δυνάμεων που καταπονούν το διατμητικό επίπεδο.

Για τον σχηματισμό των σχέσεων συνδέουν τα άλλα δυο μεγέθη έντασης M, V των βασικών και βοηθητικών κόμβων θα πρέπει να καταστρωθεί η σχέση υπολογισμού της δύναμης η οποία μεταβιβάζεται από το έδαφος στο στοιχείο κατά μήκος των στερεών βραχιόνων (Σχήμα 3.15).

Η κατανεμημένη δύναμη αυτή δίνεται σύμφωνα με το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων από τη σχέση: $p(x)=cw_c$. Αντίστοιχα, η δύναμη που δέχεται το διατμητικό επίπεδο από την κάτω στρώση των ελατηρίων του προσομοιώματος είναι: $p_1(x)=kw_k$. Η συνθήκη ισορροπίας των κατακόρυφων δυνάμεων που καταπονούν το απειροστό στοιχείο του διατμητικού επιπέδου δίνει (Σχήμα 3.16):

$$kw_k - \frac{dV_G}{dx} = cw_c = p(x) \Rightarrow p(x) = kw_k - \frac{d}{dx}\left(G\frac{dw_k}{dx}\right) \Rightarrow p(x) = kw_k - G\frac{d^2 w_k}{dx^2} \qquad (3.177)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει η κατανεμημένη φόρτιση που δέχεται το στοιχείο και κατά συνέπεια, και οι βραχίονες του (0 – 2) και (3 – 5).

Ο υπολογισμός της συνεχούς εδαφικής αντίδρασης που δέχεται ο βραχίονας (0 – 2) θα γίνει χωριστά για τα τμήματα (0 – 1) και (1 – 2). Η διαδικασία αυτή θα ακολουθηθεί διότι ο σχηματισμός του μητρώου δυσκαμψίας θα γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε να διαχωρίζεται η επιρροή των δυο τμημάτων του βραχίονα στις τελικές εξισώσεις. Έτσι, εφαρμόζοντας την σχέση (3.177) σε συνδυασμό με την (3.164α) προκύπτει:

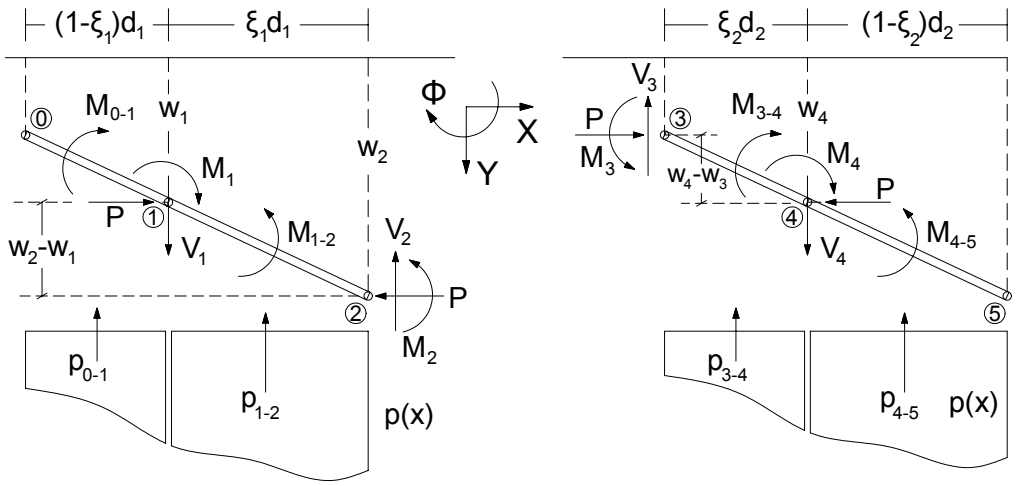
<u>Τμήμα (0 – 1)</u>

$$p(x) = \frac{c}{k+c}\left[kx + \frac{c}{\lambda}\left(\frac{\sinh(\lambda x)}{m'_{\xi 1}}\right)\right]\varphi_1 + \frac{c}{k+c}\left[k + c\frac{\cosh[\lambda(x + (1-\xi_1)d_1)]}{m'_{\xi 1}}\right]w_1 - \frac{c}{G\lambda}\left[\frac{\sinh(\lambda x)}{m'_{\xi 1}}\right]V_{G0} -$$
$$- c\left[\frac{\cosh[\lambda(x + (1-\xi_1)d_1)]}{m'_{\xi 1}}\right]w_{k1} \qquad (3.178\alpha)$$

Αντίστοιχα από την εφαρμογή της (3.177) σε συνδυασμό με την (3.164β) προκύπτει:

<u>Τμήμα (1 – 2)</u>

$$p(x) = \frac{c}{k+c}\left[kx + \frac{c}{\lambda}\left(\frac{\sinh(\lambda x)}{m_{\xi 1}}\right)\right]\varphi_1 + \frac{c}{k+c}\left[k + c\frac{\cosh[\lambda(x - \xi_1 d_1)]}{m_{\xi 1}}\right]w_1 + \frac{c}{G\lambda}\left[\frac{\sinh(\lambda x)}{m_{\xi 1}}\right](-V_{G2}) -$$
$$- c\left[\frac{\cosh[\lambda(x - \xi_1 d_1)]}{m_{\xi 1}}\right]w_{k1} \qquad (3.178\beta)$$



Σχήμα 3.17. Οι δυνάμεις που δρουν στους στερεούς βραχίονες.

Οι συνολικές κατακόρυφες αντιδράσεις που δέχονται τα τμήματα (0 – 1) και (1 – 2), προκύπτουν από την ολοκλήρωση των σχέσεων (3.178α) και (3.178β) στα τμήματα $(-(1-\xi_1)d_1,0)$ και $(0,\xi_1 d_1)$ αντίστοιχα (Σχήματα 3.13 και 3.17):

<u>Τμήμα (0 – 1)</u>: $$p_{0-1} = \int_{-[(1-\xi_1)d_1]}^{0} p(x)dx \tag{3.179α}$$

<u>Τμήμα (1 – 2)</u>: $$p_{1-2} = \int_{0}^{\xi_1 d_1} p(x)dx \tag{3.179β}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω σχέσεις σε συνδυασμό με τις (3.178α) και (3.178β) προκύπτουν:

<u>Τμήμα (0 – 1)</u>

$$p_{0-1} = \frac{c}{k+c}\left[kd_1(1-\xi_1) + \frac{c}{\lambda}s'_{\xi 1}\right]w_1 - \frac{c}{k+c}\left[\frac{1}{2}kd_1^2(1-\xi_1)^2 + \frac{c}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{m'_{\xi 1}}\right)\right]\varphi_1 - \left(\frac{c}{\lambda}s'_{\xi 1}\right)w_{k1} +$$
$$+\frac{c}{k+c}\left(1-\frac{1}{m'_{\xi 1}}\right)V_{G0} \tag{3.179γ}$$

<u>Τμήμα (1 – 2)</u>

$$p_{1-2} = \frac{c}{k+c}\left[\frac{1}{2}k(\xi_1 d_1)^2 + \frac{c}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{m_{\xi 1}}\right)\right]\varphi_1 + \frac{c}{k+c}\left[k(\xi_1 d_1) + \frac{c}{\lambda}s_{\xi 1}\right]w_1 - \left(\frac{c}{\lambda}s_{\xi 1}\right)w_{k1} -$$
$$-\frac{c}{k+c}\left(1-\frac{1}{m_{\xi 1}}\right)(-V_{G2}) \tag{3.179δ}$$

Οι ροπές των δυνάμεων p_{0-1} και p_{1-2} ως προς τον κόμβο (1) δίνονται από τις σχέσεις (Σχήματα 3.13 και 3.17):

$$M_{0-1} = \int_{-[(1-\xi_1)d_1]}^{0} xp(x)dx \tag{3.180α}$$

$$M_{1-2} = \int_{0}^{\xi_1 d_1} xp(x)dx \tag{3.180β}$$

Από τις (3.178α) και (3.180α) προκύπτει:

$$M_{0-1}=\frac{c}{k+c}\left[\frac{1}{3}kd_1^3(1-\xi_1)^3+\frac{c}{\lambda^2}\left[d_1(1-\xi_1)-\frac{s'_{\xi1}}{\lambda}\right]\right]\varphi_1-\frac{c}{k+c}\left[\frac{1}{2}kd_1^2(1-\xi_1)^2+\frac{c}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{m'_{\xi1}}\right)\right]w_1+$$

$$+\frac{c}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{m'_{\xi1}}\right)w_{k1}-\frac{c}{k+c}\left[d_1(1-\xi_1)-\frac{s'_{\xi1}}{\lambda}\right]V_{G0} \qquad (3.181\alpha)$$

όπου $n'_{\xi1}=\sinh[\lambda d_1(1-\xi_1)]$.

Αντιστοίχως από τις (3.178β) και (3.180β) προκύπτει:

$$M_{1-2}=\frac{c}{k+c}\left[\frac{1}{3}k\xi_1^3d_1^3+\frac{c}{\lambda^2}\left(\xi_1d_1-\frac{s_{\xi1}}{\lambda}\right)\right]\varphi_1+\frac{c}{k+c}\left[\frac{1}{2}k\xi_1^2d_1^2+\frac{c}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{m_{\xi1}}\right)\right]w_1-\frac{c}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{m_{\xi1}}\right)w_{k1}-$$

$$-\frac{c}{k+c}\left(\xi_1d_1-\frac{s_{\xi1}}{\lambda}\right)(-V_{G2}) \qquad (3.181\beta)$$

Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για τον βραχίονα (3 – 5). Έτσι για τη συνεχώς κατανεμημένη αντίδραση του εδάφους προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις (Σχήματα 3.13 και 3.17):

<u>Τμήμα 3 – 4</u>

$$p(x)=\frac{c}{k+c}\left[k[x-(L_1+\xi_2d_2)]+\frac{c}{\lambda}\left[\frac{\sinh[\lambda[x-(L_1+\xi_2d_2)]]}{m_{\xi2}}\right]\right]\varphi_4+\frac{c}{k+c}\left[k+c\frac{\cosh[\lambda(x-L_1)]}{m_{\xi2}}\right]w_4-$$

$$-c\frac{\cosh[\lambda(x-L_1)]}{m_{\xi2}}w_{k4}-\frac{c}{G\lambda}\left[\frac{\sinh[\lambda[x-(L_1+\xi_2d_2)]]}{m_{\xi2}}\right]V_{G3} \qquad (3.182\alpha)$$

<u>Τμήμα 4 – 5</u>

$$p(x)=\frac{c}{k+c}\left[k[x-(L_1+\xi_2d_2)]+\frac{c}{\lambda}\left[\frac{\sinh[\lambda[x-(L_1+\xi_2d_2)]]}{m'_{\xi2}}\right]\right]\varphi_4+\frac{c}{k+c}\left[k+c\frac{\cosh[\lambda[x-(L_1+d_2)]]}{m'_{\xi2}}\right]w_4-$$

$$-\left[\frac{\cosh[\lambda[x-(L_1+d_2)]]}{m'_{\xi2}}\right]w_{k4}-\frac{c}{G\lambda}\left[\frac{\sinh[\lambda[x-(L_1+\xi_2d_2)]]}{m'_{\xi2}}\right]V_{G5} \qquad (3.182\beta)$$

Οι συνολικές κατακόρυφες αντιδράσεις που δέχονται τα τμήματα (3 – 4) και (4 – 5), δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$p_{3-4}=-\frac{c}{k+c}\left[\frac{1}{2}kd_2^2\xi_2^2+\frac{c}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{m_{\xi2}}\right)\right]\varphi_4+\frac{c}{k+c}\left[\frac{c}{\lambda}s_{\xi2}+kd_2\xi_2\right]w_4-\left(\frac{c}{\lambda}s_{\xi2}\right)w_{k4}+$$

$$+\frac{c}{k+c}\left(1-\frac{1}{m_{\xi2}}\right)V_{G3} \qquad (3.183\alpha)$$

$$p_{4-5}=\frac{c}{k+c}\left[kd_2(1-\xi_2)+\frac{c}{\lambda}s'_{\xi2}\right]w_4+\frac{c}{k+c}\left[\frac{1}{2}kd_2^2(1-\xi_2)^2+\frac{c}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{m'_{\xi2}}\right)\right]\varphi_4-\left(\frac{c}{\lambda}s'_{\xi2}\right)w_{k4}-$$

$$-\frac{c}{k+c}\left(1-\frac{1}{m'_{\xi2}}\right)V_{G5} \qquad (3.183\beta)$$

Οι ροπές των δυνάμεων p_{3-4} και p_{4-5} ως προς τον κόμβο (4) δίνονται από τις σχέσεις (Σχήμα 3.17):

$$M_{3-4} = \int_{L_1}^{L_1+\xi_2 d_2} \left[x - \left(L_1 + \xi_2 d_2\right)\right] p(x) dx \tag{3.184α}$$

$$M_{4-5} = \int_{L_1+\xi_2 d_2}^{L_1+d_2} \left[\left(L_1 + \xi_2 d_2\right) - x\right] p(x) dx \tag{3.184β}$$

Από τις σχέσεις (3.182α), (3.184α) και (3.182β), (3.184β) προκύπτουν αντίστοιχα:

$$M_{3-4} = \frac{c}{k+c}\left[\frac{1}{3}kd_2^3\xi_2^3 + \frac{c}{\lambda^2}\left(\xi_2 d_2 - \frac{s_{\xi 2}}{\lambda}\right)\right]\varphi_4 - \frac{c}{k+c}\left[\frac{1}{2}kd_2^2\xi_2^2 + \frac{c}{\lambda^2}\left(1 - \frac{1}{m_{\xi 2}}\right)\right]w_4 + \frac{c}{\lambda^2}\left(1 - \frac{1}{m_{\xi 2}}\right)w_{k4} -$$

$$-\frac{c}{k+c}\left(\xi_2 d_2 - \frac{s_{\xi 2}}{\lambda}\right)V_{G3} \tag{3.185α}$$

$$M_{4-5} = \frac{c}{k+c}\left[\frac{1}{3}kd_2^3\left(1-\xi_2\right)^3 + \frac{c}{\lambda^2}\left[d_2\left(1-\xi_2\right) - \frac{s'_{\xi 2}}{\lambda}\right]\right]\varphi_4 + \frac{c}{k+c}\left[\frac{1}{2}kd_2^2\left(1-\xi_2\right)^2 + \frac{c}{\lambda^2}\left(1 - \frac{1}{m'_{\xi 2}}\right)\right]w_4 -$$

$$-\frac{c}{\lambda^2}\left(1 - \frac{1}{m'_{\xi 2}}\right)w_{k4} - \frac{c}{k+c}\left[d_2\left(1-\xi_2\right) - \frac{s'_{\xi 2}}{\lambda}\right]V_{G5} \tag{3.185β}$$

Ο σχηματισμός των συνθηκών ισορροπίας των κατακόρυφων δυνάμεων και των ροπών που δρουν επί των στερεών βραχιόνων είναι (Σχήμα 3.17):

<u>Βραχίονας 0 – 2</u>

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_1 = V_2 + p_{0-1} + p_{1-2} \tag{3.186α}$$

$$\Sigma M_z = 0 \Rightarrow M_1 = M_2 + V_2\left(\xi_1 d_1\right) + M_{1-2} - M_{0-1} - P\left(\varphi_1 \xi_1 d_1\right) \tag{3.186β}$$

$$V_{G1} = V_{G1}^{\alpha\rho} + V_{G1}^{\delta} \tag{3.186γ}$$

<u>Βραχίονας 3 – 5</u>

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_4 = V_3 + p_{3-4} + p_{4-5} \tag{3.187α}$$

$$\Sigma M_z = 0 \Rightarrow M_4 = M_3 - V_3\left(\xi_2 d_2\right) + M_{4-5} - M_{3-4} - P\left(\varphi_4 \xi_2 d_2\right) \tag{3.187β}$$

$$V_{G4} = V_{G4}^{\alpha\rho} + V_{G4}^{\delta} \tag{3.187γ}$$

Όλες οι παραπάνω συνθήκες μπορούν να γραφούν σε μητρωική μορφή ανάλογη με αυτή που σχηματίστηκε για τα μεγέθη μετακίνησης (Σχέση 3.171). Εισάγοντας στις συνθήκες ισορροπίας τις εκφράσεις των μεγεθών έντασης τα οποία υπεισέρχονται σε αυτές, προκύπτει:

$$[S] = [T]^T \left[S_{\varepsilon\sigma\omega\tau}\right] + \left\{\left[K_{\varepsilon\delta\alpha\varphi}\right] + \left[K_P\right]\right\}[u] \tag{3.188}$$

Όπου:

Το μητρώο $[T]^T$ είναι το ανάστροφο του μητρώου [T] και δίνεται από τη σχέση (3.172δ), το μητρώο $[S_{\varepsilon\sigma\omega\tau}]$ είναι το μητρώο των μεγεθών έντασης του εσωτερικού τμήματος του στοιχείου και δίνεται από τη σχέση (3.172γ), και [u] είναι το μητρώο των μετακινήσεων των βασικών κόμβων του στοιχείου (1), (4) και δίνεται από τη σχέση (3.172β).

Το μητρώο [S] είναι το μητρώο των εντατικών μεγεθών των βασικών κόμβων του στοιχείου:

$$[S]^T = [V_1 \vdots M_1 \vdots V_{G1} \vdots V_4 \vdots M_4 \vdots V_{G4}] \tag{3.189}$$

Το μητρώο $[K_{εδαφ}]$ είναι το μητρώο των δυνάμεων που δέχονται οι βραχίονες από το έδαφος. Σύμφωνα με τη λογική με την οποία σχηματίστηκαν οι εξισώσεις ισορροπίας των βραχιόνων, το μητρώο αυτό θα πρέπει να αναλυθεί σε δυο επιμέρους μητρώα τα οποία θα περιέχουν τις δυνάμεις που δέχεται το κάθε ένα από τα δυο τμήματα από τα οποία συντίθεται ο κάθε βραχίονας. Πιο συγκεκριμένα, το ένα από τα δυο μητρώα θα περιέχει τις δυνάμεις των τμημάτων των βραχιόνων που βρίσκονται εσωτερικά των βασικών κόμβων δηλαδή των τμημάτων (1 – 2) και (3 – 4) (Μητρώο $[K_{εδαφ}^{εσ}]$), ενώ το άλλο θα περιέχει τις δυνάμεις των τμημάτων (0 – 1) και (4 – 5) (Μητρώο $[K_{εδαφ}^{εξ}]$). Επομένως:

$$[K_{εδαφ}] = [K_{εδαφ}^{εσ}] + [K_{εδαφ}^{εξ}] \tag{3.190}$$

όπου:

$$[K_{εδαφ}^{εσ}] = \frac{c}{k+c}\begin{bmatrix} k\xi_1 d_1 + \frac{c}{\lambda}s_{\xi1} & \frac{1}{2}k\xi_1^2 d_1^2 + \frac{c}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{m_{\xi1}}\right) & -\lambda G s_{\xi1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}k\xi_1^2 d_1^2 + \frac{c}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{m_{\xi1}}\right) & \frac{1}{3}k\xi_1^3 d_1^3 + \frac{c}{\lambda^2}\left(\xi_1 d_1 - \frac{s_{\xi1}}{\lambda}\right) & -G\left(1-\frac{1}{m_{\xi1}}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda G s_{\xi1} & -G\left(1-\frac{1}{m_{\xi1}}\right) & \frac{\lambda^3 G^2}{c}s_{\xi1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k\xi_2 d_2 + \frac{c}{\lambda}s_{\xi2} & -\frac{1}{2}k\xi_2^2 d_2^2 - \frac{c}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{m_{\xi2}}\right) & -\lambda G s_{\xi2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}k\xi_2^2 d_2^2 - \frac{c}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{m_{\xi2}}\right) & \frac{1}{3}k\xi_2^3 d_2^3 + \frac{c}{\lambda^2}\left(\xi_2 d_2 - \frac{s_{\xi2}}{\lambda}\right) & G\left(1-\frac{1}{m_{\xi2}}\right) \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda G s_{\xi2} & G\left(1-\frac{1}{m_{\xi2}}\right) & \frac{\lambda^3 G^2}{c}s_{\xi2} \end{bmatrix} \tag{3.191α}$$

$$[K_{εδαφ}^{εσ}] = \frac{c}{k+c}\begin{bmatrix} k\xi_1' d_1 + \frac{c}{\lambda}s_{\xi1}' & -\frac{1}{2}k(\xi_1')^2 d_1^2 - \frac{c}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{m_{\xi1}'}\right) & -\lambda G s_{\xi1}' & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}k(\xi_1')^2 d_1^2 - \frac{c}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{m_{\xi1}'}\right) & \frac{1}{3}k(\xi_1')^3 d_1^3 + \frac{c}{\lambda^2}\left(\xi_1' d_1 - \frac{s_{\xi1}'}{\lambda}\right) & G\left(1-\frac{1}{m_{\xi1}'}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda G s_{\xi1}' & G\left(1-\frac{1}{m_{\xi1}'}\right) & \frac{\lambda^3 G^2}{c}s_{\xi1}' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k\xi_2' d_2 + \frac{c}{\lambda}s_{\xi2}' & \frac{1}{2}k(\xi_2')^2 d_2^2 + \frac{c}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{m_{\xi2}'}\right) & -\lambda G s_{\xi2}' \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}k(\xi_2')^2 d_2^2 + \frac{c}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{m_{\xi2}'}\right) & \frac{1}{3}k(\xi_2')^3 d_2^3 + \frac{c}{\lambda^2}\left(\xi_2' d_2 - \frac{s_{\xi2}'}{\lambda}\right) & -G\left(1-\frac{1}{m_{\xi2}'}\right) \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda G s_{\xi2}' & -G\left(1-\frac{1}{m_{\xi2}'}\right) & \frac{\lambda^3 G^2}{c}s_{\xi2}' \end{bmatrix} \tag{3.191β}$$

(Στη σχέση (3.191β) έχουν τεθεί για λόγους απλοποίησης $\xi_1' = 1-\xi_1$ και $\xi_2' = 1-\xi_2$.)

Τέλος, το μητρώο $[K_P]$ εκφράζει την επιρροή των αξονικών δυνάμεων που καταπονούν το στοιχείο:

$$[K_P] = P\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_1 d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\xi_2 d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.192}$$

Όπως είναι γνωστό, η σχέση η οποία συνδέει τις μετακινήσεις με τα εντατικά μεγέθη στα άκρα του εσωτερικού τμήματος του στοιχείου (εσωτερικοί κόμβοι 2 –3) είναι:

$$[S_{\varepsilon\sigma\omega\tau}] = [K_{\varepsilon\sigma\omega\tau}][u_{\varepsilon\sigma\omega\tau}] \tag{3.193α}$$

όπου το $[K_{\varepsilon\sigma\omega\tau}]$ είναι το μητρώο δυσκαμψίας του εσωτερικού τμήματος του στοιχείου το οποίο σχηματίστηκε στην Παράγραφο 3.4. Η αντίστοιχη σχέση για τα εντατικά μεγέθη και τα μεγέθη μετακίνησης των βασικών κόμβων του στοιχείου είναι:

$$[S] = [K][u] \tag{3.193β}$$

όπου το [K] είναι το μητρώο δυσκαμψίας του γενικευμένου στοιχείου.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.171) και (3.193α) προκύπτει:

$$[S_{\varepsilon\sigma\omega\tau}] = \{[I] - [K_{\varepsilon\sigma\omega\tau}][T_1]\}^{-1}[K_{\varepsilon\sigma\omega\tau}][T][u] \tag{3.194}$$

Ο συνδυασμός της παραπάνω σχέσης με την (3.188) δίνει:

$$[S] = [T]^T\{[I] - [K_{\varepsilon\sigma\omega\tau}][T_1]\}^{-1}[K_{\varepsilon\sigma\omega\tau}][T][u] + \{[K_{\varepsilon\delta\alpha\varphi}] + [K_P]\}[u] \tag{3.195}$$

Τέλος, η σύγκριση των σχέσεων (3.193β) και (3.195), και αν ληφθεί υπόψη και η (3.190), οδηγεί στο ζητούμενο μητρώο δυσκαμψίας:

$$[K] = [T]^T\{[I] - [K_{\varepsilon\sigma\omega\tau}][T_1]\}^{-1}[K_{\varepsilon\sigma\omega\tau}][T] + [K^{\varepsilon\sigma}_{\varepsilon\delta\alpha\varphi}] + [K^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon\delta\alpha\varphi}] + [K_P] \tag{3.196}$$

Το παραπάνω μητρώο δυσκαμψίας με τη γενική του διατύπωση ενσωματώνει τις εξής δυνατότητες:

α) της θεώρησης ή όχι των διατμητικών παραμορφώσεων του εσωτερικού του τμήματος (δοκός Euler ή Timoshenko)

β) της θεώρησης ή όχι απολύτως στερεών βραχιόνων στο ένα από τα δυο ή και στα δυο άκρα του στοιχείου,

γ) τοποθέτησης των βασικών κόμβων του στοιχείου σε οποιοδήποτε σημείο εντός του εύρους των στερεών βραχιόνων,

δ) της θεώρησης ή όχι στροφικών ελατηρίων στα σημεία σύνδεσης του εσωτερικού τμήματος του στοιχείου με τους στερεούς βραχίονες του,

ε) της θεώρησης ή όχι ελαστικού υποβάθρου μιας, δυο ή τριών παραμέτρων.

στ) της ανάλυσης είτε με βάση την θεωρία β' τάξης είτε με βάση τη θεωρία α' τάξης (οπότε αγνοείται το μητρώο $[K_P]$).

Πρέπει να διευκρινιστεί ότι το μητρώο δυσκαμψίας στην παραπάνω του μορφή δεν λαμβάνει υπόψη την επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου. Δηλαδή στις εξισώσεις του μητρώου, ετέθη $V_{G0}=0$ και $V_{G5}=0$. Η διαδικασία με την οποία λαμβάνεται υπόψη η επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου, θα παρουσιαστεί στην επόμενη παράγραφο μαζί με την κατάλληλη τροποποίηση του μητρώου (3.196), έτσι ώστε να ληφθεί υπόψη και αυτή η επιρροή.

3.6.2.2. Σχηματισμός των μητρώων φόρτισης

Στην Παράγραφο 3.5, σχηματίστηκαν τα μητρώα φόρτισης για στοιχεία δοκών Euler και Timoshenko εδραζόμενων επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων, για τις καταστάσεις φόρτισης του σχήματος 3.10. Η επέκταση των μητρώων αυτών στο γενικευμένο στοιχείο, απαιτεί μόνον τη θεώρηση των ακάμπτων βραχιόνων, καθώς ο σχηματισμός των μητρώων φόρτισης της Παραγράφου 3.5 πραγματοποιήθηκε με τη θεώρηση στροφικών ελατηρίων στα άκρα των στοιχείων.

Για το σχηματισμό των μητρώων φόρτισης του γενικευμένου στοιχείου, θα πρέπει να θεωρηθεί η ύπαρξη ή όχι εξωτερικών φορτίων επί των βραχιόνων, ειδικά για να ληφθεί υπόψη το ίδιο βάρος τους ή κάποια εξωτερική επιφόρτιση. Δεδομένου ότι το μήκος των βραχιόνων είναι κατά κανόνα μικρό και η επιρροή της ενδεχόμενης επί αυτών φόρτισης είναι επίσης μικρή, μπορεί να γίνει η παραδοχή ότι οποιαδήποτε εξωτερική φόρτιση μπορεί να αντικατασταθεί από μια συνεχώς κατανεμημένη.

Για το σχηματισμό των μητρώων φόρτισης του γενικευμένου στοιχείου μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση μετασχηματισμού των φορτίων διατομής (Σχέση 3.188). Ωστόσο, επειδή για τον σχηματισμό των μητρώων φόρτισης δεσμεύονται οι βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου, δηλαδή οι μετακινήσεις των κόμβων (1) και (4), θα πρέπει στην Σχέση (3.188) να τεθεί [u]=[0]. Επομένως, στην περίπτωση που οι στερεοί βραχίονες είναι αφόρτιστοι, το μητρώο φόρτισης δίνεται από την παρακάτω γενική σχέση ανεξαρτήτως του φορτιστικού αιτίου:

$$[P] = [T]^T [P_{\varepsilon\sigma\omega\tau}] \tag{3.197α}$$

Στην παραπάνω σχέση το [P] είναι το μητρώο των εντατικών μεγεθών των κόμβων (1) και (4) (είναι επομένως το ζητούμενο μητρώο φόρτισης), το $[P_{\varepsilon\sigma\omega\tau.}]$ είναι το μητρώο φόρτισης του εσωτερικού τμήματος το οποίο κατά περίπτωση φόρτισης δίνεται στην Παράγραφο 3.5, ενώ το μητρώο [T] δίνεται από τη Σχέση (3.172δ).

Στην περίπτωση της φόρτισης των στερεών βραχιόνων με συνεχές ομοιόμορφο φορτίο το μητρώο φόρτισης λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$[P] = [T]^T [P_{\varepsilon\sigma\omega\tau}] + [T_q] \tag{3.197β}$$

Στην παραπάνω σχέση το μητρώο $[T_q]$ εκφράζει την επιρροή των εξωτερικών φορτίων των βραχιόνων στα εντατικά μεγέθη των κόμβων (1) και (4):

$$[T_q]^T = \left[-q_1 d_1 \;\vdots\; \frac{1}{2} q_1 d_1^2 (1 - 2\xi_1) \;\vdots\; 0 \;\vdots\; -q_2 d_2 \;\vdots\; \frac{1}{2} q_2 d_2^2 (2\xi_2 - 1) \;\vdots\; 0 \right] \tag{3.198}$$

όπου το q_1 είναι η τιμή της συνεχούς φόρτισης του βραχίονα (0 – 2), και το q_2 η τιμή της αντίστοιχης φόρτισης του βραχίονα (3 – 5).

Πρέπει να τονιστεί ότι από τις σχέσεις (3.197α) και (3.172δ) προκύπτει το συμπέρασμα ότι στον μετασχηματισμό των εντατικών μεγεθών υπεισέρχονται οι σταθερές k, c, G του εδαφικού προσομοιώματος. Αυτό σημαίνει ότι αν και για την κατάστρωση των μητρώων φόρτισης θεωρείται ότι οι βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου είναι δεσμευμένοι, η παραμόρφωση του διατμητικού επιπέδου και στην περιοχή κάτω των

ακάμπτων βραχιόνων προκαλεί τη μεταβίβαση φορτίων σ' αυτούς, κάτι που δεν ισχύει στην περίπτωση του προσομοίωματος του Winkler.

Κλείνοντας, θα πρέπει να γίνει και ένα σχόλιο για το μητρώο φόρτισης λόγω ανομοιόμορφης μεταβολής θερμοκρασίας. Είναι γνωστό ότι η θερμοκρασιακές μεταβολές είναι καταναγκασμοί που προκαλούν παραμορφώσεις ανεξάρτητα από την παραδοχή ότι ένα στοιχείο είναι απολύτως στερεό ή όχι. Επομένως, και οι περιοχές των κόμβων – που προσομοιώνονται από τους απολύτως στερεούς βραχίονες – παραμορφώνονται από την μεταβολή της θερμοκρασίας. Είναι προφανές, ότι αυτή η παραμόρφωση συμβάλλει στην μεταβολή της εντατικής κατάστασης όλου του στοιχείου. Ωστόσο μέσα στα πλαίσια των παραδοχών που γίνονται για τις συνήθεις πρακτικές εφαρμογές, μια τέτοια θεώρηση κρίνεται υπερβολική. Επομένως, για τους στερεούς βραχίονες μπορεί να γίνει η παραδοχή ότι είναι θερμοκρασιακώς ατενείς και άκαμπτοι γεγονός που έχει ως συνέπεια να θεωρούνται απαραμόρφωτοι και υπό θερμοκρασιακή φόρτιση και έτσι να μην συμβάλλουν στην μεταβολή της παραμορφωσιακής κατάστασης του στοιχείου. Επειδή όμως η απουσία παραμορφώσεων δεν συνεπάγεται και την απουσία ανάπτυξης δυνάμεων στο σώμα των κόμβων, γίνεται επιπλέον η παραδοχή της αμελητέας συνεισφοράς των δυνάμεων αυτών στην εντατική κατάσταση όλου του στοιχείου. Με βάση τις παραπάνω παραδοχές, ως σχέση μετασχηματισμού των φορτίων διατομής για την περίπτωση του σχηματισμού των μητρώων φόρτισης από ανομοιόμορφη μεταβολή θερμοκρασίας Δt μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση (3.197α) η οποία αντιστοιχεί σε αφόρτιστους βραχίονες.

3.6.3. Θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου στην εγκάρσια και στην διαμήκη διεύθυνση

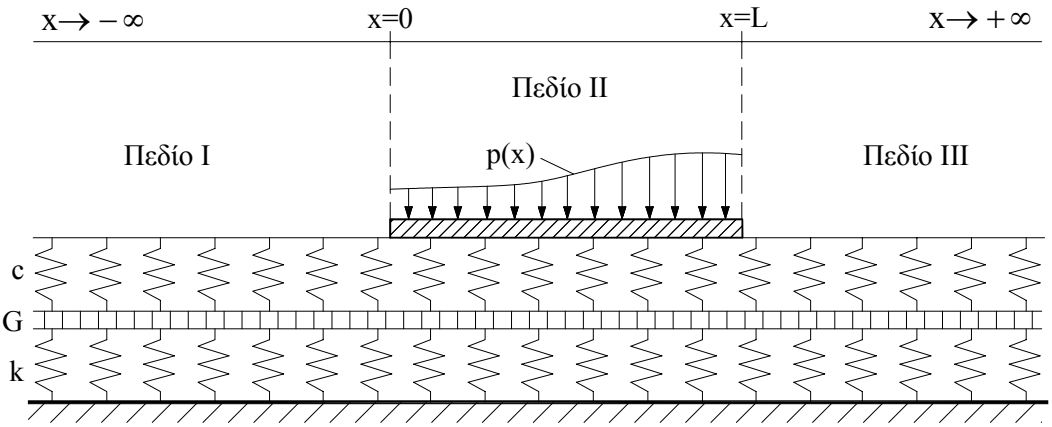
3.6.3.1. Επιρροή του εδάφους κατά την διαμήκη διεύθυνση του στοιχείου

Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων αποτελεί η δυνατότητα που παρέχει όσον αφορά τη θεώρηση ή όχι της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της κατασκευής. Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιαστεί η μέθοδος με την οποία λαμβάνεται υπόψη η παραμόρφωση του εδάφους εκατέρωθεν ενός γραμμικού στοιχείου κατά την διαμήκη διεύθυνση του, στη γενική περίπτωση. Τα συμπεράσματα που θα προκύψουν από την ανάλυση αυτή θα εφαρμοστούν στις εξισώσεις του νέου στοιχείου που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Με τον τρόπο αυτό θα προκύψει ένα νέο μητρώο δυσκαμψίας το οποίο θα ενσωματώνει όλες εκείνες τις ιδιότητες που εκτέθηκαν στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου (Σχέση 3.196), και επιπλέον τη δυνατότητα επιλεκτικής θεώρησης της παραμόρφωσης του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου.

Προκειμένου να ληφθεί υπόψη η παραμόρφωση εκατέρωθεν ενός γραμμικού στοιχείου θα πρέπει καταστρωθεί η σχέση υπολογισμού της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης του συστήματος δοκός – ελαστικό υπόβαθρο. Όπως είναι γνωστό, και όπως εκτέθηκε και στις προηγούμενες παραγράφους, η σχέση αυτή έχει τη μορφή:

$$\pi_{\text{ολ}} = \pi_{\text{δοκ.}}(w, \psi) + \pi_{\text{εδ.}}(w, w_k) \tag{3.199}$$

Ο πρώτος όρος του δευτέρου σκέλους της (3.199) αφορά την ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης του στοιχείου, και συντίθεται από εκφράσεις που αντιστοιχούν στις παραμορφώσεις του (καμπτικές, και διατμητικές όταν λαμβάνονται υπόψη στην περίπτωση της δοκού Timoshenko) και ενδεχομένως και το έργο των αξονικών δυνάμεων. Ο δεύτερος όρος αφορά την ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης του εδάφους, και αφού το ζητούμενο είναι ο συνυπολογισμός και της ενέργειας παραμόρφωσης του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου απαιτείται η διάκριση του συστήματος δοκού – εδάφους σε τρία πεδία σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 3.18).



Σχήμα 3.18. Γενικευμένο προσομοίωμα τριών παραμέτρων με τη θεώρηση των παραμορφώσεων του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου.

Στα τρία αυτά πεδία οι παράμετροι μετακίνησης του προσομοιώματος w, και w_k περιγράφονται από διαφορετικές συναρτήσεις. Επομένως η (3.199) μπορεί να λάβει την παρακάτω μορφή:

$$\pi_{o\lambda} = \pi_{\varepsilon\delta.}^{(I)}(w_I, w_{kI}) + \left\{\pi_{\delta o\kappa.}(w_{II}, \psi) + \pi_{\varepsilon\delta.}^{(II)}(w_{II}, w_{kII})\right\} + \pi_{\varepsilon\delta.}^{(III)}(w_{III}, w_{kIII}) \Rightarrow \pi_{o\lambda} = \pi_I + \pi_{II} + \pi_{III} \tag{3.200}$$

Οι όροι εντός τις αγκύλης (π_{II}) αντιπροσωπεύουν την ενέργεια παραμόρφωσης του συστήματος εντός του πεδίου ΙΙ βάσει της οποίας έχουν σχηματιστεί τα μητρώα δυσκαμψίας τα οποία παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 3.4. Επομένως οι όροι αυτοί αντιστοιχούν στο προσομοίωμα χωρίς την επιρροή της παραμόρφωσης του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου. Οι δύο επόμενοι όροι (π_I και π_{III}) είναι αυτοί που εκφράζουν την ενέργεια παραμόρφωσης του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου, και αντιστοιχούν στην παραμόρφωση της κάτω στρώσης των ελατηρίων και στην παραμόρφωση του διατμητικού στρώματος καθώς η άνω στρώση είναι αφόρτιστη, και επομένως απαραμόρφωτη. Έτσι, με δεδομένο το γεγονός ότι οι όροι που συνθέτουν την ενέργεια παραμόρφωσης εντός του πεδίου ΙΙ δίνονται κατά περίπτωση από τις σχέσεις (3.1), ή (3.13), η (3.200) παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\pi_{o\lambda} = \pi_{II} + \frac{b}{2}\int_{-\infty}^{0} K w_{kI}^2 dx + \frac{b}{2}\int_{-\infty}^{0} G'\left(\frac{dw_{kI}}{dx}\right)^2 dx + \frac{b}{2}\int_{L}^{+\infty} K w_{kII}^2 dx + \frac{b}{2}\int_{L}^{+\infty} G'\left(\frac{dw_{kIII}}{dx}\right)^2 dx \tag{3.201}$$

Σύμφωνα με θεμελιώδες λήμμα του λογισμού των μεταβολών η πρώτη μεταβολή της (3.201) δίνεται από τη σχέση:

$$\delta\pi_{o\lambda} = \delta\pi_I + \delta\pi_{II} + \delta\pi_{III} \tag{3.202α}$$

Αν ληφθεί υπόψη η (3.201) αλλά και το γεγονός ότι η μεταβολή $\delta\pi_{II}$ δίνεται κατά περίπτωση από τις σχέσεις (3.5) ή (3.14), τότε η (3.202α) λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$\delta\pi_{o\lambda} = \delta\pi_{II} + \int_{-\infty}^{0}\left[k w_{kI} - G\left(\frac{d^2 w_{kI}}{dx^2}\right)\right]\delta w_{kI} dx + \left[G\left(\frac{dw_{kI}}{dx}\right)\delta w_{kI}\right]_{-\infty}^{0} + \int_{L}^{+\infty}\left[k w_{kIII} - G\left(\frac{d^2 w_{kIII}}{dx^2}\right)\right]\delta w_{kIII} dx +$$
$$+\left[G\left(\frac{dw_{kIII}}{dx}\right)\delta w_{kIII}\right]_{L}^{+\infty} \tag{3.202β}$$

Όπου c=Cb [kN/m^2], k=Kb [kN/m^2], και G=G'b [kN].

Για να εκπληρωθεί η συνθήκη στασιμότητας $\delta\pi_{o\lambda}=0$ θα πρέπει αφενός οι ολοκληρωτές των ολοκληρωμάτων να είναι όλοι ίσοι με το μηδέν και αφετέρου οι τιμές των εκφράσεων εντός των αγκυλών να μηδενίζονται στα σημεία x=0, x=L και $x\to\pm\infty$ (Σχήμα 3.18). Έτσι για την περίπτωση της δοκού Timoshenko η συνθήκη στασιμότητας οδηγεί στις εξισώσεις (3.6α) – (3.6γ), ενώ για την περίπτωση της δοκού Euler στις εξισώσεις (3.15α) και (3.15β). Και στις δυο περιπτώσεις η συνθήκη μηδενισμού της (3.202β) οδηγεί στις δυο παρακάτω εξισώσεις υπολογισμού των μετακινήσεων της διατμητικής στρώσης στα πεδία Ι και ΙΙΙ:

Πεδίο Ι: $$\frac{d^2 w_{kI}}{dx^2} - \left(\frac{k}{G}\right) w_{kI} = 0 \tag{3.203α}$$

Πεδίο ΙΙΙ: $$\frac{d^2 w_{kIII}}{dx^2} - \left(\frac{k}{G}\right) w_{kIII} = 0 \tag{3.203β}$$

Στο σημείο αυτό υπενθυμίζεται ότι η επίλυση των δυο παραπάνω εξισώσεων και ο υπολογισμός των μετακινήσεων του διατμητικού επιπέδου w_k για τα πεδία Ι, και ΙΙΙ σημαίνει τον ταυτόχρονο υπολογισμό και

της ολικής μετακίνησης w, καθώς το γεγονός ότι στα πεδία αυτά το έδαφος είναι αφόρτιστο οδηγεί στο συμπέρασμα ότι στα πεδία αυτά ισχύει $w_c=0$.

Με την προϋπόθεση της ισχύος των εξισώσεων (3.6α) – (3.6γ), για την περίπτωση της δοκού Timoshenko, καθώς και των (3.203α), (3.203β) εντός του πεδίου ορισμού τους, τότε η (3.202β) λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$\delta\pi_{ολ} = \left[EI\left(\frac{d\psi}{dx}\right)\delta\psi\right]_0^L + \left[\Phi\left(\frac{dw_{II}}{dx}-\psi\right)\delta w_{II} - P\frac{dw_{II}}{dx}\delta w_{II}\right]_0^L + \left[G\left(\frac{dw_{kII}}{dx}\right)\delta w_{kII}\right]_0^L +$$
$$+\left[G\left(\frac{dw_{kI}}{dx}\right)\delta w_{kI}\right]_{-\infty}^0 + \left[G\left(\frac{dw_{kIII}}{dx}\right)\delta w_{kIII}\right]_L^{+\infty} \qquad (3.204α)$$

Αντιστοίχως για την περίπτωση της δοκού Euler η ταυτόχρονη ικανοποίηση των εξισώσεων (3.15α), (3.15β) και (3.203α), (3.203β) εντός του πεδίου ορισμού τους δίνει στην (3.202β) την παρακάτω μορφή:

$$\delta\pi_{ολ} = EI\left[\frac{d^2w_{II}}{dx^2}\delta\left(\frac{dw_{II}}{dx}\right)\right]_0^L + \left[-\left(EI\frac{d^3w_{II}}{dx^3}+P\frac{dw_{II}}{dx}\right)\delta w_{II}\right]_0^L + \left[G\left(\frac{dw_{kII}}{dx}\right)\delta w_{kII}\right]_0^L +$$
$$+\left[G\left(\frac{dw_{kI}}{dx}\right)\delta w_{kI}\right]_{-\infty}^0 + \left[G\left(\frac{dw_{kIII}}{dx}\right)\delta w_{kIII}\right]_L^{+\infty} \qquad (3.204β)$$

Από τις σχέσεις (3.204α) και (3.204β) προκύπτουν οι συνοριακές συνθήκες στα όρια $x\to\pm\infty$ καθώς και οι συνθήκες συνέχειας στα σημεία x=0 και x=L.

Εξ ορισμού, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων στηρίζεται στην παραδοχή της ασυνέχειας των ολικών μετακινήσεων της επιφάνειας του εδάφους w στα όρια των φορτιζόμενων επιφανειών. Ωστόσο οι μετακινήσεις του διατμητικού στρώματος είναι συνεχείς, και επομένως στα άκρα του στοιχείου θα ισχύουν:

$$w_{kI}(0) = w_{kII}(0) = w_{k0} \Rightarrow \delta w_{kI}(0) = \delta w_{kII}(0) \qquad (3.205α)$$

$$w_{kII}(L) = w_{kIII}(L) = w_{kL} \Rightarrow \delta w_{kII}(L) = \delta w_{kIII}(L) \qquad (3.205β)$$

Με βάση τις δυο παραπάνω σχέσεις, οι (3.204α), (3.204β) παίρνουν αντίστοιχα την παρακάτω μορφή:

$$\delta\pi_{ολ} = \left[EI\left(\frac{d\psi}{dx}\right)\delta\psi\right]_0^L + \left[\Phi\left(\frac{dw_{II}}{dx}-\psi\right)\delta w_{II} - P\frac{dw_{II}}{dx}\delta w_{II}\right]_0^L + \left[G\left(\frac{dw_{kI}}{dx}-\frac{dw_{kII}}{dx}\right)\delta w_{kI}\right]_{x=0} +$$
$$+\left[G\left(\frac{dw_{kII}}{dx}-\frac{dw_{kIII}}{dx}\right)\delta w_{kIII}\right]_{x=L} - \left[G\left(\frac{dw_{kI}}{dx}\right)\delta w_{kI}\right]_{x\to-\infty} + \left[G\left(\frac{dw_{kIII}}{dx}\right)\delta w_{kIII}\right]_{x\to+\infty} \qquad (3.206α)$$

$$\delta\pi_{ολ} = EI\left[\frac{d^2w_{II}}{dx^2}\delta\left(\frac{dw_{II}}{dx}\right)\right]_0^L + \left[-\left(EI\frac{d^3w_{II}}{dx^3}+P\frac{dw_{II}}{dx}\right)\delta w_{II}\right]_0^L + \left[G\left(\frac{dw_{kI}}{dx}-\frac{dw_{kII}}{dx}\right)\delta w_{kI}\right]_{x=0} +$$
$$+\left[G\left(\frac{dw_{kII}}{dx}-\frac{dw_{kIII}}{dx}\right)\delta w_{kIII}\right]_{x=L} - \left[G\left(\frac{dw_{kI}}{dx}\right)\delta w_{kI}\right]_{x\to-\infty} + \left[G\left(\frac{dw_{kIII}}{dx}\right)\delta w_{kIII}\right]_{x\to+\infty} \qquad (3.206β)$$

Από τις δυο παραπάνω σχέσεις προκύπτει το συμπέρασμα ότι εκτός από τις συνθήκες συνέχειας των κατακορύφων μετακινήσεων του διατμητικού επιπέδου w_k (3.205α) και (3.205β), στα άκρα x=0 και x=L ισχύουν και συνθήκες συνέχειας των πρώτων παραγώγων τους, και κατά συνέπεια και των τεμνουσών V_G.

Επομένως ισχύουν:

$$\left.\frac{dw_{kI}}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{dw_{kII}}{dx}\right|_{x=0} \Rightarrow V_G\left(x=0^-\right) = V_G\left(x=0^+\right) = V_{G0} \tag{3.207α}$$

$$\left.\frac{dw_{kII}}{dx}\right|_{x=L} = \left.\frac{dw_{kIII}}{dx}\right|_{x=L} \Rightarrow V_G\left(x=L^-\right) = V_G\left(x=L^+\right) = V_{GL} \tag{3.207β}$$

Τέλος, ένα ακόμα συμπέρασμα που προκύπτει από τις (3.206α), (3.206β) όσον αφορά το διατμητικό επίπεδο είναι ο μηδενισμός των μετακινήσεων του w_k στα όρια $x \to \pm\infty$:

$$w_{kI}\left(x \to -\infty\right) = 0 \text{ καί } w_{kIII}\left(x \to +\infty\right) = 0 \tag{3.208}$$

Οι υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες που προκύπτουν από τις (3.206α) και (3.206β) αφορούν τις συνθήκες στήριξης του στοιχείου, και όχι το προσομοίωμα του εδάφους.

Επανερχόμενοι στις εξισώσεις (3.203α) και (3.203β), θα μελετηθεί η λύση τους και πιο συγκεκριμένα η λύση της πρώτης από αυτές καθώς είναι όμοιες με μοναδική διαφορά το πεδίο εντός του οποίου ορίζονται. Η γενική μορφή της λύσης της (3.203α) είναι:

$$w_{kI}\left(x\right) = D_1 e^{\mu x} + D_2 e^{-\mu x} \qquad \left(x \le 0\right) \tag{3.209}$$

Όπου $\mu = \sqrt{k/G}$.

Με δεδομένη την (3.208) και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η (3.203α) ορίζεται για τιμές του x μικρότερες του μηδενός, προκύπτει: D_2=0. Λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπόψη και την (3.205α) προκύπτει τελικά:

$$w_{kI}\left(x\right) = w_{k0} e^{\mu x} \quad \left(x \le 0\right) \tag{3.210}$$

Η αντίστοιχη έκφραση για τις τέμνουσες που καταπονούν το διατμητικό επίπεδο εντός του πεδίου I προκύπτει από την πρώτη παράγωγο της (3.210):

$$V_{GI}\left(x\right) = G\mu w_{k0} e^{\mu x} = \left(\sqrt{kG}\right) w_{k0} e^{\mu x} \tag{3.211α}$$

Από την παραπάνω σχέση και λαμβάνοντας υπόψη και την (3.207α) προκύπτει η τιμή της τέμνουσας του διατμητικού επιπέδου στο άκρο του στοιχείου x=0:

$$V_{GI}\left(x=0\right) = V_{G0} = \left(\sqrt{kG}\right) w_{k0} \tag{3.211β}$$

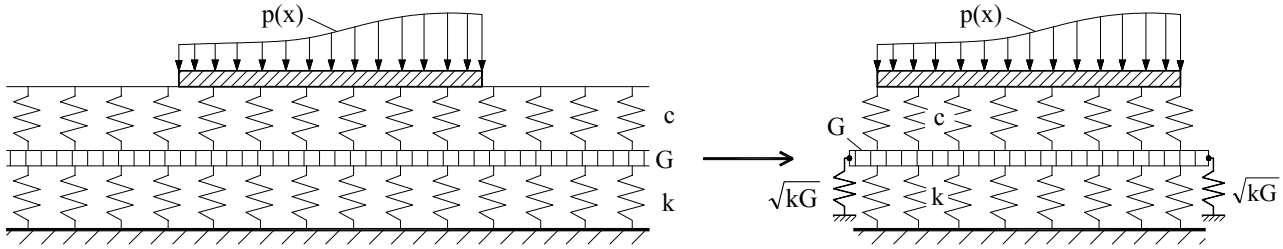
Παρόμοια ανάλυση για το άκρο του στοιχείου x=L οδηγεί στις παρακάτω εξισώσεις:

$$w_{kIII}\left(x\right) = w_{kL} e^{-\mu\left(x-L\right)} \quad \left(x \ge L\right) \tag{3.212α}$$

$$V_{GIII}\left(x=L\right) = V_{GL} = -\left(\sqrt{kG}\right) w_{kL} \tag{3.212β}$$

Οι σχέσεις (3.211β) και (3.212β) οδηγούν στο συμπέρασμα ότι προκειμένου να ληφθεί υπόψη η επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου, μέσα στα πλαίσια των βασικών παραδοχών με βάση τις οποίες έχουν σχηματιστεί οι εξισώσεις του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων, αρκεί η θεώρηση του αντίστοιχου προσομοιώματος χωρίς τις εκατέρωθεν επεκτάσεις του διατμητικού επιπέδου, με την προϋπόθεση ότι στα άκρα του θα τοποθετηθούν μεμονωμένα μεταφορικά ελατήρια, με ελατηριακές σταθερές ίσες με: $\sqrt{kG}$ (Σχήμα 3.19).

Τα ισοδύναμα αυτά ελατήρια αντιπροσωπεύουν την ενέργεια παραμόρφωσης των ελευθέρων πεδίων του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου. Τα παραπάνω έρχονται σε πλήρη ταύτιση με το συμπέρασμα που εξάγεται από τη μελέτη του προσομοιώματος των δύο παραμέτρων (βλέπε π.χ. Vallabhan και Das (1991)).



Σχήμα 3.19. Θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου με ισοδύναμα μεμονωμένα μεταφορικά ελατήρια.

Με βάση τα παραπάνω μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι προκειμένου να τροποποιηθεί το μητρώο δυσκαμψίας (3.196), έτσι ώστε να λάβει υπόψη την επιρροή των παραμορφώσεων του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου, θα πρέπει να ληφθούν υπόψη οι σχέσεις (3.211β) και (3.212β).

Πιο συγκεκριμένα, αντί της υποθέσεως $V_{G0}=V_{G5}=0$ στην οποία στηρίχθηκε ο σχηματισμός του μητρώου δυσκαμψίας της σχέσεως (3.196), θα πρέπει να εισαχθεί η σχέση (3.211β) στις (3.174α), (3.179γ), (3.181α), καθώς και η σχέση (3.212β) στις (3.183β), (3.185β), (3.176β). Για τις κατακόρυφες μετακινήσεις του διατμητικού επιπέδου στα άκρα του στοιχείου w_{k0} και w_{k5} που υπεισέρχονται στις (3.211β) και (3.212β) ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$w_{k0} = \frac{G\lambda}{G\lambda + s'_{\xi 1}\sqrt{kG}}\left\{-\frac{c}{k+c}\left[(1-\xi_1)d_1 - \frac{s'_{\xi 1}}{\lambda}\right]\varphi_1 + \left(\frac{1}{m'_{\xi 1}}\right)w_{k1} + \frac{c}{k+c}\left(1-\frac{1}{m'_{\xi 1}}\right)w_1\right\} \tag{3.213α}$$

$$w_{k5} = \frac{G\lambda}{G\lambda + s'_{\xi 2}\sqrt{kG}}\left\{\frac{c}{k+c}\left[(1-\xi_2)d_2 - \frac{s'_{\xi 2}}{\lambda}\right]\varphi_4 + \left(\frac{1}{m'_{\xi 2}}\right)w_{k4} + \frac{c}{k+c}\left(1-\frac{1}{m'_{\xi 2}}\right)w_4\right\} \tag{3.213β}$$

οι οποίες προκύπτουν από την εφαρμογή των (3.164α) και (3.167β) αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας κατόπιν τις εξισώσεις ισορροπίας (3.186α, β, γ) και (3.187α, β, γ), και ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στην προηγούμενη παράγραφο προκύπτει το ακόλουθο μητρώο δυσκαμψίας:

$$[K] = [T]^T\{[I] - [K_{\varepsilon\sigma\omega\tau}][T_1]\}^{-1}[K_{\varepsilon\sigma\omega\tau}][T] + [K^{\varepsilon\sigma}_{\varepsilon\delta\alpha\varphi}] + [K^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon\delta\alpha\varphi}] + [K^{\varepsilon\kappa\alpha\tau}_{\varepsilon\delta\alpha\varphi}] + [K_P] \tag{3.214}$$

Το παραπάνω μητρώο δυσκαμψίας διαφέρει από το μητρώο της σχέσης (3.196) μόνο στον όρο – μητρώο $[K_{\varepsilon\delta\alpha\varphi}{}^{\varepsilon\kappa\alpha\tau}]$ που εκφράζει την επιρροή της παραμόρφωσης του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου και δίνεται από την σχέση:

$$
\left[K_{\text{εδαφ}}^{\text{εκατ}}\right]=\begin{bmatrix}
\left(\frac{c}{k+c}\right)^2\left(1-\frac{1}{m'_{\xi1}}\right)^2 r_1 & & & & & \\
-\left(\frac{c}{k+c}\right)^2\left(1-\frac{1}{m'_{\xi1}}\right)\left[\xi'_1 d_1-\frac{s'_{\xi1}}{\lambda}\right]r_1 & \left(\frac{c}{k+c}\right)^2\left[\xi'_1 d_1-\frac{s'_{\xi1}}{\lambda}\right]^2 r_1 & & & & \\
\frac{c}{k+c}\left(\frac{1}{m'_{\xi1}}\right)\left(1-\frac{1}{m'_{\xi1}}\right)r_1 & -\frac{c}{k+c}\left(\frac{1}{m'_{\xi1}}\right)\left[\xi'_1 d_1-\frac{s'_{\xi1}}{\lambda}\right]r_1 & \left(\frac{1}{m'_{\xi1}}\right)^2 r_1 & & & \\
0 & 0 & 0 & \left(\frac{c}{k+c}\right)^2\left(1-\frac{1}{m'_{\xi2}}\right)^2 r_2 & & \\
0 & 0 & 0 & \left(\frac{c}{k+c}\right)^2\left(1-\frac{1}{m'_{\xi2}}\right)\left[\xi'_2 d_2-\frac{s'_{\xi2}}{\lambda}\right]r_2 & \left(\frac{c}{k+c}\right)^2\left[\xi'_2 d_2-\frac{s'_{\xi2}}{\lambda}\right]^2 r_2 & \\
0 & 0 & 0 & \frac{c}{k+c}\left(\frac{1}{m'_{\xi2}}\right)\left(1-\frac{1}{m'_{\xi2}}\right)r_2 & \frac{c}{k+c}\left(\frac{1}{m'_{\xi2}}\right)\left[\xi'_2 d_2-\frac{s'_{\xi2}}{\lambda}\right]r_2 & \left(\frac{1}{m'_{\xi2}}\right)^2 r_2
\end{bmatrix} \tag{3.215}
$$

Όπου:

$$
r_1=\frac{G\lambda\sqrt{kG}}{G\lambda+s'_{\xi1}\sqrt{kG}} \quad \text{καί} \quad r_2=\frac{G\lambda\sqrt{kG}}{G\lambda+s'_{\xi2}\sqrt{kG}}
$$

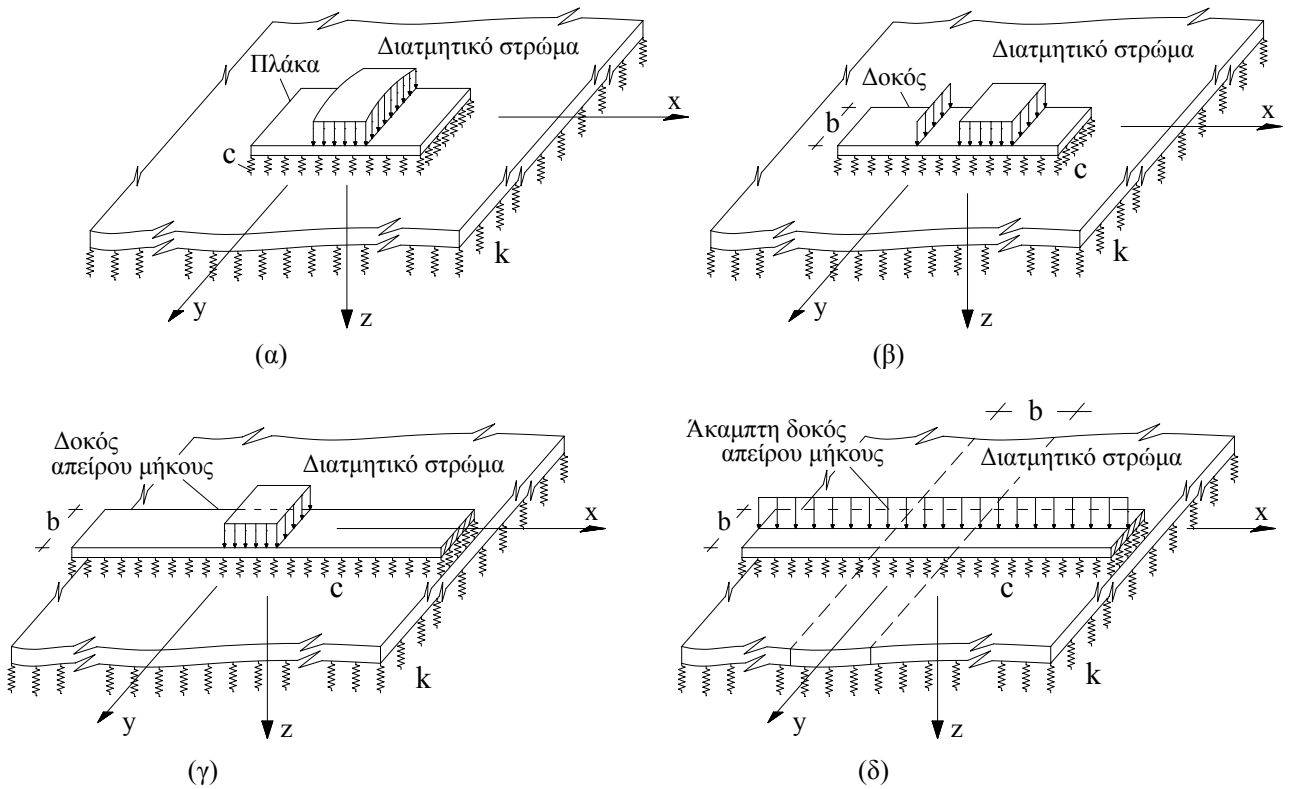
Όσον αφορά τα μητρώα φόρτισης, πρέπει να τονιστεί ότι η θεώρηση των παραμορφώσεων του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου κατά την διαμήκη διεύθυνση, δεν επηρεάζει καθόλου την μορφή των σχέσεων (3.197α) και (3.197β). Αυτό συμβαίνει επειδή κατά τον σχηματισμό των μητρώων φορτίσεως οι βαθμοί ελευθερίας των κόμβων (1) και (4) δεσμεύονται. Επομένως $w_1=w_{k1}=\varphi_1=w_4=w_{k4}=\varphi_4=0$. Έτσι από τις σχέσεις (3.213α) και (3.213β) προκύπτει ότι $w_{k0}=w_{k5}=0$. Άρα το έδαφος εκατέρωθεν του στοιχείου είναι απαραμόρφωτο και δεν προκαλεί μεταβολή στα εντατικά μεγέθη που υπολογίζονται από τις σχέσεις (3.197α) και (3.197β).

3.6.3.2. Επιρροή του εδάφους κατά την εγκάρσια διεύθυνση του στοιχείου

Η θεώρηση της παραμόρφωσης του εδάφους στην εγκάρσια διεύθυνση του στοιχείου απαιτεί την διερεύνηση και επίλυση του τρισδιάστατου προβλήματος κάμψης δοκών ή πλακών πεπερασμένων διαστάσεων, καμπτόμενων στα επίπεδα x – z και y – z (βλέπε Protsenko και Rvachev, (1975), και Σχήμα 3.20α).

Ενώ η κατάστρωση των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος αυτού μπορεί να γίνει σχετικά εύκολα, η επίλυση τους είναι ιδιαίτερα δύσκολη και μπορεί να γίνει μόνο προσεγγιστικά. Επομένως είναι αναγκαία η θεώρηση διαδοχικών απλοποιητικών παραδοχών μέσω των οποίων είναι δυνατή η σταδιακή απλοποίηση του προβλήματος, με αντίτιμο βέβαια την μείωση της επιτυγχανόμενης ακρίβειας.

Μια πρώτη απλοποίηση επιτυγχάνεται, εάν η ανάλυση περιοριστεί σε προβλήματα στοιχείων δοκού πεπερασμένου μήκους με συμπαγείς διατομές. Στην περίπτωση αυτή, η κάμψη του στοιχείου περιορίζεται στο επίπεδο x – z (Σχήμα 3.20β), καθώς οι συμπαγείς διατομές είναι απαραμόρφωτες εντός του επιπέδου τους. Πρόκειται για μια ρεαλιστική παραδοχή που απλοποιεί σημαντικά τους υπολογισμούς και μπορεί να έχει γενική εφαρμογή ανεξαρτήτως του εδαφικού προσομοιώματος που χρησιμοποιείται. Από την εφαρμογή της παραδοχής αυτής προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι κατακόρυφες μετακινήσεις w κατά μήκος των διατομών είναι σταθερές, εφόσον βέβαια η φόρτιση δεν είναι έκκεντρη ως προς τον άξονα x, κάτι που συνεπάγεται την εμφάνιση φαινομένων στρέψης.



Σχήμα 3.20. Το πλήρες τρισδιάστατο πρόβλημα κάμψης πλάκας πεπερασμένων διαστάσεων σε δυο επίπεδα (α), το τρισδιάστατο πρόβλημα κάμψης δοκών πεπερασμένου μήκους (β), ανάλυση δοκών «απείρου» μήκους (γ), μετατροπή του τρισδιάστατου προβλήματος σε επίπεδο (δ).

Επιπλέον απλοποίηση μπορεί να επιτευχθεί, εάν πραγματοποιηθεί ανάλυση για δοκούς «απείρου» μήκους (Σχήμα 3.20γ) και γίνει κατάλληλη μεταφορά των εξαγόμενων της ανάλυσης στα προβλήματα δοκών πεπερασμένου μήκους. Η ανάλυση των δοκών «απείρου» μήκους είναι σαφώς απλούστερη της αντίστοιχης ανάλυσης των δοκών πεπερασμένου μήκους όσον αφορά την θεώρηση του τρισδιάστατου προβλήματος, καθώς παρέχει τη δυνατότητα μιας σχετικώς εύκολης επίλυσης με τη βοήθεια σχηματισμού λύσεων για διάφορους τύπους φόρτισης με την μέθοδο των μετασχηματισμών Fourier.

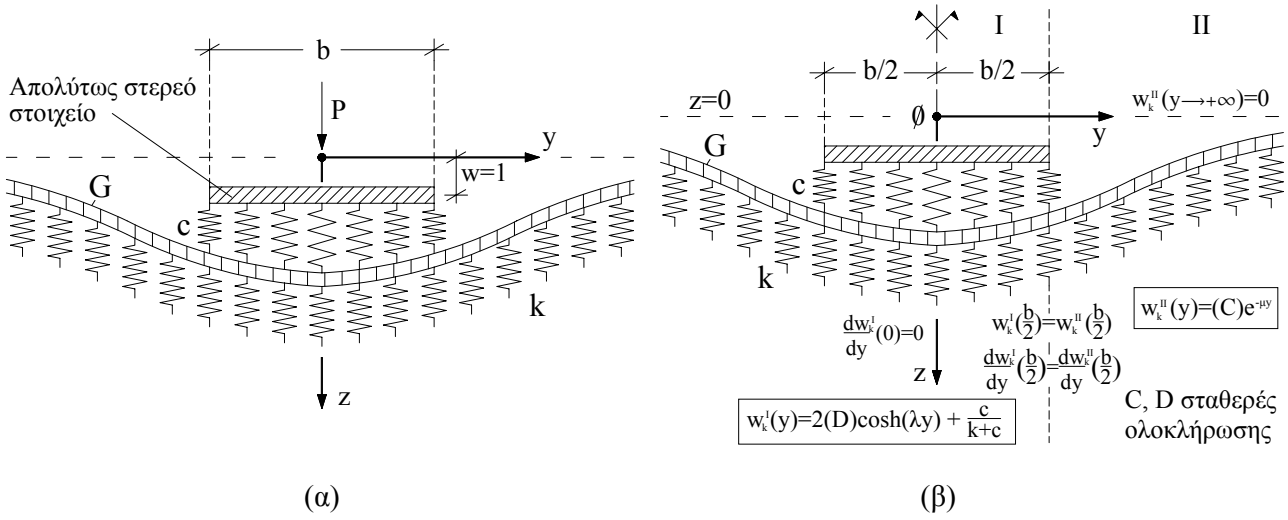
Τέλος, υπάρχει η δυνατότητα μιας επιπλέον απλούστευσης με την αγνόηση της αλληλεπίδρασης των παραμορφώσεων του διατμητικού στρώματος στα επίπεδα x – z και y – z (Σχήμα 3.20δ). Η απλούστευση αυτή επιτυγχάνεται με την θεώρηση μια απολύτως στερεάς δοκού απείρου μήκους με συμμετρική φόρτιση, και επομένως με την μετατροπή του αρχικά τρισδιάστατου προβλήματος σε επίπεδο (π.χ. πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης). Η παραδοχή αυτή είναι ισοδύναμη με τη θεώρηση ότι το επίπεδο διατμητικό στρώμα «διασπάται» σε μια σειρά από ανεξάρτητες διατμητικές δοκούς στη διεύθυνση y, οι οποίες είναι παράλληλα τοποθετημένες και δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

Στην παρούσα παράγραφο, θα παρουσιαστεί η πλήρως προσεγγιστική αντιμετώπιση του προβλήματος, η οποία είναι αμέσως εφαρμόσιμη στα πλαίσια της μητρωικής θεώρησης του προβλήματος. Η τοποθέτηση του προβλήματος με την «ακριβή» μέθοδο η οποία αφορά την κάμψη δοκού απείρου μήκους επί τρισδιάστου

ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων με τη θεώρηση της αλληλεπίδρασης των παραμορφώσεων του διατμητικού στρώματος στα επίπεδα x – z και y – z ξεφεύγει από τους στόχους της παρούσας διατριβής.

Η πλέον προσεγγιστική / απλοποιητική μέθοδος στηρίζεται στον υπολογισμό των αντιδράσεων του ελαστικού υποβάθρου λόγω μοναδιαίας κατακόρυφης μετακίνησης απολύτως στερεάς δοκού πλάτους b και απείρου μήκους (Kerr (1965)). Πρόκειται για ένα επίπεδο πρόβλημα και επομένως για την επίλυση του μπορεί να θεωρηθεί μόνον μια λωρίδα μήκους b (Σχήμα 3.20δ).

Η ανάλυση που απαιτείται για τον υπολογισμό της αντίδρασης του εδάφους λόγω της μοναδιαίας κατακόρυφης μετακίνησης της άκαμπτης λωρίδας εμβαδού bxb (για να είναι συμβατό με τις εξισώσεις που σχηματίστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους), είναι παρόμοια με αυτή που πραγματοποιήθηκε στην προηγούμενη Παράγραφο (3.6.3.1).



Σχήμα 3.21. Το πρόβλημα του απολύτως στερεού στοιχείου επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων με συμμετρική φόρτιση (α), οι εξισώσεις του προβλήματος – μετακινήσεις και συνοριακές συνθήκες (β).

Ακολουθώντας την διαδικασία αυτή και με βάση τις εξισώσεις των μετακινήσεων και τις συνοριακές συνθήκες του σχήματος 3.21β προκύπτει η σχέση προσδιορισμού των κατακόρυφων αντιδράσεων p(x) του ελαστικού υποβάθρου. Από την ολοκλήρωση των αντιδράσεων στο πλάτος του στοιχείου, προκύπτει η συνολική κατακόρυφη αντίδραση:

$$p_{ολ}^{εη} = 2\int_0^{b/2} p(x)dx \Rightarrow p_{ολ}^{εκ} = \frac{c}{k+c}kb\left[1+2\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\left(\frac{c}{kb}\right)\left(\frac{1}{\lambda+\mu s_b'}\right)\right] \tag{3.216}$$

Στην παραπάνω σχέση το λ δίνεται από τη σχέση (3.161), $\mu=\sqrt{k/G}$ και $s_b'=1/[\tanh(b\lambda/2)]$.

Κάνοντας την ίδια ανάλυση χωρίς την επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν του ακάμπτου στοιχείου προκύπτει ότι η συνολική κατακόρυφη αντίδραση δίνεται από τη σχέση:

$$p_{ολ} = 2\int_0^{b/2} p(x)dx \Rightarrow p_{ολ} = \frac{c}{k+c}kb \tag{3.217}$$

Από την σύγκριση των σχέσεων (3.216) και (3.217) προκύπτει το συμπέρασμα ότι για να ληφθεί προσεγγιστικά υπόψη η επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν του στοιχείου στην εγκάρσια διεύθυνση αρκεί να θεωρηθεί ένα «ισοδύναμο» πλάτος $b_{\iota\sigma}$ τέτοιο ώστε να ισχύει η ισότητα των σχέσεων (3.216) και (3.217).

Εξισώνοντας τις σχέσεις αυτές προκύπτει:

$$b_{\iota\sigma} = b\left[1 + 2\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\left(\frac{c}{bk}\right)\left(\frac{1}{\lambda + \mu s'_b}\right)\right] \tag{3.218}$$

Επομένως: *Αντικαθιστώντας την τιμή του πλάτους b του στοιχείου με την τιμή $b_{\iota\sigma}$ επιτυγχάνεται η προσεγγιστική θεώρηση της επιρροής του εδάφους στην εγκάρσια διεύθυνση του στοιχείου. Έτσι χωρίς να χρειαστεί η προσφυγή στην επίλυση του τρισδιάστατου προβλήματος είναι δυνατή η θεώρηση των φαινομένων που απορρέουν από την πραγματική – τρισδιάστατη φύση του, κάνοντας χρήση των εξισώσεων του αντίστοιχου επιπέδου προβλήματος. Με άλλα λόγια, η προσεγγιστική θεώρηση των παραμορφώσεων του εδάφους στην εγκάρσια διεύθυνση επιτυγχάνεται με την αντικατάσταση των σταθερών k, c, G (που δίνονται από τις σχέσεις k=Kb, c=Cb και G=G'b) με τις σταθερές $k^*=Kb_{\iota\sigma}$, $c^*=Cb_{\iota\sigma}$ και $G^*=G'b_{\iota\sigma}$.*

3.6.4. Θεώρηση στρεπτικών και αξονικών βαθμών ελευθερίας στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης

Στις προηγούμενες παραγράφους σχηματίστηκαν τα μητρώα δυσκαμψίας και φόρτισης για στοιχείο δοκού επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων στα πλαίσια της θεωρίας α' και β' τάξης κάνοντας δυο βασικές παραδοχές:

Α. Η κάμψη του στοιχείου υφίσταται εντός του επιπέδου συμμετρίας του, και

Β. Το στοιχείο είναι ατενές (EF→∞).

Αυτό σημαίνει, όπως τονίστηκε στην Παράγραφο 3.6.2.1 (Σχήμα 3.12), ότι οι βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου είναι έξι (6).

Στην παράγραφο αυτή θα γίνει μια περαιτέρω γενίκευση του στοιχείου στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης θεωρώντας καταρχήν και τους στρεπτικούς βαθμούς ελευθερίας των βασικών του κόμβων έτσι ώστε να είναι δυνατή η χρήση του σε προβλήματα εσχάρας (π.χ. σε φορείς θεμελίωσης που συνίστανται από εσχάρα πεδιλοδοκών), και στη συνέχεια αίροντας την παραδοχή της ατένειας (EF=πεπ.).

3.6.4.1. Οι στρεπτικοί βαθμοί ελευθερίας

Η θεώρηση των στρεπτικών βαθμών ελευθερίας του στοιχείου θα γίνει σε συνάρτηση με τις παρακάτω παραδοχές:

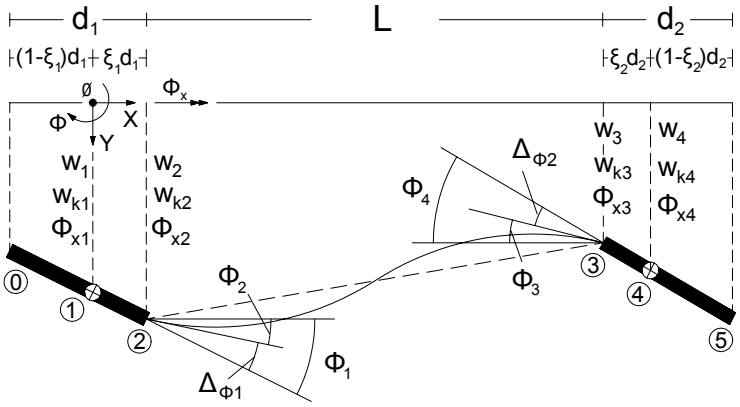
- Η εξίσωση της στρέψης που θα χρησιμοποιηθεί προκύπτει από τη θεωρία του Saint Venant (καθαρή στρέψη), καθώς ο σχηματισμός των μητρώων δυσκαμψίας που έγινε στις παραπάνω παραγράφους αφορά γραμμικά στοιχεία με συμπαγή και όχι με λεπτότοιχη διατομή όπου η εν λόγω θεωρία οδηγεί σε σοβαρά λάθη (βλέπε π.χ. Oden (1967)).
- Οι πρόσθετοι όροι των μητρώων δυσκαμψίας που θα προκύψουν, θα ενταχθούν απλώς στα μητρώα που σχηματίστηκαν με βάση τη θεωρία α' τάξης, στα πλαίσια της θεωρίας αυτής δεν υφίσταται σύζευξη αξονικών, στρεπτικών και καμπτικών παραμορφώσεων.

Το συμπληρωμένο με την προσθήκη των στρεπτικών βαθμών ελευθερίας μητρώο δυσκαμψίας (με διαστάσεις 8x8) θα έχει την παρακάτω γενική μορφή:

$$[K]=\left[\begin{array}{c:c}\text{Όροι που οφείλονται στην κάμψη} & 0\\ \hdashline 0 & \text{Όροι που οφείλονται στη στρέψη}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c}[K_b] & [0]\\ \hdashline [0] & [K_t]\end{array}\right] \tag{3.219}$$

Στην παράγραφο αυτή θα σχηματιστούν οι όροι του 2x2 υπομητρώου $[K_t]$, ενώ οι όροι του 6x6 υπομητρώου $[K_b]$ έχουν σχηματιστεί στις προηγούμενες παραγράφους του παρόντος κεφαλαίου (Παράγραφος 3.4). Η μορφή αυτή ισχύει όπως είναι φυσικό τόσο για το εσωτερικό του γενικευμένου στοιχείου όσο και για το σύνολο του.

Όπως και στην περίπτωση της κάμψης έτσι και στην περίπτωση της στρέψης, θα επιλυθεί καταρχήν το πρόβλημα για το εσωτερικό του γενικευμένου στοιχείου, και κατόπιν θα ληφθεί υπόψη και η επιρροή των απολύτως στερεών βραχιόνων (Σχήμα 3.22).



Σχήμα 3.22. Οι βαθμοί ελευθερίας του γενικευμένου στοιχείου με την προσθήκη της στρεπτικής επιπόνησης.

<u>Εσωτερικό τμήμα του στοιχείου</u>

Σύμφωνα με τη θεωρία του Saint – Venant η συστροφή $\theta=(d\varphi_x/dx)$, δηλαδή η ανηγμένη γωνία στροφής των διατομών (φ_x) εντός του επιπέδου τους, συνδέεται με την στρεπτική ροπή M_t μέσω της σχέσης:

$$\theta=\frac{M_t}{G_B J_t}\Rightarrow\frac{d\varphi_x}{dx}=\frac{M_t}{G_B J_t} \tag{3.220}$$

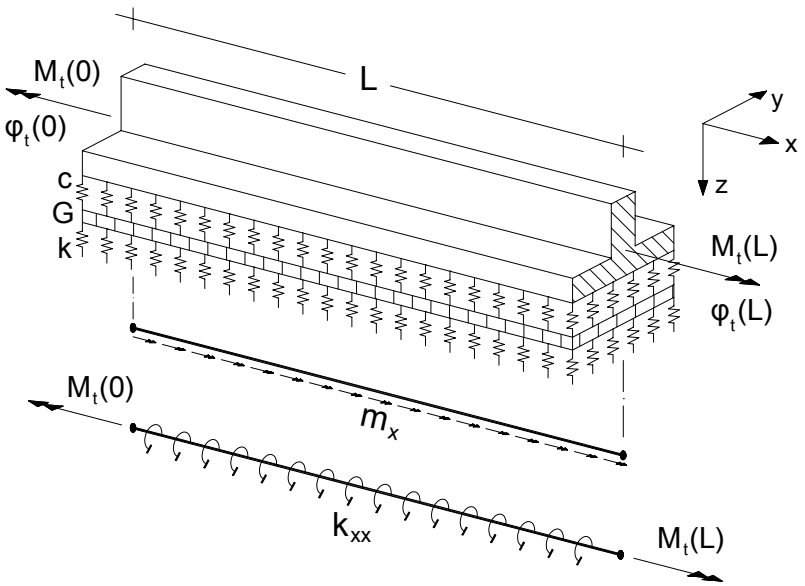
Στην παραπάνω σχέση G_B είναι το μέτρο διάτμησης του υλικού του στοιχείου, και J_t είναι η αντίσταση σε στρέψη της διατομής (διαστάσεις [m^4]). Περιοριζόμενοι σε προβλήματα συμπαγών διατομών, η αντίσταση σε στρέψη μπορεί να υπολογιστεί από την προσεγγιστική σχέση του Saint – Venant: $J_t\approx F^4/(40I_p)$, όπου F το εμβαδό της διατομής και I_p είναι η πολική ροπή αδράνειας της (βλέπε π.χ. Oden (1967)).

Η συνεχής ελαστική έδραση του στοιχείου προκαλεί την εμφάνιση συνεχών στρεπτικών αντιδράσεων από το έδαφος όταν το στοιχείο υπόκειται σε σχετική στρέψη των άκρων του (Σχήμα 3.23). Εάν k_{xx} είναι η στρεπτική αντίδραση του εδάφους για μοναδιαία στροφή της διατομής (δηλαδή η σταθερά των κατανεμημένων στρεπτικών ελατηρίων με διαστάσεις: [(kNm)/rad*μέτρο μήκους]), και αν ληφθεί υπόψη

και η (3.220), τότε από την συνθήκη ισορροπίας των στρεπτικών ροπών του απειροστού γραμμικού στοιχείου προκύπτει η παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2\varphi_x}{dx^2} - a^2\varphi_x = 0 \tag{3.221}$$

Όπου: $a = \sqrt{k_{xx}/G_B J_t}$



Σχήμα 3.23. Στρεπτική επιπόνηση στοιχείου δοκού επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι παρά το γεγονός ότι η διατομή καταπονείται από κατανεμημένη στρεπτική ροπή – αντίδραση από το έδαφος, ισχύει με καλή προσέγγιση η θεωρία του Saint Venant η οποία περιγράφει με μεγαλύτερη ακρίβεια το πρόβλημα της στρέψης στην περίπτωση που το στοιχείο φορτίζεται μόνο με συγκεντρωμένες στρεπτικές ροπές στα άκρα του (Παναγιωτουνάκος (1984)).

Η γενική λύση της (3.221) είναι:

$$\varphi_x(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} \tag{3.222}$$

Εν συνεχεία ακολουθώντας την διαδικασία που παρουσιάστηκε αναλυτικά στην Παράγραφο 3.4.1.1α, σχηματίζονται τα μητρώα $[R_{στρ}]$ και $[Q_{στρ}]$ που συνδέουν τις στροφές των άκρων του στοιχείου $u_7=\varphi_x(0)$, $u_8=\varphi_x(L)$ και τις στρεπτικές ροπές των άκρων του $s_6=M_t(0)$, $s_7=M_t(L)$ αντίστοιχα, με τις σταθερές ολοκλήρωσης C_1, C_2. (Θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι η αρίθμηση των μεγεθών μετακίνησης και έντασης με τους δείκτες 7, 8 γίνεται για να τονιστεί το γεγονός ότι οι στρεπτικοί βαθμοί ελευθερίας αποτελούν προσθήκη στους έξι βαθμούς ελευθερίας με βάση τους οποίους σχηματίστηκαν τα μητρώα δυσκαμψίας στην Παράγραφο 3.4.1.1α). Με βάση τα παραπάνω, το υπομητρώο που αντιστοιχεί στους στρεπτικούς βαθμούς ελευθερίας είναι: $[K_t] = [Q_t][R_t]^{-1}$. Εκτελώντας τους απαραίτητους υπολογισμούς προκύπτει:

$$[K_t] = \frac{\sqrt{k_{xx} G_B J_t}}{\sinh(aL)} \begin{bmatrix} \cosh(aL) & -1 \\ -1 & \cosh(aL) \end{bmatrix} \tag{3.223}$$

Για τον προσδιορισμό της σταθεράς k_{xx} στην περίπτωση έδρασης του στοιχείου επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων θα πρέπει να υπολογιστούν οι αντιδράσεις του υποβάθρου λόγω μοναδιαίας στροφής ενός απολύτως στερεού στοιχείου πλάτους b και απείρου μήκους (Σχήμα 3.20δ). Όπως και το αντίστοιχο πρόβλημα που επιλύθηκε στην Παράγραφο 3.6.3.2. έτσι και το παρόν, είναι επίπεδο πρόβλημα και επομένως για την επίλυση του μπορεί να θεωρηθεί μόνον μια λωρίδα μήκους b (Σχήμα 3.20δ).

Ο προσδιορισμός της σταθεράς k_{xx} μπορεί να γίνει είτε χωρίς θεώρηση των παραμορφώσεων του εδάφους εγκάρσια του στοιχείου (Σχήμα 3.24γ, δ), είτε με θεώρηση των παραμορφώσεων αυτών (Σχήμα 3.24α, β). Στο σημείο αυτό θα πρέπει να διευκρινιστεί, ότι η μέθοδος με βάση την οποία θα υπολογιστούν οι στρεπτικές αντιδράσεις του εδάφους στην δεύτερη περίπτωση είναι προσεγγιστική, καθώς γίνεται η παραδοχή – η οποία έγινε και στην Παράγραφο 3.6.3.2. – της απεξάρτησης των παραμορφώσεων του διατμητικού στρώματος στις διευθύνσεις x και y (βλέπε Σχήμα 3.20).

Εάν αγνοηθούν οι παραμορφώσεις του εδάφους εγκαρσίως του στοιχείου, τότε κάνοντας χρήση της εξίσωσης του σχήματος (3.24δ) και της σχέσης (3.177) προκύπτει η εξίσωση των αντιδράσεων p(y) του εδάφους, από την οποία προκύπτει η συνισταμένη ροπή – αντίδραση του εδάφους λόγω μοναδιαίας στροφής φ=1 του στερεού στοιχείου, η οποία ταυτίζεται με την ζητούμενη σταθερά k_{xx}:

$$k_{xx} = \int_{-b/2}^{b/2} yp(y)dy \Rightarrow k_{xx} = \frac{c}{k+c}\left[\frac{kb^3}{12} + \frac{c}{\lambda^2}\left(b - \frac{2\tanh[(b\lambda)/2]}{\lambda}\right)\right] \tag{3.224}$$

Αν στην παραπάνω σχέση σχηματιστεί το όριο για $c\to\infty$ τότε προκύπτει η σχέση $k_{xx}=(kb^3)/12$ που όπως είναι γνωστό αντιστοιχεί στο προσομοίωμα του Winkler. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι ίδια σχέση με την σχέση του Winkler, ισχύει και για το προσομοίωμα των δυο παραμέτρων, καθώς στην περίπτωση απολύτως στερεού στοιχείου το διατμητικό επίπεδο παραμένει απαραμόρφωτο, και επομένως ανενεργό.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία και για την περίπτωση κατά την οποία λαμβάνονται υπόψη οι παραμορφώσεις κατά την εγκάρσια στο στοιχείο διεύθυνση προκύπτει η παρακάτω σχέση:

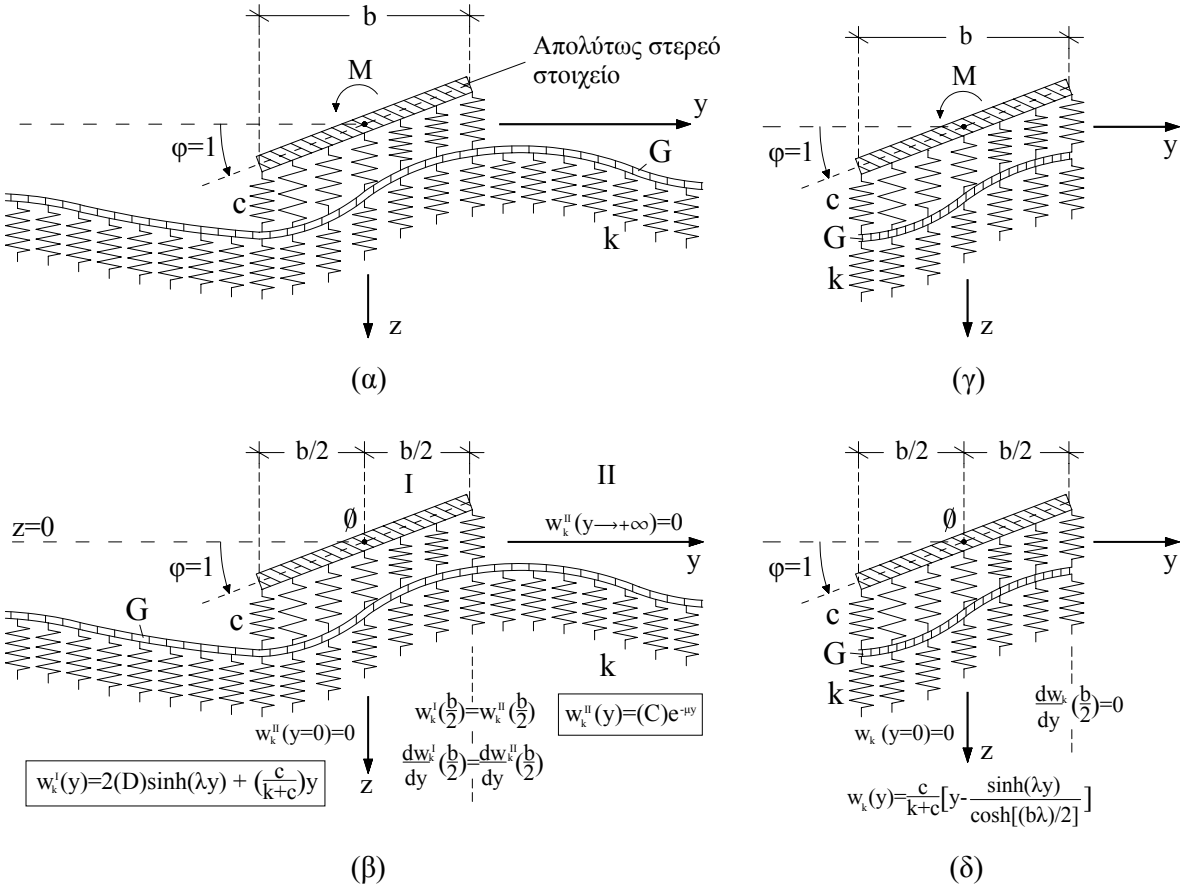
$$k_{xx}^{\varepsilon\gamma\kappa} = \frac{c}{k+c}\left[\frac{kb^3}{12} + \frac{c(2+b\mu)[\lambda b - 2\tanh[(b\lambda)/2]]}{2\lambda^2[\lambda + \mu\tanh[(b\lambda)/2]]}\right] \tag{3.225}$$

Και στην παραπάνω σχέση ο σχηματισμός του ορίου για $c\to\infty$ και η ταυτόχρονη θεώρηση G=0 οδηγεί στην τιμή της σταθεράς k_{xx} που αντιστοιχεί στο προσομοίωμα του Winkler. Αν θεωρηθεί $G\neq 0$ τότε προκύπτει η τιμή για το προσομοίωμα των δυο παραμέτρων.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι ενώ με η χρήση της (3.225) λαμβάνεται υπόψη η επιρροή των παραμορφώσεων του εδάφους στην εγκάρσια προς τον άξονα του στοιχείου διεύθυνση όσον αφορά τις στρεπτικές αντιδράσεις, δεν θα πρέπει να γίνει χρήση σ' αυτήν της σχέσης (3.218). Το ισοδύναμο πλάτος $b_{\iota\sigma}$ που δίνεται από τη σχέση (3.218), αφορά αποκλειστικά και μόνο την επιρροή του εδάφους επί της έντασης λόγω κάμψης.

Επομένως: η χρήση του $b_{\iota\sigma}$ για τον προσδιορισμό των σταθερών $k^*=Kb_{\iota\sigma}$, $c^*=Cb_{\iota\sigma}$ και $G^*=G'b_{\iota\sigma}$ μόνο στο τμήμα του μητρώου (3.219) που αφορά τους όρους κάμψης, και η ταυτόχρονη εισαγωγή της σχέσης (3.225) στο υπομητρώο των όρων στρέψης (3.223) κάνοντας όμως χρήση των σταθερών k, c, G (και όχι των k, c*, G*)*

οδηγεί στην θεώρηση της επιρροής των παραμορφώσεων του εδάφους στην εγκάρσια προς το στοιχείο διεύθυνση τόσο όσον αφορά την ένταση λόγω κάμψης όσο και την ένταση λόγω στρέψης.



Σχήμα 3.24. Ο προσδιορισμός της στρεπτικής σταθεράς k_{xx} για την περίπτωση που λαμβάνεται και για την περίπτωση που δεν λαμβάνεται υπόψη η επιρροή των παραμορφώσεων του εδάφους στην εγκάρσια προς τον άξονα του στοιχείου διεύθυνση.

<u>Στρεπτική επιπόνηση του γενικευμένου στοιχείου – Θεώρηση των απολύτως στερεών βραχιόνων</u>

Η θεώρηση των απολύτως στερεών βραχιόνων θα γίνει με τη μέθοδο που παρουσιάστηκε αναλυτικά στην Παράγραφο 3.6.2.1. Έτσι θα σχηματιστούν διαδοχικά οι μητρωικές σχέσεις που συνδέουν τις συστροφές φ_x και τις στρεπτικές ροπές M_t των βοηθητικών κόμβων 2, 3 με τα αντίστοιχα μεγέθη των βασικών κόμβων 1, 4 (Σχήμα 3.25). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα στροφικά ελατήρια στους βοηθητικούς κόμβους 2 και 3 αφορούν αποκλειστικά την κάμψη του στοιχείου εντός του επιπέδου του και όχι τη στρέψη του. Επομένως λόγω και της πλήρους αστρεψίας των βραχιόνων ισχύει:

$$\begin{bmatrix}\varphi_{x2}\\ \cdots\\ \varphi_{x3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \cdots & \cdots\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_{x1}\\ \cdots\\ \varphi_{x4}\end{bmatrix} \text{ ή} \tag{3.226α}$$

$$\left[\varphi_{x(εσωτ)}\right]=\left[T_t\right]\left[\varphi_x\right] \tag{3.226β}$$

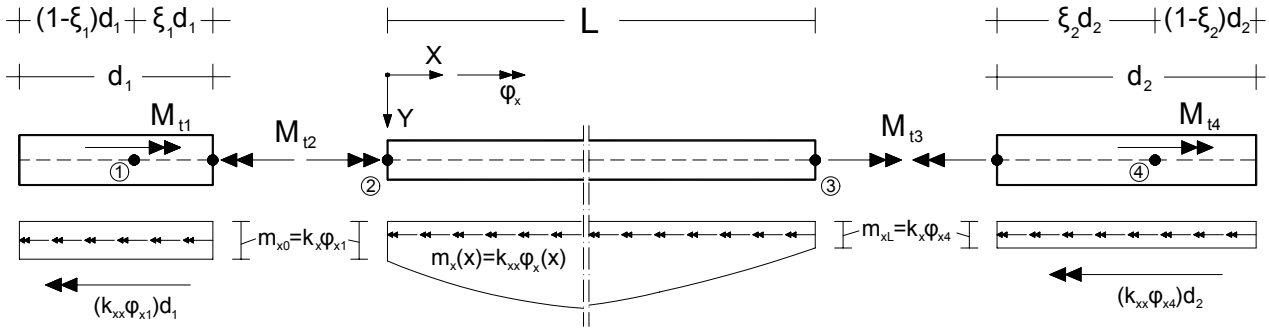
Η (3.226β) ακολουθεί τη λογική της (3.171) και επομένως μπορεί να ενταχθεί σ' αυτή επαυξάνοντας τις διαστάσεις των μητρώων που τη συνθέτουν, με τρόπο όμοιο με αυτό που εντάχθηκαν οι «στρεπτικοί» όροι στο μητρώο δυσκαμψίας του εσωτερικού του στοιχείου (Σχέση 3.219).

Εντός του εύρους των στερεών βραχιόνων η συστροφή είναι σταθερή και επομένως η συνισταμένη στρεπτική ροπή – αντίδραση που μεταβιβάζεται από το έδαφος είναι ίση με $(k_{xx}\varphi_{x1})d_1$ για το βραχίονα (0 – 2), και $(k_{xx}\varphi_{x4})d_2$ για το βραχίονα (3 – 5).

$$\begin{bmatrix} M_{t1} \\ \cdots \\ M_{t4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{t2} \\ \cdots \\ M_{t3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx}d_1 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & k_{xx}d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{x1} \\ \cdots \\ \varphi_{x4} \end{bmatrix} \text{ ή} \tag{3.227α}$$

$$[S_t] = [T_t]^T [S_{t(εσωτ)}] + [K_{t(εδαφ)}][\varphi_x] \tag{3.227β}$$

Από την (3.227α) προκύπτει το συμπέρασμα ότι ο συσχετισμός των στρεπτικών ροπών των βοηθητικών κόμβων και των βασικών κόμβων είναι ανεξάρτητος της θέσης των τελευταίων εντός των βραχιόνων (δηλαδή ανεξάρτητος των παραμέτρων ξ_1, ξ_2). Όπως και στην περίπτωση των συστροφών έτσι και στην περίπτωση των στρεπτικών ροπών, η σχέση (3.227β) μπορεί να ενταχθεί εντός της (3.188).



Σχήμα 3.25. Συσχετισμός των στρεπτικών ροπών που αναπτύσσονται στους βοηθητικούς κόμβους 2, 3 με τις αντίστοιχες ροπές των βασικών κόμβων του στοιχείου 1, 4.

Από τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα ότι όλοι οι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί που παρουσιάζονται στην Παράγραφο 3.6.2 και καταλήγουν στον σχηματισμό του μητρώου δυσκαμψίας του γενικευμένου στοιχείου μπορούν να εκτελεστούν και με τα μητρώα που αφορούν τη στρέψη του στοιχείου. Έτσι αν $[K_{t(εσωτ)}]$ είναι το μητρώο δυστρεψίας του εσωτερικού τμήματος του στοιχείου (που δίνεται από τη σχέση 3.223), και $[K_t]$ το αντίστοιχο μητρώο του γενικευμένου στοιχείου τότε θα ισχύει:

$$[K_t] = [T_t]^T [K_{t(εσωτ)}][T_t] + [K_{t(εδαφ)}] \tag{3.228}$$

Η σχέση (3.228) είναι ανάλογη της (3.196) και μπορεί να ενταχθεί σ' αυτή κατ' αντιστοιχία με τη σχέση (3.219). Πρέπει επίσης να επισημανθεί ότι το μητρώο $[K_{t(εδαφ)}]$ μπορεί να ενταχθεί είτε στο μητρώο $[K^{εσ}{}_{εδαφ}]$ είτε στο $[K^{εξ}{}_{εδαφ}]$.

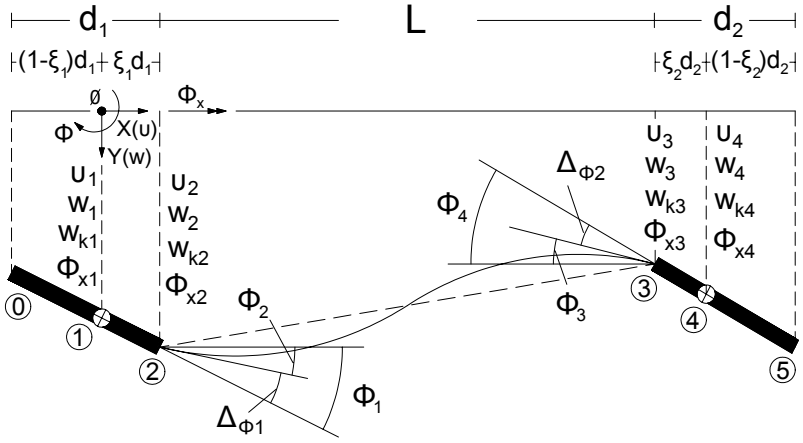
Τέλος πρέπει να τονιστεί ότι λαμβάνοντας υπόψη και τους στρεπτικούς βαθμούς ελευθερίας θα πρέπει να γίνουν επεκτάσεις, και στα μητρώα φόρτισης που σχηματίστηκαν στην Παράγραφο 3.5. Επειδή όμως δεν θεωρείται ότι έχει πρακτική αξία ο σχηματισμός μητρώων στρεπτικής φόρτισης, η επέκταση των

υπαρχόντων μητρώων συνίσταται απλώς στην προσθήκη δυο μηδενικών όρων στα υπάρχοντα μητρώα φόρτισης.

3.6.4.2. Οι αξονικοί βαθμοί ελευθερίας

Στην παρούσα παράγραφο θα γίνει μια ακόμα γενίκευση των μητρώων δυσκαμψίας και φόρτισης που σχηματίστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, με την θεώρηση των αξονικών βαθμών ελευθερίας του στοιχείου και άρση της παραδοχής της ατένειας (EF=πεπ.). Το πλήθος των βαθμών ελευθερίας του στοιχείου ανέρχεται έτσι σε 10 (Σχήμα 3.26).

Όπως και στην περίπτωση της προσθήκης των στρεπτικών βαθμών ελευθερίας, έτσι και στην παρούσα περίπτωση, η προσθήκη των αξονικών βαθμών ελευθερίας μπορεί να γίνει είτε στα πλαίσια της θεωρίας α' είτε στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης. Κατά την ανάλυση στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης – η οποία θα πραγματοποιηθεί στην παρούσα παράγραφο – δεν υφίσταται σύζευξη της καμπτικής με την αξονική επιπόνηση. Επομένως, η επέκταση του μητρώου δυσκαμψίας είναι ανάλογης μορφής με την επέκταση που πραγματοποιήθηκε με την προσθήκη των στρεπτικών βαθμών ελευθερίας (σχέση 3.219). Πρέπει επίσης να τονιστεί ότι αφού η ανάλυση πραγματοποιείται στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης, το υπομητρώο των όρων της αξονικής επίπονησης θα συνδυαστεί με το υπομητρώο των καμπτικών όρων που σχηματίστηκε επίσης με βάση τη θεωρία α' τάξης (βλέπε Παραγράφους 3.4.1.2 και 3.4.2.2).

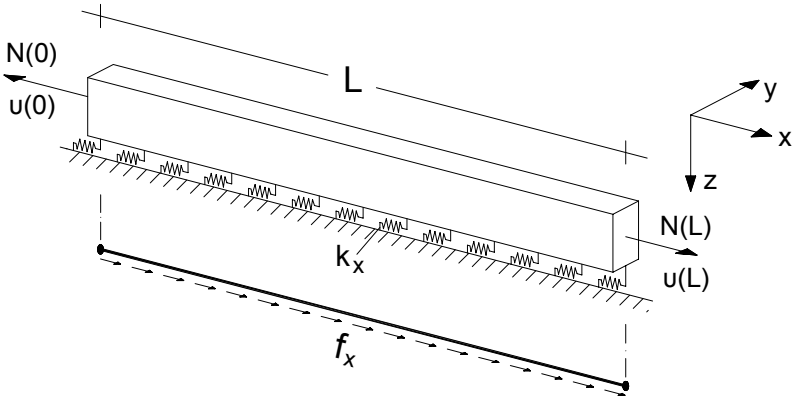


Σχήμα 3.26. Οι βαθμοί ελευθερίας του γενικευμένου στοιχείου με την προσθήκη της στρεπτικής και της αξονικής επιπόνησης.

Στην περίπτωση που η ανάλυση πραγματοποιηθεί στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης, τότε η κατάστρωση των εξισώσεων ισορροπίας οδηγεί σε σύστημα διαφορικών εξισώσεων το οποίο δεν μπορεί να διασπαστεί σε εξισώσεις ανεξάρτητες μεταξύ τους (Hees et al. (1979) σελ. 125)). Αυτό σημαίνει ότι το μητρώο δυσκαμψίας που θα προκύψει από την ανάλυση αυτή δεν θα είναι αποτέλεσμα μιας απλής σύνθεσης – παράθεσης ενός υπομητρώου που εμπεριέχει όρους που αντιστοιχούν στην καμπτική επιπόνηση και ενός υπομητρώου με τους όρους της αξονικής επιπόνησης. Επομένως στην περίπτωση αυτή απαιτείται μια ιδιαίτερα πολύπλοκη διαδικασία επίλυσης του συστήματος και σχηματισμού του μητρώου δυσκαμψίας στο οποίο οι όροι που συνδέουν τους αξονικούς βαθμούς ελευθερίας με τα μεγέθη καμπτικής επιπόνησης και

αντιστρόφως, δεν είναι μηδενικοί. Έτσι απαιτείται μια εκ νέου ανάλυση καθώς δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα μητρώα δυσκαμψίας που σχηματίστηκαν στην Παράγραφο 3.4 του παρόντος κεφαλαίου με την παραδοχή της ατένειας.

Με δεδομένο το ότι η όλη ανάλυση που προηγήθηκε είναι αλληλένδετη με τη θεώρηση της έδρασης του στοιχείου επί ελαστικού υποβάθρου, θα θεωρηθεί για λόγους συμβατότητας ότι το στοιχείο εδράζεται ελαστικώς και αξονικά (Σχήμα 3.27). Η θεώρηση προσομοιώματος τριών παραμέτρων για την αξονική ελαστική έδραση κρίνεται υπερβολική γι' αυτό και υιοθετείται εδώ αξονική ελαστική έδραση τύπου Winkler που υλοποιείται από ανεξάρτητα μεταξύ τους οριζόντια γραμμικά ελατήρια σε απειροστή απόσταση το ένα από το άλλο.



Σχήμα 3.27. Αξονική έδραση του στοιχείου επί οριζοντίων ανεξάρτητων μεταξύ τους ελατηρίων.

Ακολουθώντας την διαδικασία που παρουσιάστηκε και στις προηγούμενες παραγράφους, θα παρουσιαστεί κατά πρώτο λόγο το μητρώο των αξονικών δυνάμεων που αφορούν το εσωτερικό τμήμα του γενικευμένου στοιχείου, και εν συνεχεία θα ακολουθήσει η θεώρηση της επιρροής των στερεών βραχιόνων.

<u>Εσωτερικό τμήμα του στοιχείου</u>

Η διαφορική εξίσωση που διέπει την αξονική επιπόνηση στοιχείου δοκού με συνεχή αξονική έδραση αποτελούμενη από οριζόντια ελατήρια σταθεράς k_x (Σχήμα 3.27) στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης, είναι γνωστή από τη βιβλιογραφία (βλέπε π.χ. Der Ingenieurbau (1995)):

$$-EF\frac{d^2\upsilon}{dx^2}+k_x\upsilon=0 \tag{3.229}$$

Όπου F το εμβαδό της διατομής. Κατ' αντιστοιχία με τις υπόλοιπες εδαφικές σταθερές, η σταθερά k_x των αξονικών ελατηρίων θεωρείται ότι είναι ανάλογη του πλάτους b της δοκού, δηλαδή $k_x=K_xb$. Η σταθερά K_x έχει διαστάσεις [kN/m^3] κατ' αντιστοιχία με τις διαστάσεις των σταθερών k, c των δυο στρώσεων των κατακόρυφων ελατηρίων του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων.

Από την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης προκύπτει το μητρώο των αξονικών δυνάμεων το οποίο είναι επίσης γνωστό από τη βιβλιογραφία (βλέπε π.χ. Der Ingenieurbau (1995)):

$$[K_\upsilon]=\frac{\sqrt{k_xEF}}{\sinh(\lambda_\upsilon L)}\begin{bmatrix}\cosh(\lambda_\upsilon L) & -1\\ -1 & \cosh(\lambda_\upsilon L)\end{bmatrix} \tag{3.230}$$

Όπου: $\lambda_\upsilon = \sqrt{k_x / EF}$

<u>Αξονική επιπόνηση του γενικευμένου στοιχείου – Θεώρηση των απολύτως στερεών βραχιόνων</u>

Για τη θεώρηση των απολύτως στερεών βραχιόνων του γενικευμένου στοιχείου, θα ακολουθηθεί – όπως και στην περίπτωση των στρεπτικών βαθμών ελευθερίας – η μέθοδος που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 3.6.2.1. Έτσι σε πρώτο στάδιο θα σχηματιστούν οι μητρωικές σχέσεις που συνδέουν τις αξονικές μετακινήσεις υ_2, υ_3 των βοηθητικών κόμβων 2, 3 με τις αντίστοιχες μετακινήσεις υ_1, υ_4 των βασικών κόμβων 1, 4 (Σχήμα 3.28). Λόγω της ατένειας των απολύτως στερεών βραχιόνων ισχύει:

$$\begin{bmatrix} \upsilon_2 \\ \cdots \\ \upsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \cdots \\ \upsilon_4 \end{bmatrix} \text{ ή} \tag{3.231α}$$

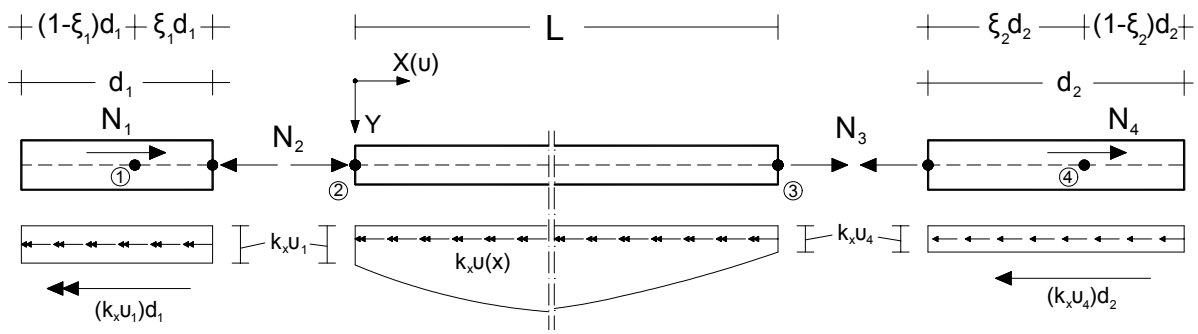
$$\left\lfloor \upsilon_{(\varepsilon\sigma\omega\tau)} \right\rfloor = \left[T_\upsilon \right] \left[\upsilon \right] \tag{3.231β}$$

Όσον αφορά την αντίστοιχη σχέση για τα αξονικά φορτία, λόγω και πάλι της ατένειας των απολύτως στερεών βραχιόνων, ισχύει (Σχήμα 3.28):

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ \cdots \\ N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_2 \\ \cdots \\ N_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x d_1 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & k_x d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \cdots \\ \upsilon_4 \end{bmatrix} \text{ ή} \tag{3.232α}$$

$$\left[S_\upsilon \right] = \left[T_\upsilon \right]^T \left[S_{\upsilon(\varepsilon\sigma\omega\tau)} \right] + \left[K_{\upsilon(\varepsilon\delta\alpha\varphi)} \right] \left[\upsilon \right] \tag{3.232β}$$

Όπως και στην περίπτωση των στρεπτικών βαθμών ελευθερίας, από την παραπάνω σχέση προκύπτει το συμπέρασμα ότι ο συσχετισμός των αξονικών δυνάμεων των βοηθητικών και των βασικών κόμβων είναι ανεξάρτητος της θέσης των τελευταίων εντός των βραχιόνων (δηλαδή ανεξάρτητος των παραμέτρων ξ_1, ξ_2).



Σχήμα 3.28. Συσχετισμός των αξονικών δυνάμεων που αναπτύσσονται στους βοηθητικούς κόμβους 2, 3 με τις αντίστοιχες δυνάμεις των βασικών κόμβων του στοιχείου 1, 4.

Είναι προφανής η αναλογία των παραπάνω μητρωικών σχέσεων με τις αντίστοιχες μητρωικές σχέσεις που σχηματίστηκαν για την περίπτωση των στρεπτικών βαθμών ελευθερίας. Επομένως εκτελώντας τους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 3.6.2.1 προκύπτει η παρακάτω σχέση που είναι ανάλογη της (3.228):

$$\left[K_u \right] = \left[T_u \right]^T \left[K_{u(\varepsilon\sigma\omega\tau)} \right] \left[T_u \right] + \left[K_{u(\varepsilon\delta\alpha\varphi)} \right] \tag{3.233}$$

Η παραπάνω σχέση είναι ανάλογη της (3.196) και μπορεί να ενταχθεί σ' αυτή κατ' αντιστοιχία με την αντίστοιχη σχέση που αφορά τη στρέψη. Πρέπει επίσης να επισημανθεί ότι το μητρώο $[K_{\upsilon(\varepsilon\delta\alpha\varphi)}]$ μπορεί να ενταχθεί είτε στο μητρώο $[K^{\varepsilon\sigma}{}_{\varepsilon\delta\alpha\varphi}]$ είτε στο $[K^{\varepsilon\xi}{}_{\varepsilon\delta\alpha\varphi}]$.

Θα πρέπει να υπεθυμιστεί η τελική μορφή του γενικευμένου μητρώου δυσκαμψίας στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης μετά την προσθήκη των στρεπτικών και των αξονικών βαθμών ελευθερίας:

$$[K]=\begin{bmatrix} \text{Όροι κάμπτικης επιπόνησης} & 0 & 0 \\ 0 & \text{Όροι στρεπτικής επιπόνησης} & 0 \\ 0 & 0 & \text{Όροι αξονικής επιπόνσης} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [K_b] & [0] & [0] \\ [0] & [K_t] & [0] \\ [0] & [0] & [K_\upsilon] \end{bmatrix} \tag{3.234}$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί – κυρίως για λόγους πληρότητας – ότι η άρση της παραδοχής της ατένειας που έγινε στην παρούσα παράγραφο, δίνει τη δυνατότητα συμπλήρωσης του μητρώου φόρτισης για ανομοιόμορφη μεταβολή θερμοκρασίας, που σχηματίστηκε στην Παράγραφο 3.5.4. Το μητρώο εκείνο εμπεριέχει τις δυνάμεις που αναπτύσσονται από την εμπόδιση της καμπύλωση του άξονα του στοιχείου. Στην παρούσα παράγραφο το μητρώο θα εμπλουτιστεί και με τις αξονικές δυνάμεις που αναπτύσσονται λόγω της εμπόδισης της αξονικής μήκυνσης ή βράχυνσης που προκαλείται από την ομοιόμορφη μεταβολή θερμοκρασίας $T=t_m$ του κεντροβαρικού άξονα του στοιχείου (Σχήμα 3.10).

Όπως είναι γνωστό από την στατική των γραμμικών φορέων, οι αναπτυσσόμενες αξονικές δυνάμεις λόγω σταθερής θερμοκρασιακής μεταβολής $T=t_m$ στα άκρα στοιχείου με ακλόνητες οριζόντιες στηρίξεις δίνονται από τη σχέση:

$$N^{(T)}(0)=-N^{(T)}(L)=EF\alpha t_m \tag{3.235}$$

(Στην παραπάνω σχέση τα πρόσημα αντιστοιχούν στο σύστημα αναφοράς του σχήματος 3.28).

Έτσι στην περίπτωση κατά την οποία ένα στοιχείο δοκού με στροφικά ελατήρια στα άκρα του και με δυστένεια EF=πεπ. υπόκειται σε ανομοιόμορφη θερμοκρασιακή μεταβολή Δt τότε στα άκρα του εμφανίζονται αφενός μεγέθη καμπτικής έντασης – τα οποία υπολογίζονται από το μητρώο φόρτισης (3.153) – και αφετέρου οι αξονικές δυνάμεις της σχέσης (3.235). Επομένως το μητρώο φόρτισης που λαμβάνει υπόψη συνολικά την ένταση που αναπτύσσεται από την θερμοκρασιακή μεταβολή Δt δίνεται από τη σχέση:

$$\left[P^{(\Delta t)}\right]^T=\left[V^{(\Delta t)}(0)\ \vdots\ M^{(\Delta t)}(0)\ \vdots\ V_G^{(\Delta t)}(0)\ \vdots\ V^{(\Delta t)}(L)\ \vdots\ M^{(\Delta t)}(L)\ \vdots\ V_G^{(\Delta t)}(L)\ \vdots\ 0\ \vdots\ 0\ \vdots\ N^{(T)}(0)\ \vdots\ N^{(T)}(L)\right] \tag{3.236}$$

(Στην παραπάνω σχέση έχουν ενταχθεί και οι μηδενικοί όροι που αντιστοιχούν στις στρεπτικές ροπές κατ' αντιστοιχία με τη σχέση (3.234)).

3.7. Στατική σύμπτυξη μητρώων δυσκαμψίας και φόρτισης

Στην Παράγραφο 3.4 του παρόντος κεφαλαίου σχηματίστηκε το μητρώο δυσκαμψίας για δοκό εδραζόμενη επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων, ενώ στην Παράγραφο 3.6 πραγματοποιήθηκε η γενίκευση του με την προσθήκη αφενός των απολύτως στερεών βραχιόνων και των στροφικών ελατηρίων, και αφετέρου με την θεώρηση των στρεπτικών και των αξονικών βαθμών ελευθερίας ειδικά στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης.

Λόγω της ιδιομορφίας του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων στους βαθμούς ελευθερίας του στοιχείου υπεισέρχεται και η κατακόρυφη μετατόπιση του διατμητικού στρώματος. Το γεγονός αυτό καθιστά τα μητρώα δυσκαμψίας στοιχείων δοκού επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων μη συμβατά με τα υπόλοιπα συνήθη στοιχεία δοκού, καθώς εμπεριέχουν έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας. Πιο συγκεκριμένα ένα επίπεδο στοιχείο δοκού επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων χωρίς τη θεώρηση των αξονικών βαθμών ελευθερίας έχει έξι βαθμούς ελευθερίας, ενώ ένα αντίστοιχο συμβατικό επίπεδο στοιχείο έχει τέσσερις. Προκειμένου επομένως να καταστεί το νέο στοιχείο συμβατό με τα κλασσικά στοιχεία δοκών θα πρέπει να υποστεί στατική σύμπτυξη. Θα πρέπει δηλαδή να απαλειφθούν εκείνοι οι βαθμοί ελευθερίας οι οποίοι δεν έχουν αντίστοιχους τους στα κλασσικά στοιχεία δοκού. Έτσι θα απαλειφθούν οι όροι που αντιστοιχούν στις μετακίνησεις w_k του διατμητικού επιπέδου. Πρέπει να τονιστεί ότι η στατική σύμπτυξη ως μετασχηματισμός δεν εισάγει καμία προσέγγιση, καθώς είναι απλώς ένας πολλαπλασιασμός μεταξύ μητρώων.

Με κατάλληλη αναδιάταξη των όρων των μητρώων δυσκαμψίας και φόρτισης που σχηματίστηκαν στις Παραγράφους 3.4 και 3.5 αντίστοιχα, η σχέση των μεγεθών έντασης και παραμόρφωσης των άκρων ενός στοιχείου που φορτίζεται από τυχούσα εξωτερική φόρτιση (π.χ. για τη δοκό Timoshenko, Παράγραφος 3.4.1.1α) σε ανεπτυγμένη μορφή είναι:

$$\begin{bmatrix} M(0) \\ V(0) \\ M(L) \\ V(L) \\ V_G(0) \\ V_G(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ & \text{Συμ.} & & & K_{55} & K_{56} \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(0) \\ w(0) \\ \psi(L) \\ w(L) \\ w_k(0) \\ w_k(L) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^{(L)}(0) \\ V^{(L)}(0) \\ M^{(L)}(L) \\ V^{(L)}(L) \\ V_G^{(L)}(0) \\ V_G^{(L)}(L) \end{bmatrix} \tag{3.237}$$

Η παραπάνω μητρωική σχέση μπορεί να γραφεί σε συμβολική μορφή ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \{S_B\} \\ \{S_{SL}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{BB}] & [K_{SLB}] \\ [K_{SLB}]^T & [K_{SLSL}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_B\} \\ \{u_{SL}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{P_B\} \\ \{P_{SL}\} \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{matrix} [K_{BB}]\{u_B\} + [K_{SLB}]\{u_{SL}\} = \{S_B\} - \{P_B\} & (3.238\alpha) \\ [K_{SLB}]^T\{u_B\} + [K_{SLSL}]\{u_{SL}\} = \{S_{SL}\} - \{P_{SL}\} & (3.238\beta) \end{matrix}$$

Στόχος της στατικής σύμπτυξης στην συγκεκριμένη περίπτωση, είναι η απαλοιφή του υπομητρώου $\{u_{SL}\}$ το οποίο περιέχει του βαθμούς ελευθερίας που αντιστοιχούν στις μετακινήσεις του διατμητικού επιπέδου. Για το σκοπό αυτό επιλύεται η (3.238β) ως προς το διάνυσμα $\{u_{SL}\}$:

$$\{u_{SL}\} = [K_{SLSL}]^{-1}\{S_{SL}\} - [K_{SLSL}]^{-1}\{P_{SL}\} - [K_{SLSL}]^{-1}[K_{SLB}]^{T}\{u_B\} \tag{3.239}$$

Με αντικατάσταση του $\{u_{SL}\}$ από την παραπάνω σχέση στην (3.238α) και με τους κατάλληλους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς, προκύπτει:

$$\left\{[K_{BB}] - [K_{SLB}][K_{SLSL}]^{-1}[K_{SLB}]^{T}\right\}\{u_B\} + \{P_B\} - [K_{SLB}][K_{SLSL}]^{-1}\{P_{SL}\} = \{S_B\} - [K_{SLB}][K_{SLSL}]^{-1}\{S_{SL}\} \tag{3.240α}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί σε συμπτυγμένη μορφή ως εξής:

$$[\tilde{K}]\{u_B\} + \{\tilde{P}\} = \{\tilde{S}\} \tag{3.240β}$$

Όπου τα μητρώα:

$$[\tilde{K}] = [K_{BB}] - [K_{SLB}][K_{SLSL}]^{-1}[K_{SLB}]^{T} \tag{3.241α}$$

$$\{\tilde{P}\} = \{P_B\} - [K_{SLB}][K_{SLSL}]^{-1}\{P_{SL}\} \tag{3.241β}$$

$$\{\tilde{S}\} = \{S_B\} - [K_{SLB}][K_{SLSL}]^{-1}\{S_{SL}\} \tag{3.241γ}$$

είναι αντίστοιχα το συμπτυγμένο μητρώο δυσκαμψίας, το συμπτυγμένο μητρώο φόρτισης, και το συμπτυγμένο μητρώο των επιράβδιων δυνάμεων του στοιχείου.

Το συμπτυγμένο μητρώο δυσκαμψίας της σχέσης (3.241α) είναι το μητρώο που περιέχει τους όρους που αντιστοιχούν στην καμπτική επιπόνηση του στοιχείου, και επομένως μπορεί να συνδυαστεί με τα μητρώα που αντιστοιχούν στους στρεπτικούς και αξονικούς βαθμούς ελευθερίας – που σχηματίστηκαν στις Παραγράφους 3.6.4.1. και 3.6.4.2. – σχηματίζοντας έτσι ένα γενικευμένο, ως προς τους βαθμούς ελευθερίας, στοιχείο.

Πρέπει τέλος να τονιστεί ότι η παραπάνω διαδικασία η οποία παρουσιάστηκε για το εσωτερικό του γενικευμένου στοιχείου μπορεί να εφαρμοστεί και για το σύνολο του.

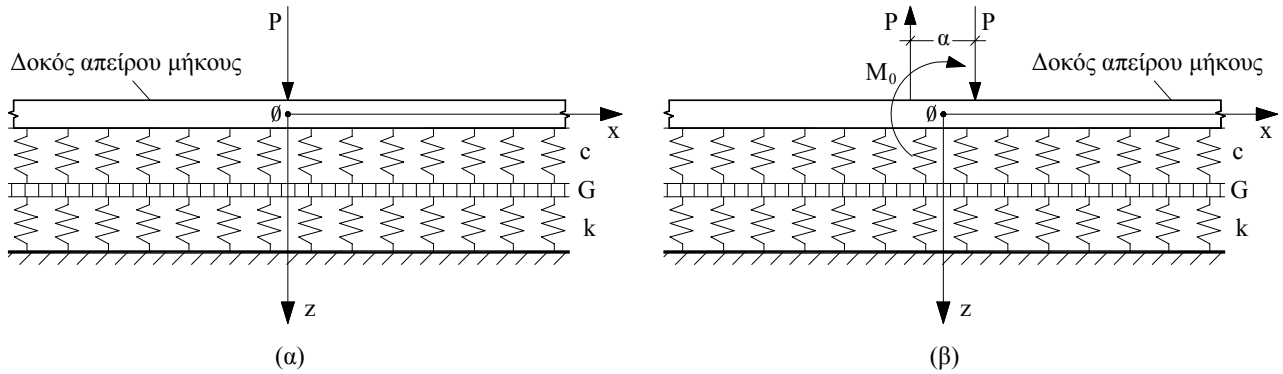
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Εφαρμογές της επίλυσης του προβλήματος κάμψης δοκών επί υποβάθρου τριών παραμέτρων

Στο κεφάλαιο αυτό θα δοθούν εφαρμογές των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα της κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων και θα γίνει μια αναφορά στα προβλήματα κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων. Πιο συγκεκριμένα, θα γίνει αρχικά εφαρμογή της επίλυσης των εξισώσεων στο πρόβλημα κάμψης δοκών «απείρου» μήκους επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων, η λύση του οποίου δεν είναι διαθέσιμη στη βιβλιογραφία. Κατόπιν θα δοθεί η εφαρμογή της επιλύουσας εξίσωσης για προβλήματα δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Vlasov με την θεώρηση και των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου. Η αναφορά στο προσομοίωμα του Vlasov με τη θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων θα γίνει σε πρώτο στάδιο με βάση την επίλυση του προβλήματος όπως αυτή είναι γνωστή από τη βιβλιογραφία. Σε δεύτερο στάδιο θα παρουσιαστεί για πρώτη φόρα μια διαφορετική προσέγγιση του ίδιου προβλήματος και θα δοθούν οι αντίστοιχες διαφορικές εξίσωσεις.

Τέλος, θα γίνει μια αναφορά σε προβλήματα κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων, τα οποία αποτελούν «οριακή» περίπτωση των αντιστοίχων προβλημάτων κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων. Η αναφορά αυτή αφορά αρχικά στην παράθεση των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα και την επίλυση – διερεύνηση τους. Κατόπιν, παρατίθεται μια συνοπτική αλλά διεξοδική επισκόπηση των διαθέσιμων στοιχείων της βιβλιογραφίας και επισημαίνονται τα υφιστάμενα κενά για τα οποία και δίνονται οι κατάλληλες λύσεις.

4.1. Επίλυση του προβλήματος δοκού Timoshenko και Euler «απείρου» μήκους επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων.

Στην παρούσα παράγραφο θα γίνει εφαρμογή των λύσεων των εξισώσεων (3.8α) και (3.8β) για την επίλυση του προβλήματος κάμψης δοκού Timoshenko «απείρου» μήκους υπό μοναχική κατακόρυφη δύναμη P ή ροπή M (Σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1. Δοκός «απείρου» μήκους υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση (α), και υπό μοναχική ροπή (β).

Από τις εκφράσεις των μεγεθών έντασης και μετακίνησης που θα προκύψουν, θα γίνει αναγωγή στις αντίστοιχες εκφράσεις που αφορούν τη δοκό Euler.

4.1.1. Δοκός Timoshenko υπό μοναχική κατακόρυφη δύναμη.

Πρόκειται για συμμετρικό πρόβλημα, και για τον λόγο αυτό είναι δυνατή η επίλυση του δεξιού τμήματος του συστήματος δοκός – ελαστικό υπόβαθρο. Κατά συνέπεια, θα πρέπει να προσδιοριστούν οι συνοριακές συνθήκες τόσο στο σημείο εφαρμογής του φορτίου (x=0, βλέπε σχήμα 4.1α) όσο και για $x \to +\infty$.

Ως γνωστόν (Παράγραφος 3.4.1.1), η επίλυση του προβλήματος κάμψης δοκού Timoshenko επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων επιτυγχάνεται με τον προσδιορισμό των βασικών παραμέτρων – μεγεθών μετακίνησης w, w_k, ψ από τις σχέσεις (3.61α – γ). Για την παρούσα ανάλυση θα γίνει η παραδοχή, ότι η μορφή των συναρτήσεων που απαρτίζουν τις εκφράσεις αυτές αντιστοιχεί στην περίπτωση λύσης A_1, η οποία – όπως αποδείχθηκε και στην αντίστοιχη παράγραφο της διερεύνησης των περιπτώσεων λύσης των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος (Παράγραφος 3.3.2) – αποτελεί την περίπτωση λύσης που αντιστοιχεί στις συνήθεις τιμές των εδαφικών παραμέτρων. Επομένως:

$$w_k(x) = C_1 e^{R_1 x} + C_2 e^{-R_1 x} + C_3 e^{Rx}\cos(Qx) + C_4 e^{Rx}\sin(Qx) + C_5 e^{-Rx}\cos(Qx) + C_6 e^{-Rx}\sin(Qx) \tag{4.1α}$$

$$w(x) = C_1 f_{1w} + C_2 f_{2w} + C_3 f_{3w} + C_4 f_{4w} + C_5 f_{5w} + C_6 f_{6w} \tag{4.1β}$$

$$\psi(x) = C_1 f_{1\psi} + C_2 f_{2\psi} + C_3 f_{3\psi} + C_4 f_{4\psi} + C_5 f_{5\psi} + C_6 f_{6\psi} \tag{4.1γ}$$

(Οι συναρτήσεις f_{iw}, $f_{i\psi}$ δίνονται από τις σχέσεις (3.63α) και (3.63β)).

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η επίλυση του προβλήματος απαιτεί τον προσδιορισμό έξι (6) σταθερών ολοκλήρωσης. Από την μορφή της φόρτισης συνάγεται το συμπέρασμα ότι για $x \to +\infty$ ισχύει:

$$w = w_k = 0 \tag{4.2}$$

Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να μηδενίζονται εκείνες οι σταθερές ολοκλήρωσης που αντιστοιχούν σε εκθετικές συναρτήσεις οι οποίες έχουν ως εκθέτη θετικό αριθμό. Επομένως, επειδή το πρόβλημα επιλύεται για θετικές τιμές του x, θα πρέπει $C_1=C_3=C_4=0$. Οι υπόλοιπες σταθερές θα προσδιοριστούν από τις συνοριακές συνθήκες στο σημείο x=0. Ο προσδιορισμός των συνοριακών αυτών συνθηκών μπορεί να γίνει με την εφαρμογή της αρχής της στάσιμης τιμής της ελαστικής ενέργειας του συστήματος δοκός – υπόβαθρο.

Η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης του συστήματος δοκός – ελαστικό υπόβαθρο δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\pi = \int_0^{+\infty} EI\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 dx + \int_0^{+\infty} \Phi\left(\frac{dw}{dx} - \psi\right)^2 dx + \int_0^{+\infty} c(w - w_k)^2 dx + \int_0^{+\infty} k w_k^2 dx + \int_0^{+\infty} G\left(\frac{dw_k}{dx}\right)^2 dx - P_0 w(0)$$

Σχηματίζοντας την πρώτη μεταβολή του παραπάνω συναρτησιακού προκύπτει:

$$\frac{1}{2}\pi = \int_0^{+\infty}\left[-EI\frac{d^2\psi}{dx^2} + \Phi\left(\psi - \frac{dw}{dx}\right)\right]\delta\psi dx + \int_0^{+\infty}\left[c(w_k - w) + k w_k - G\frac{d^2 w_k}{dx^2}\right]\delta w_k dx + \int_0^{+\infty}\left[c(w - w_k) - \Phi\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx} - \psi\right)\right]\delta w dx +$$

$$+ \left[V_G(x)\delta w_k\right]_{+\infty} + \left[M(x)\delta\psi\right]_{+\infty} + \left[V(x)\delta w\right]_{+\infty} - \left[V_G(x)\delta w_k\right]_0 - \left[M(x)\delta\psi\right]_0 - \left[V(x)\delta w + (P_0/2)\delta w\right]_0$$

Από τους ολοκληρωτές των ολοκληρωμάτων της πρώτης μεταβολής προκύπτουν οι διαφορικές εξισώσεις (3.6α – γ) οι οποίες παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 3.2.1 και εκφράζουν τις εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος. Οι όροι στις αγκύλες με δείκτες (+∞) καθορίζουν τις συνοριακές συνθήκες για $x \to +\infty$ οι οποίες είναι προφανείς. Τέλος οι όροι στις αγκύλες με δείκτη 0 καθορίζουν τις ζητούμενες συνοριακές συνθήκες για x=0. Πιο συγκεκριμένα στο σημείο x=0 η ροπή δεν μπορεί να έχει μηδενική τιμή, και επομένως θα πρέπει δψ(0)=0 που σημαίνει ότι ψ(0)=0. Επίσης λόγω της συμμετρίας του προβλήματος θα πρέπει να ισχύει $(dw_k/dx)_{x=0}=0$. Τέλος επειδή $w(0)\neq 0 \to \delta w(0) \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι η τρίτη συνοριακή συνθήκη στο σημείο x=0 είναι $V(0) = -P_0/2$.

Από την εφαρμογή της αρχής αυτής (βλέπε προηγούμενη σελίδα) προκύπτουν αφενός δυο συνθήκες που αντιστοιχούν στην συμμετρική μορφή του προβλήματος:

$$\psi(0) = 0 \quad \text{και} \quad \left.\frac{dw_k}{dx}\right|_{x=0} = 0 \tag{4.3α, β}$$

ενώ η τρίτη απαιτούμενη συνθήκη προκύπτει από την ισότητα της τέμνουσας δύναμης της δοκού στο σημείο x=0 με το ήμισυ της εξωτερικής φόρτισης P_0. Επομένως:

$$V(0) = \Phi\left(\frac{dw}{dx} - \psi\right)_{x=0} = -EI\left.\frac{d^2\psi}{dx^2}\right|_{x=0} = -\frac{P_0}{2} \tag{4.3γ}$$

Οι συνθήκες (4.3α – γ), συνθέτουν ένα γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με αγνώστους τις εναπομένουσες άγνωστες σταθερές C_2, C_5 και C_6. Μετά τους απαραίτητους μετασχηματισμούς προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις για τα μεγέθη μετακίνησης του προβλήματος:

$$w(x) = \frac{P_0}{D_k}\left\{A_1\left(A_5Q - A_6R\right)e^{-R_1x} + \left[-L_1\cos(Qx) + L_2\sin(Qx)\right]e^{-Rx}\right\} \tag{4.4α}$$

$$L_1 = A_3(A_4Q - A_6R_1) + A_2(A_4R - A_5R_1)$$

$$L_2 = A_2(A_4Q - A_6R_1) - A_3(A_4R - A_5R_1)$$

$$w_k(x) = \frac{P_0}{D_k}\left\{(A_5Q - A_6R)e^{-R_1x} - \left[(A_4Q - A_6R_1)\cos(Qx) + (A_4R - A_5R_1)\sin(Qx)\right]e^{-Rx}\right\} \tag{4.4β}$$

$$\psi(x) = \frac{P_0}{D_k}\left\{-A_4(A_5Q - A_6R)e^{-R_1x} + \left[L_3\cos(Qx) + L_4\sin(Qx)\right]e^{-Rx}\right\} \tag{4.4γ}$$

$$L_3 = -A_6(A_4R - A_5R_1) + A_5(A_4Q - A_6R_1)$$

$$L_4 = A_5(A_4R - A_5R_1) + A_6(A_4Q - A_6R_1)$$

Στις παραπάνω σχέσεις:

$$D_k = 2EI\left[R_1(A_5b_2 - A_6b_1) + R_1^2A_4(A_6R - A_5Q) + A_4(b_1Q - b_2R)\right] \tag{4.4δ}$$

Από τις σχέσεις (4.4α-γ) μπορούν να υπολογιστούν τα εντατικά μεγέθη του προβλήματος όπως ορίζονται από τις σχέσεις (3.59α-γ):

$$M(x) = -\frac{EIP_0}{D_k}\left\{-A_4R_1(A_5Q - A_6R)e^{-R_1x} - \left[(QL_4 - RL_3)\cos(Qx) - (QL_3 + RL_4)\sin(Qx)\right]e^{-Rx}\right\} \tag{4.4ε}$$

$$V(x) = -\frac{EIP_0}{D_k}\left\{A_4R_1^2(A_5Q - A_6R)e^{-R_1x} - \begin{bmatrix}\left[L_3(R^2 - Q^2) - 2RQL_4\right]\cos(Qx) + \\ + \left[L_4(R^2 - Q^2) + 2RQL_3\right]\sin(Qx)\end{bmatrix}e^{-Rx}\right\} \tag{4.4στ}$$

$$V_G(x) = \frac{GP_0}{D_k}\left\{-R_1(A_5Q - A_6R)e^{-R_1x} + \left[S_1\cos(Qx) + S_2\sin(Qx)\right]e^{-Rx}\right\}$$

$$S_1 = R(A_4Q - A_6R_1) - Q(A_4R - A_5R_1) \tag{4.4ζ}$$

$$S_2 = R(A_4R - A_5R_1) + Q(A_4Q - A_6R_1)$$

4.1.2. Δοκός Timoshenko υπό μοναχική ροπή.

Το πρόβλημα της δοκού Timoshenko υπό μοναχική ροπή M_0 επιλύεται, όπως και στην περίπτωση της φόρτισης με μοναχικό κατακόρυφο φορτίο, με εφαρμογή των εξισώσεων (3.61α – γ) σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες. Οι συνθήκες αυτές είναι όμοιες με την περίπτωση φόρτισης με μοναχικό κατακόρυφο φορτίο για $x \to +\infty$. Αντίθετα, στο σημείο x=0 είναι διαφορετικές καθώς ταυτίζονται με τις συνθήκες που αντιστοιχούν στην περίπτωση συμμετρικού φορέα υπό αντισυμμετρική φόρτιση, και επομένως είναι:

$$w = w_k = 0 \tag{4.5α}$$

Η τρίτη απαιτούμενη συνοριακή συνθήκη για το σημείο x=0 είναι:

$$-EI\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=0} = \frac{M_0}{2} \tag{4.5β}$$

(Εδώ θα πρέπει να τονιστεί ότι οι συνοριακές αυτές συνθήκες μπορούν να προκύψουν και από την εφαρμογή της στάσιμης τιμής της ελαστικής ενέργειας του συστήματος δοκός – ελαστικό υπόβαθρο, με διαδικασία που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο και πιο συγκεκριμένα στην σελίδα 202).

Ακολουθώντας την διαδικασία που περιγράφεται και στην Παράγραφο 4.1.1, προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις:

$$w(x) = \frac{M_0(R^2+Q^2)R_1^2}{D_k}\left\{A_1(\alpha_1 Q+\alpha_2 R)e^{-R_1 x} + \left[(L_1 R - L_2 Q)\cos(Qx) + (L_1 Q + L_2 R)\sin(Qx)\right]e^{-Rx}\right\} \tag{4.6α}$$

$$\psi(x) = -\frac{M_0(R^2+Q^2)R_1^2}{D_k}\left\{A_4(\alpha_1 Q+\alpha_2 R)e^{-R_1 x} + e^{-Rx}[(QL_4 - RL_3)\cos(Qx) - (QL_3 + RL_4)\sin(Qx)]\right\} \tag{4.6β}$$

$$w_k(x) = \frac{M_0(R^2+Q^2)R_1^2}{D_k}\left\{(\alpha_1 Q+\alpha_2 R)e^{-R_1 x} - e^{-Rx}[S_3\cos(Qx) - S_4\sin(Qx)]\right\} \tag{4.6γ}$$

$$M(x) = \frac{EIM_0(R^2+Q^2)R_1^2}{D_k}\left\{A_4 R_1(\alpha_1 Q+\alpha_2 R)e^{-R_1 x} - e^{-Rx}[S_1\cos(Qx) + S_2\sin(Qx)]\right\} \tag{4.6δ}$$

$$V(x) = \frac{EIM_0(R^2+Q^2)R_1^2}{D_k}\left\{-A_4 R_1^2(\alpha_1 Q+\alpha_2 R)e^{-R_1 x} + e^{-Rx}[(RS_1 - QS_2)\cos(Qx) + (QS_1 + RS_2)\sin(Qx)]\right\} \tag{4.6ε}$$

$$V_G(x) = \frac{GM_0(R^2+Q^2)R_1^2}{D_k}\left\{-(\alpha_1 Q+\alpha_2 R)R_1 e^{-R_1 x} + e^{-Rx}[(RS_3 + QS_4)\cos(Qx) + (QS_3 - RS_4)\sin(Qx)]\right\} \tag{4.6στ}$$

Όπου:

$$D_k = 2k\left\{(R^2+Q^2)(\alpha_1 Q+\alpha_2 R) + [\alpha_1 Q - (\alpha_2 + 2A_1 Q)R]R_1^2\right\} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} L_1 &= (A_2\alpha_1 - A_3\alpha_2) - A_1(A_2 R + A_3 Q) & L_2 &= (A_3\alpha_1 + A_2\alpha_2) + A_1(A_2 Q - A_3 R) \\ L_3 &= A_5(\alpha_2 + A_1 Q) + A_6(\alpha_1 - A_1 R) & L_4 &= A_6(\alpha_2 + A_1 Q) - A_5(\alpha_1 - A_1 R) \end{aligned} \tag{4.8α}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= (R^2 - Q^2)L_3 - 2RQL_4 & S_2 &= (R^2 - Q^2)L_4 + 2RQL_3 \\ S_3 &= R(\alpha_2 + A_1 Q) + Q(\alpha_1 - A_1 R) & S_4 &= R(\alpha_1 - A_1 R) - Q(\alpha_2 + A_1 Q) \end{aligned} \tag{4.8β}$$

4.1.3. Ειδίκευση των σχέσεων για την περίπτωση δοκού Euler – Bernoulli

Όλες οι παραπάνω σχέσεις των μεγεθών έντασης και μετακίνησης που αφορούν τη δοκό Timoshenko μπορούν να μετασχηματιστούν πολύ εύκολα για την περίπτωση της δοκού Euler – Bernoulli. Για το σκοπό αυτό, αρκεί να σχηματιστούν οι οριακές τιμές όσων παραμέτρων περιέχουν την σταθερά Φ ($\Phi=G_BF'$, βλέπε Παράγραφο 3.2.1.1) η οποία εκφράζει την επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων. Σχηματίζοντας τις οριακές αυτές τιμές για $\Phi\to\infty$ προκύπτουν οι εκφράσεις για την περίπτωση της δοκού Euler – Bernoulli. Στην Παράγραφο 3.4.1.1α δίνονται όλες οι παράμετροι που υπεισέρχονται στις σχέσεις προσδιορισμού των μεγεθών έντασης και μετακίνησης που αντιστοιχούν στην περίπτωση λύσης A_1. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτουν:

$$\lim_{\Phi\to\infty} A_4 = A_1R_1 \tag{4.9α}$$

$$\lim_{\Phi\to\infty} A_5 = \alpha_1 \tag{4.9β}$$

$$\lim_{\Phi\to\infty} A_6 = -\alpha_2 \tag{4.9γ}$$

Έτσι εάν εφαρμοστούν οι (4.9α-γ) στις σχέσεις (4.4α-ζ) και (4.6α-στ), τότε προκύπτουν οι αντίστοιχες εκφράσεις για την περίπτωση της δοκού Euler – Bernoulli. Θα πρέπει τέλος να τονιστεί, ότι κατά το μετασχηματισμό θα πρέπει να ληφθούν υπόψη και οι διαφορετικές τιμές των R_1, R, Q οι οποίες εξαρτώνται από τους συντελεστές J_i των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος οι οποίοι με τη σειρά τους ορίζονται διαφορετικά στις περιπτώσεις δοκών Timoshenko και Euler (βλέπε Πίνακα 3.1). Ωστόσο ο μετασχηματισμός αυτός δεν επηρεάζει την γενική μορφή των (4.4α-ζ) και (4.6α-στ).

4.2. Αναφορά στα προβλήματα κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων.

Στο Κεφάλαιο 1 της παρούσας διατριβής έγινε μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που αφορά στο πρόβλημα της κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων (Παράγραφος 1.2.1.2). Από την επισκόπηση αυτή προέκυψε το συμπέρασμα, ότι τα κενά της βιβλιογραφίας, όσον αναφορά τα μητρώα δυσκαμψίας και φόρτισης για το πρόβλημα της κάμψης δοκών Euler ή Timoshenko, δεν είναι μεγάλα.

Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιαστούν εν συντομία οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα και θα δοθεί μια σχηματική περιγραφή των πεδίων ορισμού των διαφόρων περιπτώσεων λύσης των εξισώσεων αυτών. Θα πρέπει να τονιστεί, ότι ενώ σε βιβλιογραφικές αναφορές που κατέστη δυνατό να εντοπιστούν γίνεται αναφορά στις δυνατές περιπτώσεις λύσης της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος της δοκού Euler (βλέπε π.χ. Karamanlidis και Prakash (1989)), σε καμία από αυτές δεν παρουσιάζεται μια διερεύνηση των περιοχών ορισμού των λύσεων αυτών. Ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν και για την περίπτωση της δοκού Timoshenko, και έτσι οι διερευνήσεις αυτές θα δοθούν εδώ για πρώτη φορά.

Στην παράγραφο αυτή θα γίνει επίσης και μια πιο αναλυτική επισκόπηση (από την αντίστοιχη που έγινε στην εισαγωγή) των διαθέσιμων στοιχείων αλλά και των κενών της βιβλιογραφίας όσον αφορά τα μητρώα δυσκαμψίας και φόρτισης και θα δοθούν τα αντίστοιχα στοιχεία που καλύπτουν τα κενά αυτά. Πιο συγκεκριμένα, θα δοθούν οι κλειστές αναλυτικές εκφράσεις για μητρώα δυσκαμψίας που αντιστοιχούν σε όσες περιπτώσεις λύσης της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος δεν είναι διαθέσιμες, και οι αντίστοιχες εκφράσεις για τα μητρώα φόρτισης του γενικευμένου στοιχείου που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 3.5.

4.2.1. Σύντομη αναφορά στην κατάστρωση και επίλυση των εξισώσεων του προβλήματος

Στην Παράγραφο 2.2.2 παρουσιάστηκαν αναλυτικά οι μαθηματικές διατυπώσεις των προσομοιωμάτων δυο παραμέτρων που είναι γνωστά από τη βιβλιογραφία. Η παρουσίαση των εξισώσεων αυτών έγινε για την περίπτωση της απευθείας φόρτισης της επιφάνειας του εδάφους από εξωτερικό φορτίο. Όταν η εισαγωγή της φόρτισης πραγματοποιείται μέσω της κάμψης μιας δοκού, οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος δοκός – ελαστικό υπόβαθρο είναι κατά δυο τάξεις υψηλότερες από τις αντίστοιχες εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα της απευθείας φόρτισης του εδάφους.

Στην περίπτωση της κάμψης δοκού Timoshenko τα άγνωστα μεγέθη μετακίνησης, όπως είναι γνωστό, είναι η κατακόρυφη μετακίνηση w και η καμπτική γωνία στροφής των διατομών ψ. (Υπενθυμίζεται ότι η επιλογή της καμπτικής γωνίας στροφής ως δεύτερου αγνώστου μεγέθους μετακίνησης είναι μια από τις δυνατές επιλογές κατά το σχηματισμό μητρώων δυσκαμψίας δοκών στις οποίες λαμβάνονται υπόψη και οι διατμητικές παραμορφώσεις σύμφωνα με την υπόθεση του Timoshenko (βλέπε Παράγραφο 2.5.2)). Ο υπολογισμός των αγνώστων μεγεθών μετακίνησης γίνεται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$EI\left[1-\frac{(P-G)}{\Phi}\right]\frac{d^4w}{dx^4}+\left[(P-G)-\frac{EIk}{\Phi}\right]\frac{d^2w}{dx^2}+kw+\left(\frac{EI}{\Phi}\right)\frac{d^2p}{dx^2}-p=0 \tag{4.10α}$$

$$EI\left[1-\frac{(P-G)}{\Phi}\right]\frac{d^4\psi}{dx^4}+\left[(P-G)-\frac{EIk}{\Phi}\right]\frac{d^2\psi}{dx^2}+k\psi-\frac{dp}{dx}=0 \tag{4.10β}$$

Όπου k και G είναι η πρώτη και η δεύτερη παράμετρος του εδαφικού προσομοιώματος, ενώ οι υπόλοιποι όροι των εξισώσεων ταυτίζονται με τους όρους της σχέσης (3.1), (Παράγραφος 3.2.1.1). Οι παραπάνω εξισώσεις αφορούν την θεωρία β' τάξης και μπορούν να καταστρωθούν τόσο με τις συνθήκες ισορροπίας ενός απειροστού στοιχείου του συστήματος δοκού – ελαστικού υποβάθρου, όσο και με την εφαρμογή της αρχής της στάσιμης τιμής της ελαστικής ενέργειας. Για την περίπτωση της κάμψης δοκού Euler – Bernoulli η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση προκύπτει από την (4.10α) εάν θεωρηθεί ότι $\Phi \to \infty$:

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} + (P - G)\frac{d^2w}{dx^2} + kw - p = 0 \tag{4.11}$$

(Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση (4.10β) προκύπτει από την παραγώγιση (4.10α) καθώς $dw/dx \equiv \psi$ και επομένως δεν έχει νόημα η επίλυση της).

Από την σύγκριση των (4.10α), (4.10β) με τις (3.7α) και (3.7β) αντίστοιχα, προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι πρώτες αποτελούν ειδική περίπτωση των τελευταίων. Το γεγονός αυτό μπορεί να εξηγηθεί αν γίνει σύγκριση των μηχανικών προσομοιωμάτων του Kerr (Σχήμα 2.13α) και του Pasternak (Σχήμα 2.5). Από τη σύγκριση αυτή καθίσταται σαφές, ότι εάν για την ελατηριακή σταθερά της άνω στρώσης των ελατηρίων του μηχανικού προσομοιώματος του Kerr δοθούν μεγάλες τιμές (και ειδικότερα όταν $c \to \infty$) τα δυο μηχανικά προσομοιώματα είναι πρακτικώς ισοδύναμα. Εάν επομένως στις (3.7α) και (3.7β) θεωρηθεί ότι $c \to \infty$ και εάν ληφθεί υπόψη ότι στην περίπτωση αυτή $w \equiv w_k$ (ότι δηλαδή στην περίπτωση του προσομοιώματος των δυο παραμέτρων οι κατακόρυφες μετακινήσεις της δοκού και της διατμητικής στρώσης ταυτίζονται, όπως προκύπτει από την (3.10) όταν $c \to \infty$), τότε οι εξισώσεις (3.7α), (3.7β) και (3.10) ανάγονται στις (4.10α) και (4.10β). Παρακάτω θα δοθούν κάποιες λεπτομέρειες για την επίλυση και τη διερεύνηση των διαφορικών εξισώσεων (4.10α), (4.10β) και (4.11). Πιο συγκεκριμένα, θα παρουσιαστεί εν συντομία η διαδικασία επίλυσης των ομογενών των εξισώσεων αυτών που έχουν τη γενική μορφή:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + J_1\frac{d^2y}{dx^2} + J_2 y = 0 \tag{4.12}$$

Οι συντελεστές J_1 και J_2 δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

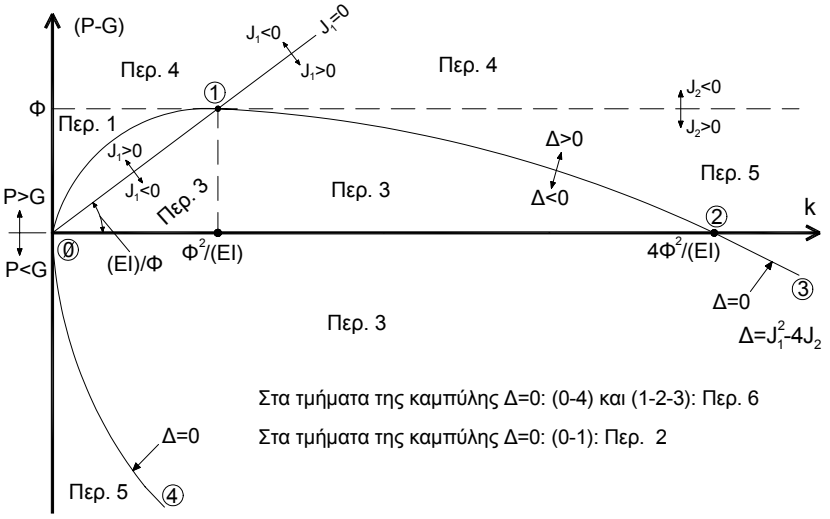
Πίνακας 4.1. Εκφράσεις των συντελεστών J_1, J_2, ανάλογα με τον τύπο της δοκού και την τάξη ανάλυσης

Δοκός / Τάξη ανάλυσης		$\mathbf{J_1}$	$\mathbf{J_2}$
Euler	Α' τάξη	$-\frac{G}{EI}$	$\frac{k}{EI}$
	Β' τάξη	$\frac{(P-G)}{EI}$	$\frac{k}{EI}$
Timoshenko	Α' τάξη	$-\frac{\Phi}{\Phi+G}\left[\frac{G}{EI}+\frac{k}{\Phi}\right]$	$\frac{k\Phi}{EI(\Phi+G)}$
	Β' τάξη	$\frac{\Phi}{\Phi-(P-G)}\left[\frac{(P-G)}{EI}-\frac{k}{\Phi}\right]$	$\frac{k\Phi}{EI[\Phi-(P-G)]}$

Όπως είναι γνωστό η λύση των εξισώσεων της μορφής (4.12) έχει την εξής γενική μορφή:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{4} C_i f_i \tag{4.13}$$

όπου ως γνωστόν C_i είναι οι σταθερές ολοκλήρωσης, ενώ η μορφή των συναρτήσεων $f_i(x)$ εξαρτάται αφενός από τα πρόσημα που λαμβάνουν οι συντελεστές J_1, J_2 και αφετέρου από το πρόσημο της διακρίνουσας $\Delta=J_1^2-4J_2$ της χαρακτηριστικής εξίσωσης της (4.12). Μπορεί να αποδειχθεί (Karamanlidis και Prakash (1989)) ότι για την περίπτωση του στατικού προβλήματος της δοκού Timoshenko οι δυνατές περιπτώσεις λύσης είναι έξι. Οι περιοχές ορισμού των λύσεων αυτών καθώς και οι λεπτομέρειες για τις συναρτήσεις f_i δίνονται παρακάτω:



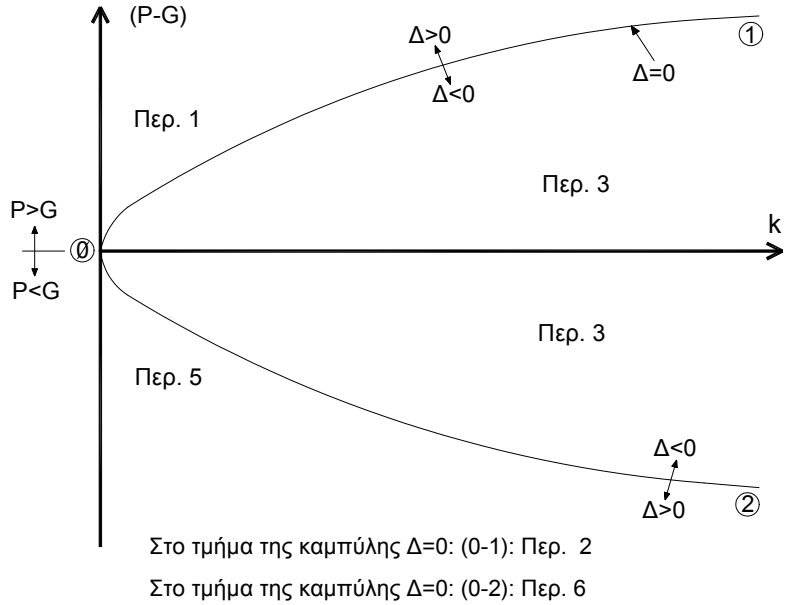
				$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	R	Q
Περ. 1	$J_1>0$	$J_2>0$	$\Delta>0$	cos(Rx)	sin(Rx)	cos(Qx)	sin(Qx)	$\sqrt{(1/2)(J_1-\sqrt{\Delta})}$	$\sqrt{(1/2)(J_1+\sqrt{\Delta})}$
Περ. 2	$J_1>0$	$J_2>0$	$\Delta=0$	cos(Qx)	xcos(Qx)	sin(Qx)	xsin(Qx)	-	$\sqrt{J_1/2}$
Περ. 3	$J_1\geq0$ $J_1<0$	$J_2>0$	$\Delta<0$	$e^{Rx}\cos(Qx)$	$e^{Rx}\sin(Qx)$	$e^{-Rx}\cos(Qx)$	$e^{-Rx}\sin(Qx)$	$\sqrt{\sqrt{(J_2/4)}-(J_1/4)}$	$\sqrt{\sqrt{(J_2/4)}+(J_1/4)}$
Περ. 4	$J_1\geq0$ $J_1<0$	$J_2<0$	$\Delta>0$	e^{Rx}	e^{-Rx}	cos(Qx)	sin(Qx)	$\sqrt{(1/2)(-J_1+\sqrt{\Delta})}$	$\sqrt{(1/2)(J_1+\sqrt{\Delta})}$
Περ. 5	$J_1<0$	$J_2>0$	$\Delta>0$	e^{Rx}	e^{-Rx}	e^{Qx}	e^{-Qx}	$\sqrt{(1/2)(-J_1+\sqrt{\Delta})}$	$\sqrt{(1/2)(-J_1-\sqrt{\Delta})}$
Περ. 6	$J_1<0$	$J_2>0$	$\Delta=0$	e^{Rx}	xe^{Rx}	e^{-Rx}	xe^{-Rx}	$\sqrt{-J_1/2}$	-

Σχήμα 4.2. Περιπτώσεις λύσης και πεδία ορισμού τους για το πρόβλημα της δοκού Timoshenko.

Στο παραπάνω διάγραμμα επελέγη ως οριζόντιος άξονας ο άξονας τιμών της πρώτης εδαφικής παραμέτρου k. Ως κατακόρυφος άξονας επελέγη όχι ο άξονας τιμών της δεύτερης παραμέτρου G αλλά ο άξονας τιμών της διαφοράς P – G. Θα πρέπει να διευκρινισθεί, ότι η επιλογή αυτή έγινε για να εισαχθεί και η παράμετρος αξονικό (θλιπτικό ή εφελκυστικό) φορτίο που επηρεάζει τη λύση της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος. Θα πρέπει επίσης να τονιστεί ότι ο όρος P – G αποκτά την έννοια μιας γενικευμένης αξονικής δύναμης εάν για την προσομοίωση του εδάφους χρησιμοποιηθεί το προσομοίωμα του Filonenko (Παράγραφος 2.2.2.1). Έτσι ορίζεται η γενικευμένη αξονική δύναμη P_{GEN}=P – G που προκύπτει από την αφαίρεση τις τιμής της δεύτερης εδαφικής παραμέτρου από την τιμή της αξονικής φόρτισης που καταπονεί τη δοκό. Θα πρέπει βέβαια να τονιστεί ότι η γενικευμένη αξονική δύναμη δεν θα πρέπει να χρησιμοποιείται

για τον υπολογισμό των μεγεθών διαστασιολόγησης καθώς αποτελεί ένα βοηθητικό μέγεθος και όχι μια πραγματική δύναμη που καταπονεί τη δοκό.

Από το Σχήμα 4.2 καθίσταται σαφές ότι για τις συνήθεις τιμές των εδαφικών παραμέτρων και του αξονικού φορτίου (θλιπτικού ή εφελκυστικού) η αντιστοιχούσα μορφή λύσης είναι η 3 (Περίπτωση 3). Για το λόγο αυτό είναι διαθέσιμοι στη βιβλιογραφία, οι συντελεστές του μητρώου δυσκαμψίας που αντιστοιχούν στη λύση αυτή όπως θα παρουσιαστεί παρακάτω. Από τις υπόλοιπες περιπτώσεις λύσεων, εκείνη που εμφανίζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι η Περίπτωση 1, καθώς όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, το πεδίο ορισμού της αντιστοιχεί σε υψηλές τιμές θλιπτικού φορτίου. Αυτό σημαίνει ότι είναι απαραίτητη σε περίπτωση υπολογισμού των κρισίμων φορτίων λυγισμού διότι σ' αυτήν την περίπτωση η επαναληπτική διαδικασία που απαιτείται μπορεί να οδηγήσει στην ανάγκη επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος για τιμές του αξονικού φορτίου για τις οποίες ορίζεται η περίπτωση λύσης 1. Αξιοσημείωτο είναι και το γεγονός ότι για την τιμή του γενικευμένου αξονικού φορτίου P_{GEN} ίση με την τιμή συντελεστή Φ (ο οποίος ως γνωστόν εκφράζει την επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων) ο συντελεστής J_2 τείνει στο άπειρο ενώ εκατέρωθεν της τιμής αυτής αλλάζει πρόσημο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα για τιμές του $P_{GEN}>\Phi$ να αλλάζει η μορφή της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος και να εμφανίζεται η περίπτωση λύσης 4. Ωστόσο η πιθανότητα εκπλήρωσης της συνθήκης $P_{GEN}>\Phi$ για τις συνήθεις τιμές των παραμέτρων του προβλήματος είναι σχεδόν αδύνατη.



Σχήμα 4.3. Πεδία ορισμού των πιθανών περιπτώσεων λύσης της εξίσωσης του προβλήματος της δοκού Euler (για τις συναρτήσεις $f_i(x)$ και τους συντελεστές R, Q ισχύουν τα δεδομένα του Σχήματος 4.2 με τη διαφορά ότι για τις παραμέτρους J_1, J_2 θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι αντιστοιχούσες εκφράσεις του Πίνακα 4.1).

Στο Σχήμα 4.3 δίνονται σχηματικά τα πεδία ορισμού των πιθανών περιπτώσεων λύσης της διαφορικής εξίσωσης που διέπει το πρόβλημα κάμψης δοκού Euler στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης. Από το σχήμα αυτό φαίνεται, ότι στην παρούσα περίπτωση οι πιθανές περιπτώσεις λύσης είναι 5. Απουσιάζει η περίπτωση λύσης 4 που εμφανίζονταν στο αντίστοιχο πρόβλημα της δοκού Timoshenko. Το γεγονός αυτό οφείλεται

στο ότι στην παρούσα περίπτωση $\Phi \to \infty$ με αποτέλεσμα – όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 4.1 – να μην αλλάζει το πρόσημο του συντελεστή J_2 για κανένα συνδυασμό των εδαφικών παραμέτρων. Τέλος όπως και στην περίπτωση του προβλήματος της δοκού Timoshenko οι πιο σημαντικές περιπτώσεις λύσης είναι οι περιπτώσεις 1 και 3 για τους ίδιους ακριβώς λόγους.

Κλείνοντας την αναφορά στην κατάστρωση και την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης που διέπει την κάμψη δοκών επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων, αξίζει να γίνει η επισήμανση ότι μια ακόμα εφαρμογή της λύσης της (4.12) αποτελεί και η επίλυση της εξίσωσης που διέπει την κάμψη δοκών Euler επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων σύμφωνα με την προσέγγιση των Fletcher και Hermann (1971), η οποία παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 2.2.3.4. Ξεκινώντας από τη βασική εξίσωση του προσομοιώματος (Σχέση 2.83), και συνδυάζοντας την με την κλασσική εξίσωση του Euler προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$(EI - k_1)\frac{d^4 w}{dx^4} - k_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + k_3 w = p(x)$$

η οποία όπως γίνεται εύκολα κατανοητό είναι όμοια με τις (4.10) και (4.11), και επομένως έχει των ιδίων μορφών λύσεις με αυτές.

4.2.2. Επισήμανση των διαθέσιμων στοιχείων και των κενών της βιβλιογραφίας

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που παρατίθεται στο Κεφάλαιο 1 της παρούσας διατριβής (Παράγραφος 1.2.1.2) είναι συνοπτική και έχει ως στόχο την παρουσίαση του πλήθους των δημοσιεύσεων επί του αντικειμένου. Από την παρουσίαση αυτή δεν καθίστανται σαφή τα κενά της βιβλιογραφίας, και καθώς ένας εκ των στόχων της παρούσας είναι και η κάλυψη των κενών αυτών, ακολουθεί παρακάτω μια πιο συστηματική επισκόπηση των σχετικών δημοσιεύσεων. Ακολουθώντας την λογική με την οποία έγινε η επισκόπηση στην εισαγωγή, θα παρουσιαστούν τα διαθέσιμα στοιχεία αλλά και τα κενά της βιβλιογραφίας πρώτα για την περίπτωση της δοκού Euler – Bernoulli, και κατόπιν για την δοκό Timoshenko. Η παρούσα επισκόπηση θα επικεντρωθεί στην περίπτωση του στατικού προβλήματος.

Για το πρόβλημα της κάμψης δοκών Euler στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης είναι διαθέσιμα μητρώα δυσκαμψίας για όλες τις περιπτώσεις λύσης της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος. Η πιο ολοκληρωμένη δημοσίευση επί του συγκεκριμένου αντικειμένου είναι αυτή των Karamanlidis και Prakash (1989). Όσον αφορά τα μητρώα φόρτισης, είναι διαθέσιμα μητρώα που αφορούν τραπεζοειδή φόρτιση σε τμήμα της δοκού, και φόρτιση από μοναχική κατακόρυφη δύναμη ή ροπή σε τυχόν σημείο του ανοίγματος της (βλέπε Chiwanga και Valsangkar (1988) ή Razaqpur και Shah (1991)). Τα μητρώα αυτά είναι σχηματισμένα με βάση τη θεωρία α' τάξης, ενώ αντίστοιχα μητρώα με βάση τη θεωρία β' τάξης δεν είναι διαθέσιμα. Τέλος θα πρέπει να τονιστεί ότι είναι διαθέσιμα μητρώα δυσκαμψίας με βάση πολυωνυμικές / προσεγγιστικές συναρτήσεις παρεμβολής (Zhaohua και Cook (1983)), και αντίστοιχα μητρώα φόρτισης για την περίπτωση φόρτισης με καθολικό τραπεζοειδές φορτίο.

Για το αντίστοιχο πρόβλημα της δοκού Timoshenko, είναι διαθέσιμο μόνον το μητρώο δυσκαμψίας που αφορά τον συνήθη συνδυασμό τιμών των εδαφικών παραμέτρων, δηλαδή για την περίπτωση λύσης 3 με βάση τη θεωρία α' τάξης (βλέπε Shirima και Giger (1992)). Στην εργασία του Djodjo (1969) δίνονται μητρώα μεταφοράς για τις πιθανές περιπτώσεις λύσης του προβλήματος, χωρίς όμως να δίνονται οι τελικές

κλειστές εκφράσεις των συντελεστών των μητρώων δυσκαμψίας. Όσον αφορά τα μητρώα φόρτισης δεν είναι διαθέσιμες κλειστές αναλυτικές εκφράσεις για τις βασικές περιπτώσεις φόρτισης (μερική τραπεζοειδής φόρτιση και μοναχική κατακόρυφη φόρτιση ή ροπή). Ωστόσο στην εργασία των Shirima και Giger (1992) δίνεται η γενική πορεία σχηματισμού των μητρώων αυτών χωρίς να δίνονται οι τελικές κλειστές εκφράσεις.

Προκειμένου να καλυφθούν τα κενά της βιβλιογραφίας που εκτέθηκαν παραπάνω, θα δοθούν οι κλειστές αναλυτικές εκφράσεις των συντελεστών των μητρώων δυσκαμψίας που αφορούν το πρόβλημα κάμψης δοκού Timoshenko επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης για όλες τις πιθανές περιπτώσεις λύσης. Τα μητρώα αυτά εμπεριέχουν ως ειδικές περιπτώσεις τα αντίστοιχα μητρώα που αφορούν τόσο το πρόβλημα της δοκού Timoshenko στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης, όσο και το πρόβλημα της δοκού Euler στα πλαίσια της θεωρίας α' και β' τάξης. Επιπλέον, με σχηματισμούς κατάλληλων οριακών τιμών μετασχηματίζονται στα αντίστοιχα μητρώα που αφορούν την κάμψη δοκών επί ελαστικού υποβάθρου Winkler. Για τον σχηματισμό των μητρώων αυτών έγινε χρήση της μεθόδου που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 3.4.1.1α, και οι συντελεστές των μητρώων δίνονται στο Παράρτημα Β. Τα μητρώα δυσκαμψίας αυτά μπορούν να ενσωματωθούν στις εξισώσεις του γενικευμένου πεπερασμένου στοιχείου που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 3 (βλέπε Παράγραφο 3.6.2.1). Όσον αφορά τα μητρώα φόρτισης, θα δοθούν οι κλειστές αναλυτικές εκφράσεις για δοκούς Timoshenko με στροφικά ελατήρια στα άκρα τους στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης, για τις εξής περιπτώσεις φόρτισης:

- Μοναχική ροπή ή κατακόρυφο φορτίο σε τυχούσα θέση του ανοίγματος
- Συνεχής ομοιόμορφη φόρτιση σε όλο το εύρος του ανοίγματος
- ανομοιόμορφη θερμοκρασιακή μεταβολή Δt μεταξύ της άνω και της κάτω ίνας της δοκού

Ο λόγος για τον οποίο σχηματίζονται μητρώα φόρτισης δοκών με στροφικά ελατήρια στα άκρα, συνίσταται στην δυνατότητα που δίνεται για την ενσωμάτωση τους στις εξισώσεις του γενικευμένου πεπερασμένου στοιχείου που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 3 (βλέπε Παράγραφο 3.5). Η γενική μορφή των προκυπτουσών εκφράσεων επιτρέπει την προσαρμογή τους σε διάφορες υποπεριπτώσεις όπως συμβαίνει και στην περίπτωση των μητρώων δυσκαμψίας. Η μέθοδος με την οποία θα σχηματιστούν τα μητρώα φόρτισης δίνεται αναλυτικά στην Παράγραφο 3.5, ενώ οι αντίστοιχες εκφράσεις στο Παράρτημα Β. Τέλος θα πρέπει να τονιστεί ότι για πρακτικούς λόγους δίνονται μόνον τα μητρώα που αφορούν τις περιπτώσεις λύσης 1, 3.

Τέλος θα πρέπει να τονιστεί, ότι οι τέμνουσες που υπεισέρχονται τόσο στα μητρώα δυσκαμψίας όσο και στα μητρώα φόρτισης, δεν είναι οι τέμνουσες δυνάμεις που καταπονούν τη διατομή της δοκού, αλλά οι «γενικευμένες τέμνουσες». Η έννοια της γενικευμένης τέμνουσας ορίζεται στα πλαίσια της προσομοίωσης του εδάφους με το μοντέλο των δυο παραμέτρων. Οι γενικευμένες αυτές τέμνουσες, ορίζονται ως το άθροισμα της τέμνουσας που καταπονεί τη διατομή της δοκού, και της τέμνουσας του διατμητικού επιπέδου:

$$V_{\gamma\varepsilon\nu.} = V_{\Delta o\kappa o\acute{\upsilon}} + V_{\delta\iota\alpha\tau.\,\varepsilon\pi\iota\pi.} \Rightarrow \begin{cases} \Delta o\kappa\acute{o}\varsigma\ \text{Euler} \rightarrow V_{\gamma\varepsilon\nu.} = -EI\dfrac{d^3w}{dx^3} + G\dfrac{dw}{dx} \\ \Delta o\kappa\acute{o}\varsigma\ \text{Timoshenko} \rightarrow V_{\gamma\varepsilon\nu.} = -EI\dfrac{d^2\psi}{dx^2} + G\dfrac{dw}{dx} \end{cases} \tag{4.14}$$

Η χρήση της γενικευμένης τέμνουσας έναντι της κλασσικής στα μητρώα δυσκαμψίας, είναι απαραίτητη

καθώς τα καθιστά συμμετρικά. Το γεγονός αυτό μπορεί να εξηγηθεί αν ληφθεί υπόψη η παρατήρηση, ότι στην κατάστρωση της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος υπεισέρχεται η ενέργεια παραμόρφωσης του συστήματος δοκός – έδαφος, σε συνδυασμό με το ότι το εργικώς ανταποκρινόμενο στην κατακόρυφη μετακίνηση των άκρων της δοκού εντατικό μέγεθος, είναι το άθροισμα της τέμνουσας που καταπονεί τη δοκό και της αντίστοιχης τέμνουσας που καταπονεί το διατμητικό επίπεδο. Η έννοια της γενικευμένης τέμνουσας δεν είναι απαραίτητη στην περίπτωση που το έδαφος προσομοιώνεται με τη βοήθεια του μοντέλου των τριών παραμέτρων, καθώς στην περίπτωση αυτή η τέμνουσα δύναμη της δοκού και η τέμνουσα του διατμητικού επιπέδου αντιστοιχούν σε διαφορετικούς βαθμούς ελευθερίας (Βλέπε Παράγραφο 3.4.1.1α).

4.3. Προσομοίωμα του Vlasov με τη θεώρηση και των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου.

Στο Κεφάλαιο 2 και στην Παράγραφο 2.2.2.5, παρουσιάστηκε η βασική διατύπωση του προσομοιώματος του Vlasov καθώς και οι βασικές παραλλαγές – τροποποιήσεις του. Στις περιπτώσεις αυτές, έγινε η βασική παραδοχή ότι οι οριζόντιες μετακινήσεις στο εσωτερικό του υποβάθρου είναι αμελητέες και κατά συνέπεια είναι δυνατό να αγνοηθούν. Έτσι, οι βασικές εξισώσεις του προσομοιώματος αλλά και των τροποποιήσεων του ξεκινούν από τις βασικές παραδοχές (2.22α) και (2.22β). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον ωστόσο παρουσιάζει η κατάστρωση των αντιστοίχων εξισώσεων στην περίπτωση κατά την οποία λαμβάνονται υπόψη και οι οριζόντιες μετακινήσεις, καθώς όπως θα αποδειχθεί παρακάτω η μορφή των εξισώσεων αυτών είναι ανάλογη των εξισώσεων που διέπουν την κάμψη δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων του Kerr που παρουσιάστηκαν αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3.

Στο πρώτο τμήμα της παρούσας παραγράφου θα παρουσιαστεί εν συντομία η διαδικασία σχηματισμού της διαφορικής εξίσωσης του προσομοιώματος του Vlasov με τη θεώρηση και των οριζοντίων μετακινήσεων όπως καταστρώθηκε από τους Rao et al. (1971), καθώς και μια σύντομη περιγραφή της εφαρμογής της στο πρόβλημα κάμψης δοκού πεπερασμένου μήκους. Στο δεύτερο τμήμα της παραγράφου, θα καταστρωθούν οι αντίστοιχες εξισώσεις κάνοντας εφαρμογή όχι της αρχής των «δυνατών μετακινήσεων» του Lagrange – όπως έγινε από τον Vlasov (1960) και τους Rao et al. – αλλά της αρχής της στάσιμης τιμής της ελαστικής ενέργειας του συστήματος δοκού – ελαστικού υποβάθρου. Η διαδικασία αυτή δεν είναι διαθέσιμη στη βιβλιογραφία και παρουσιάζεται για πρώτη φορά. Οι προκύπτουσες εξισώσεις παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και μπορούν να επιλυθούν με βάση τις επιλύουσες εξισώσεις των προσομοιωμάτων δυο και τριών παραμέτρων που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 4.2.1 και στο Κεφάλαιο 3 αντίστοιχα. Επιπλέον η προσέγγιση αυτή, καλύπτει την αδυναμία της προσέγγισης των Rao et al. για μαθηματική τεκμηρίωση των σχέσεων που διέπουν την κατανομή των οριζοντίων και κατακορύφων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου. Όπως θα αποδειχθεί, η εφαρμογή της αρχής της στάσιμης τιμής της ελαστικής ενέργειας οδηγεί στο σχηματισμό, πέραν της εξίσωσης ισορροπίας του συστήματος δοκός – ελαστικό υπόβαθρο, εξισώσεων από την επίλυση των οποίων προκύπτουν οι σχέσεις που διέπουν την κατανομή των οριζοντίων και των κατακορύφων μετακινήσεων στο εσωτερικό του ελαστικού υποβάθρου.

4.3.1. Η υπάρχουσα προσέγγιση του προβλήματος

Στην Παράγραφο 2.2.2.5, παρουσιάστηκε αναλυτικά η διαδικασία σχηματισμού της μαθηματικής διατύπωσης του προσομοιώματος του Vlasov χωρίς τη θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων. Στην κλασσική του εργασία, ο Vlasov (1960) δεν αναφέρεται ειδικότερα σε αυτή την εκδοχή. Μια τέτοια προσέγγιση γίνεται στην εργασία των Rao, Das και Anandakrishnan (1971), οι οποίοι ξεκινώντας από την παραλλακτική διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας την οποία χρησιμοποίησε και ο Vlasov, επέκτειναν το προσομοίωμα λαμβάνοντας υπόψη και τις οριζόντιες μετακινήσεις. Στην εργασία αυτή γίνεται η παραδοχή της ισχύος κοινής μαθηματικής σχέσης για την κατανομή των κατακορύφων και των οριζοντίων μετακινήσεων. Θα πρέπει να τονιστεί ότι η παραδοχή αυτή χρήζει κριτικής, καθώς δεν αναφέρεται το κριτήριο επιλογής της, αλλά ούτε και η τεκμηρίωση της. Η τεκμηρίωση αυτή πάντως επιτυγχάνεται με βάση την κατάστρωση των εξισώσεων του προβλήματος που θα δοθούν στην επόμενη παράγραφο του κεφαλαίου.

Η θεμελιώδης διατύπωση του προσομοιώματος του Vlasov στηρίζεται σε πεδίο μετακινήσεων που διέπεται από τις σχέσεις (2.17α) και (2.17β). Από την εξειδίκευση των σχέσεων αυτών προκύπτει η σχέση (2.25). Εάν αρθεί η παραδοχή του αμελητέου των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου, τότε το πεδίο μετακινήσεων μπορεί να περιγραφεί από τις σχέσεις:

$$u(x,z) = U_1(x)\varphi_1(z) \tag{4.15α}$$

$$w(x,z)=V_1(x)\psi_1(z) \tag{4.15β}$$

Αντίστοιχα το πεδίο των τάσεων περιγράφεται από τις παρακάτω σχέσεις με την υπόθεση ότι εκπληρούνται οι προϋποθέσεις ισχύος συνθηκών επιπέδου έντασης:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left[\frac{dU_1}{dx}\varphi_1 + \nu(V_1\frac{d\psi_1}{dz})\right] \tag{4.15γ}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left[V_1\frac{d\psi_1}{dy} + \nu(\frac{dU_1}{dx}\varphi_1)\right] \tag{4.15δ}$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{dV_1}{dx}\psi_1 + U_1\frac{d\varphi_1}{dz}\right] \tag{4.15ε}$$

Εισάγοντας τις σχέσεις (4.15α) και (4.15β) στις (2.20α) και (2.20β) προκύπτουν:

$$\alpha_{11}\frac{d^2U_1}{dx^2} - \left(\frac{1-\nu}{2}b_{11}\right)U_1 + \left[\nu t_{11} - \left(\frac{1-\nu}{2}\right)c_{11}\right]\frac{dV_1}{dx} = 0 \tag{4.16α}$$

$$-\left[\nu t_{11} - \frac{1-\nu}{2}c_{11}\right]\frac{dU_1}{dx} + \left(\frac{1-\nu}{2}r_{11}\right)\frac{d^2V_1}{dx^2} - s_{11}V_1 + \left(\frac{1-\nu^2}{E}\right)p_1 = 0 \tag{4.16β}$$

όπου οι συντελεστές α_{11}, b_{11}, c_{11}, r_{11}, s_{11}, t_{11}, p_1 δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} = \int_0^H \varphi_1^2 b dz \qquad b_{11} = \int_0^H \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)^2 b dz \qquad c_{11} = \int_0^H \left(\psi_1\frac{d\varphi_1}{dz}\right) b dz \qquad p_1 = p(x)\psi_1(0) \\ &r_{11} = \int_0^H \psi_1^2 b dz \qquad s_{11} = \int_0^H \left(\frac{d\psi_1}{dz}\right)^2 b dz \qquad t_{11} = \int_0^H \left(\frac{d\psi_1}{dz}\varphi_1\right) b dz \end{aligned} \tag{4.17}$$

(Όπου b είναι το πάχος του ελαστικού υποστρώματος το οποίο στην περίπτωση των συνθηκών επίπεδης παραμόρφωσης λαμβάνεται ίσο με τη μονάδα). Για τις συναρτήσεις φ_1, ψ_1 μπορούν να επιλεγούν εκφράσεις ανάλογες αυτών που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 2.2.2.5 για το αντίστοιχο πρόβλημα χωρίς την θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων. Όπως είναι γνωστό, η κάμψη δοκού Euler – Bernoulli διέπεται από την κλασσική εξίσωση:

$$E_b I \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) - p(x) \tag{4.18}$$

Όπου q(x) είναι η εξωτερική φόρτιση της δοκού, και p(x) η κατανεμημένη δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ αυτής και του ελαστικού υποβάθρου.

Συνδυάζοντας την (4.18) με τη σχέση $p_1=p(x)\psi_1(0)$, και εκτελώντας τους κατάλληλους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς προκύπτει:

$$p_1 = q(x)\psi_1(0) - \psi_1^2(0)\left(E_b I \frac{d^4 V_1}{dx^4}\right) \tag{4.19}$$

Εισάγοντας την (4.19) στην (4.16β) προκύπτει:

$$-\left[\nu t_{11} - \frac{1-\nu}{2} c_{11}\right]\frac{dU_1}{dx} + \left(\frac{1-\nu}{2} r_{11}\right)\frac{d^2 V_1}{dx^2} - s_{11} V_1 - \left(\frac{1-\nu^2}{E}\right) E_b I \psi_1^2(0) \frac{d^4 V_1}{dx^4} = -\left(\frac{1-\nu^2}{E}\right) q(x)\psi_1(0) \tag{4.20}$$

Κάνοντας χρήση των παρακάτω διαφορικών τελεστών:

$$L_{11} = D_1 \frac{d^2}{dx^2} + D_2 \qquad L_{12} = -L_{21} = D_3 \frac{d}{dx} \qquad L_{22} = D_4 \frac{d^4}{dx^4} + D_5 \frac{d^2}{dx^2} + D_6 \tag{4.21}$$

το σύστημα εξισώσεων (4.16α) και (4.20) γράφεται:

$$L_{11} U_1 + L_{12} V_1 = 0 \tag{4.22α}$$

$$L_{21} U_1 + L_{22} V_1 = -\left(\frac{1-\nu^2}{E}\right) q(x)\psi_1(0) \tag{4.22β}$$

Όπου:

$$D_1 = \alpha_{11} \qquad D_2 = -\frac{1-\nu}{2} b_{11} \qquad D_3 = \nu t_{11} - \frac{1-\nu}{2} c_{11} \qquad D_4 = -\left(\frac{1-\nu^2}{E}\right) E_b I \psi_1^2(0) \qquad D_5 = \left(\frac{1-\nu}{2}\right) r_{11} \qquad D_6 = -s_{11}$$

Τέλος εκλέγεται η βοηθητική συνάρτηση F με τις εξής ιδιότητες:

$$U_1 = -L_{12} F = -D_3 \frac{dF}{dx} \tag{4.23α}$$

$$V_1 = L_{11} F = D_1 \frac{d^2 F}{dx^2} + D_2 F \tag{4.23β}$$

Αν η συνάρτηση F εισαχθεί μέσω των σχέσεων (4.23α) και (4.23β), στις (4.22α) και (4.22β) τότε η μεν (4.22α) εκφυλίζεται στην ταυτότητα 0=0 ενώ η (4.22β) μετατρέπεται στην παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{d^6 F}{dx^6} + \left[\frac{D_2 D_4 + D_1 D_5}{D_1 D_4}\right]\frac{d^4 F}{dx^4} + \left[\frac{D_3^2 + D_2 D_5 + D_1 D_6}{D_1 D_4}\right]\frac{d^2 F}{dx^2} + \left[\frac{D_2 D_6}{D_1 D_4}\right] F = -\left[\frac{1-\nu^2}{(D_1 D_4) E}\right] q(x)\psi_1(0) \tag{4.24}$$

η οποία αποτελεί την εξίσωση της κάμψης δοκού Euler – Bernoulli επί ελαστικού υποβάθρου Vlasov με θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου. Από την σύγκριση της (4.24) με την (3.16α) ή την (3.16β) προκύπτει το συμπέρασμα ότι η επίλυση του παρόντος προβλήματος επιτυγχάνεται με την επίλυση εξίσωσης όμοιας με την εξίσωση που διέπει το πρόβλημα της κάμψης δοκού Euler – Bernoulli επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων του Kerr.

Η εξίσωση (4.24) ισχύει για το τμήμα της επιφάνειας του υποστρώματος που βρίσκεται εν επαφή με τη δοκό, και επομένως αρκεί για την επίλυση προβλημάτων δοκών «απείρου» μήκους. Η επίλυση του προβλήματος αυτού μπορεί να γίνει κάνοντας χρήση των εκφράσεων που προέκυψαν κατά την επίλυση του αντίστοιχου προβλήματος κάμψης δοκού Euler επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων (Παράγραφος 4.1.3) λόγω της ομοιότητας των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν τα δυο προβλήματα. Θα πρέπει βέβαια να προηγηθεί η προσαρμογή των αντιστοίχων συντελεστών των διαφορικών εξισώσεων στις σχετικές εκφράσεις των μεγεθών έντασης και παραμόρφωσης.

Για την περίπτωση επίλυσης του προβλήματος κάμψης δοκών πεπερασμένου μήκους, είναι απαραίτητη και η κατάστρωση της εξίσωσης που διέπει τις μετακινήσεις της ελεύθερης επιφάνειας του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού (βλέπε Σχήμα 4.4). Στην περίπτωση αυτή η διαδικασία ξεκινά και πάλι από τις σχέσεις (4.16α), (4.16β) και την εισαγωγή των τελεστών:

$$L_{11}^{f} = L_{11} \qquad L_{12}^{f} = L_{12} \qquad L_{21}^{f} = L_{21} \qquad L_{22}^{f} = D_4^{f}\frac{d^4}{dx^4} + D_5^{f} \tag{4.25}$$

όπου:

$$D_1^{f} = D_1 \qquad D_2^{f} = D_2 \qquad D_3^{f} = D_3 \qquad D_4^{f} = D_5 \qquad D_5^{f} = D_6$$

Με τους παραπάνω τελεστές οι σχέσεις (4.16α) και (4.16β) παίρνουν μορφή ανάλογη αυτής των (4.22α) και (4.22β), ενώ με την εισαγωγή της βοηθητικής συνάρτηση F_f με τις ιδιότητες (4.23α), (4.23β) και με ανάλογους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς προκύπτει:

$$\frac{d^4F_f}{dx^4} + \left[\frac{\left(D_3^{f}\right)^2 + D_2^{f}D_4^{f} + D_1^{f}D_5^{f}}{D_1^{f}D_4^{f}}\right]\frac{d^2F_f}{dx^2} + \left[\frac{D_2^{f}D_5^{f}}{D_1^{f}D_4^{f}}\right]F_f = -\left[\frac{1-\nu^2}{(D_1^{f}D_4^{f})E}\right]q_1 \tag{4.26}$$

Στην παραπάνω εξίσωση έγινε η υπόθεση ότι η ελεύθερη επιφάνεια του εδάφους φορτίζεται με κατακόρυφο φορτίο q_1. Εάν η ελεύθερη επιφάνεια του υποστρώματος είναι αφόρτιστη τότε αντί της εξίσωσης (4.26) ισχύει η αντίστοιχη ομογενής. Όπως γίνεται εύκολα κατανοητό η μορφή (4.26) ταυτίζεται με τη μορφή της διαφορικής εξίσωσης που διέπει το πρόβλημα κάμψης δοκού Euler επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων (σχέση 4.11). Επομένως οι διάφορες περιπτώσεις λύσης της δίνονται στα Σχήματα 4.2 και 4.3. Η ταυτόχρονη επίλυση των εξισώσεων (4.24) και (4.26) απαιτεί τον υπολογισμό συνολικά 14 σταθερών ολοκλήρωσης όπως θα φανεί από την εφαρμογή που ακολουθεί.

Επίλυση του προβλήματος δοκού Euler με ελεύθερα άκρα

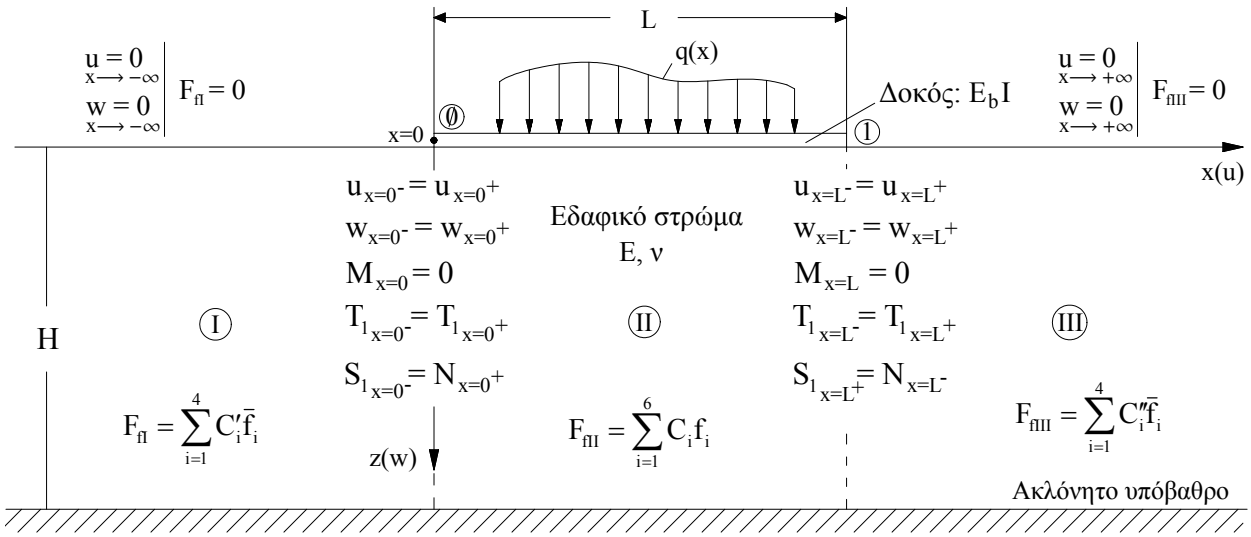
Παρακάτω θα δοθεί εν συντομία η πορεία επίλυσης του προβλήματος κάμψης δοκού πεπερασμένου μήκους με ελεύθερα άκρα (Σημειώνεται ότι η διαδικασία που θα ακολουθήσει είναι ανεξάρτητη του αν το

ελαστικό υπόβαθρο είναι πεπερασμένου ή «απείρου» πάχους). Όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.4, το ελαστικό υπόβαθρο χωρίζεται σε τρία πεδία:

Τα Πεδία I και III: οι επιφάνειες των οποίων είναι αφόρτιστες και επομένως οι μετακινήσεις περιγράφονται από την εξίσωση (4.26), και

Το Πεδίο II: η επιφάνεια του οποίου είναι εν επαφή με τη δοκό και επομένως φορτίζεται. Έτσι οι μετακινήσεις στο πεδίο αυτό περιγράφονται από την εξίσωση (4.24).

Το σύνολο των σταθερών ολοκλήρωσης που θα πρέπει να προσδιοριστούν προκειμένου να λυθεί το πρόβλημα είναι δεκατέσσερις (14). Οι σταθερές αυτές μπορούν να υπολογιστούν από τις οριακές συνθήκες αλλά και τις συνθήκες συνέχειας. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.4, οι απαραίτητες συνθήκες συνίσταται από τέσσερις οριακές συνθήκες στα όρια $x \to \pm\infty$ της ελεύθερης επιφάνειας του υποστρώματος, και δέκα συνθήκες συνέχειας – συμβιβαστού στα άκρα της δοκού.



Σχήμα 4.4. Συνοριακές συνθήκες του προβλήματος κάμψης δοκού πεπερασμένου μήκους επί ελαστικού υποβάθρου Vlasov με τη θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου.

Θα πρέπει να υπενθυμιστεί ότι τα μεγέθη $T_1(x)$ και $S_1(x)$ είναι οι γενικευμένες ορθές και διατμητικές δυνάμεις, που αντιπροσωπεύουν το «δυνατό» έργο των ορθών και των διατμητικών τάσεων που δρουν σε κάποια τυχούσα «διατομή» του υποβάθρου, και εκφράζονται συναρτήσει της βοηθητικής συνάρτησης F_{II} από τις παρακάτω σχέσεις (οι οποίες προκύπτουν από τις (2.21α), (2.21β) σε συνδυασμό με τις (4.15γ), (4.15δ) και (4.23α), (4.23β)):

$$T_1(x) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu t_{11} D_1 - \alpha_{11} D_3\right)\frac{d^2 F_{II}}{dx^2} + \frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu t_{11} D_2\right) F_{II} \tag{4.27α}$$

$$S_1(x) = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(r_{11} D_1\right)\frac{d^3 F_{II}}{dx^3} + \frac{E}{2(1+\nu)}\left(r_{11} D_2 - c_{11} D_3\right)\frac{dF_{II}}{dx} \tag{4.27β}$$

Επίσης το μέγεθος N(x), η γενικευμένη τέμνουσα της δοκού, η οποία είναι το άθροισμα της γενικευμένης διατμητικής δύναμης $S_1(x)$ του υποστρώματος και της κλασσικής τέμνουσας δύναμης V(x) δίνεται από τη σχέση:

$$N(x) = V(x) + S_1(x) \Rightarrow N(x) = -E_b I \frac{d^3 w}{dx^3} + S_1(x) \tag{4.27γ}$$

Για την επίλυση του προβλήματος μπορεί να γίνει χρήση της μεθόδου των αρχικών παραμέτρων, η οποία παρουσιάστηκε αναλυτικά στην Παράγραφο 3.5.2.1. Έτσι παρακάτω θα δοθεί συνοπτικά η πορεία των υπολογισμών προσαρμοσμένη στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Οι βασικές παράμετροι του προβλήματος είναι η κατακόρυφη μετακίνηση της δοκού $V_1(x)$, η οριζόντια μετακίνηση $U_1(x)$ της επιφάνειας του υποστρώματος στο πεδίο ΙΙ, η στροφή των διατομών της δοκού dV_1/dx, η ροπή κάμψης $M(x)$, η γενικευμένη τέμνουσα της δοκού $N(x)$ και η γενικευμένη ορθή δύναμη του υποστρώματος $T_1(x)$. Οι παράμετροι αυτές θα πρέπει, στα πλαίσια της μεθόδου, να εκφραστούν συναρτήσει των τιμών τους στο σημείο x=0, δηλαδή συναρτήσει των λεγόμενων αρχικών παραμέτρων. Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (4.23α), (4.23β) οι οποίες συνδέουν τα μεγέθη μετακίνησης V_1, U_1, καθώς και τις σχέσεις (3.86α), (4.27α), (4.27β), (4.27γ) που συνδέουν τα εντατικά μεγέθη M, T_1 και N με την βοηθητική συνάρτηση F_{II}, οι βασικές παράμετροι μπορούν να γραφτούν συναρτήσει των αρχικών παραμέτρων $(V_1)_0$, $(U_1)_0$, $(dV_1/dx)_0$, M_0, N_0, $(T_1)_0$ ως εξής:

$$\begin{bmatrix} V_1(x) \\ U_1(x) \\ dV_1(x)/dx \\ T_1(x) \\ M(x) \\ N_1(x) \end{bmatrix} = [F] \begin{bmatrix} (V_1)_0 \\ (dV_1/dx)_0 \\ (U_1)_0 \\ (T_1)_0 \\ M_0 \\ N_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F^Q_{V_1} \\ F^Q_{dV_1/dx} \\ F^Q_{U_1} \\ F^Q_{T_1} \\ F^Q_M \\ F^Q_N \end{bmatrix} \Rightarrow [y(x)] = [F][y_0] - [F^Q] \tag{4.28}$$

Όπου [F] είναι το μητρώο μεταφοράς, τα στοιχεία – συναρτήσεις του οποίου εξαρτώνται από τη μορφή λύσης της διαφορικής εξίσωσης (4.24). Επειδή όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω η εξίσωση αυτή είναι όμοια με την εξίσωση (3.16α), οι λύσεις της δίνονται στον Πίνακα 3.2α. Επίσης το μητρώο $[F^Q]$ είναι το μητρώο που αντιπροσωπεύει την κατακόρυφη εξωτερική φόρτιση της δοκού, και επομένως εξαρτάται από τη μορφή της (βλέπε σχέσεις (3.131) ή (3.144)).

Εφαρμόζοντας την (4.28) για x=L και εισάγοντας τις συνθήκες συνέχειας του άκρου της δοκού x=0 (βλέπε Σχήμα 4.4), προκύπτει ένα σύστημα εξισώσεων με πέντε αγνώστους, όπως παρουσιάστηκε πιο αναλυτικά στην Παράγραφο 3.5.2.1. Από την επίλυση του συστήματος αυτού προκύπτουν οι τιμές των αρχικών παραμέτρων, αλλά και των αντιστοίχων τιμών για το άλλο άκρο της δοκού x=L. Επιπλέον, οι συνθήκες συνεχείας στα δυο άκρα της δοκού, αλλά και οι οριακές συνθήκες για $x \to \pm\infty$ επαρκούν για τον προσδιορισμό και των υπολοίπων σταθερών ολοκλήρωσης, και επομένως για την πλήρη επίλυση του προβλήματος.

Αριθμητικές εφαρμογές της παραπάνω μεθόδου παρατίθενται στο αντίστοιχο κεφάλαιο των αριθμητικών εφαρμογών, στα πλαίσια των συγκρίσεων των διαφόρων μοντέλων προσομοίωσης του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου.

4.3.2. Πρόταση νέας προσέγγισης του προβλήματος

Η κατάστρωση των εξισώσεων, οι οποίες διέπουν το πρόβλημα της κάμψης δοκών επί του ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων του Vlasov με τη θεώρηση και των οριζοντίων μετακινήσεων, μπορεί να επιτευχθεί και με εφαρμογή της αρχής της στάσιμης τιμής της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης του συστήματος δοκός – ελαστικό υπόβαθρο. Η εφαρμογή της αρχής αυτής για την περίπτωση του κλασικού υποβάθρου του Vlasov οδηγεί ως γνωστόν στην τεκμηρίωση της μαθηματικής έκφρασης που διέπει το προφίλ των κατακορύφων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου, αλλά και στον προσδιορισμό – με μια επαναληπτική διαδικασία – της παραμέτρου γ (σχέση (2.35β)), η οποία έχει σημαντική επιρροή στα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του προσομοιώματος (βλέπε Vallabhan και Das (1988), και Παράγραφο 2.2.2.5 της παρούσης διατριβής). Το γεγονός αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι η εφαρμογή της αρχής της στάσιμης τιμής της ελαστικής ενέργειας για την περίπτωση του ελαστικού υποβάθρου του Vlasov με τη θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων μπορεί να οδηγήσει στον σχηματισμό των εξισώσεων που διέπουν το προφίλ των οριζοντίων και κατακορύφων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου.

Η διαδικασία κατάστρωσης των εξισώσεων ξεκινά από τη θεώρηση του συστήματος δοκός – ελαστικό υπόβαθρο. Για λόγους απλοποίησης των εξισώσεων που θα παρατεθούν, θα δοθεί η συνοπτικά μόνον η διαδικασία που αφορά τη δοκό Euler – Bernoulli.

Έστω ότι το πάχος του συστήματος στην εγκάρσια διεύθυνση είναι πολύ μεγάλο, και επομένως πληρούνται οι προϋποθέσεις ισχύος των εξισώσεων επίπεδης παραμόρφωσης. Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.4, το ελαστικό υπόβαθρο διακρίνεται σε τρία πεδία:

- Το πρώτο πεδίο ορίζεται για $-\infty<x<0$ και $0<z<H$ (Πεδίο I)
- Το δεύτερο πεδίο ορίζεται για $0<x<L$ και $0<z<H$ (Πεδίο II)
- Το τρίτο πεδίο ορίζεται για $L<x<+\infty$ και $0<z<H$ (Πεδίο III)

Οι εκφράσεις των μετακινήσεων, των τάσεων και των παραμορφώσεων του υποβάθρου, ορίζονται ξεχωριστά σε κάθε πεδίο ως εξής:

Μετακινήσεις

Οριζόντιες μετακινήσεις: $u(x,z) = U_{1i}(x)\varphi_1(z)$ (4.29α)

Κατακόρυφες μετακινήσεις: $w(x,z) = V_{1i}(x)\psi_1(z)$ (4.29β)

Οι οριακές τιμές για τις συναρτήσεις φ(z), ψ(z) είναι:

- Στην επιφάνεια του υποστρώματος (z=0): $\varphi_1(0)=\psi_1(0)=1$ (4.29γ)

- Στην βάση του υποστρώματος (z=H): $\varphi_1(H)=\psi_1(H)=0$ (4.29δ)

Παραμορφώσεις

$$\varepsilon_{xx,i} = \frac{dU_{1i}}{dx}\varphi_1 \qquad \varepsilon_{zz,i} = \frac{d\psi_1}{dz}V_{1i} \qquad \varepsilon_{xz,i} = \frac{dV_{1i}}{dx}\psi_1 + U_{1i}\frac{d\varphi_1}{dz} \tag{4.30}$$

Τάσεις

$$\sigma_{xx,i} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{dU_{1i}}{dx}\varphi_1 + (\frac{\nu}{1-\nu})(V_{1i}\frac{d\psi_1}{dz})\right] \tag{4.31α}$$

$$\sigma_{zz,i} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[V_{1i}\frac{d\psi_1}{dz} + (\frac{\nu}{1-\nu})(\frac{dU_{1i}}{dx}\varphi_1)\right] \tag{4.31β}$$

$$\tau_{xz,i} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{dV_{1i}}{dx}\psi_1 + U_{1i}\frac{d\varphi_1}{dz}\right] \tag{4.31γ}$$

Στις παραπάνω σχέσεις ο δείκτης i δηλώνει τη διαφοροποίηση των εκφράσεων των μετακινήσεων, των παραμορφώσεων και των τάσεων στα τρία πεδία στα οποία χωρίζεται το ελαστικό υπόστρωμα, και επομένως λαμβάνει τιμές 1, 2, 3.

Με βάση τα παραπάνω ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης του συστήματος δοκός – εδαφικό υπόστρωμα λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$\pi = \frac{1}{2}\int_0^L E_b I\left(\frac{d^2V_{12}}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^L q(x)V_{12}(x)dx + \int_{-\infty}^0\int_0^H \frac{b}{2}\left[\sigma_{xx,1}\varepsilon_{xx,1} + \sigma_{zz,1}\varepsilon_{zz,1} + \tau_{xz,1}\varepsilon_{xz,1}\right]dzdx +$$
$$+ \int_0^L\int_0^H \frac{b}{2}\left[\sigma_{xx,2}\varepsilon_{xx,2} + \sigma_{zz,2}\varepsilon_{zz,2} + \tau_{xz,2}\varepsilon_{xz,2}\right]dydx + \int_L^{+\infty}\int_0^H \frac{b}{2}\left[\sigma_{xx,3}\varepsilon_{xx,3} + \sigma_{zz,3}\varepsilon_{zz,3} + \tau_{xz,3}\varepsilon_{xz,3}\right]dzdx \tag{4.32}$$

(Στην παρούσα περίπτωση όπου το πρόβλημα είναι πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης, το b λαμβάνεται ίσο με τη μονάδα).

Σύμφωνα με τη θεωρία των συναρτησιακών, η συνθήκη ισορροπίας του συστήματος είναι (βλέπε και Παράγραφο 3.2.1.1):

$$\text{Ισορροπία συστήματος} \Rightarrow \pi = \text{stat.} \Rightarrow \delta\pi = 0 \tag{4.33}$$

Εισάγοντας στην (4.33) τις εκφράσεις (4.30) και (4.31α – γ) προκύπτει:

$$\pi = \frac{E_b I}{2}\int_0^L\left(\frac{d^2V_{12}}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{Eb(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\int_{-\infty}^0\int_0^H\left\{\left(\frac{dU_{11}}{dx}\right)^2\varphi_1^2 + \left(\frac{d\psi_1}{dz}\right)^2 V_{11}^2\right\}dzdx +$$
$$+ \frac{Eb\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\int_{-\infty}^0\int_0^H\left\{V_{11}\frac{d\psi_1}{dz}\varphi_1\frac{dU_{11}}{dx}\right\}dzdx + \frac{Eb}{2(1+\nu)}\int_{-\infty}^0\int_0^H\left\{U_{11}\frac{d\varphi_1}{dz}\psi_1\frac{dV_{11}}{dx}\right\}dzdx +$$
$$+ \frac{Eb}{4(1+\nu)}\int_{-\infty}^0\int_0^H\left\{\left(\frac{dV_{11}}{dx}\right)^2\psi_1^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)^2 U_{11}^2\right\}dzdx + \frac{Eb(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\int_0^L\int_0^H\left\{\left(\frac{dU_{12}}{dx}\right)^2\varphi_1^2 + \left(\frac{d\psi_1}{dz}\right)^2 V_{12}^2\right\}dzdx +$$
$$+ \frac{Eb\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\int_0^L\int_0^H\left\{V_{12}\frac{d\psi_1}{dz}\varphi_1\frac{dU_{12}}{dx}\right\}dzdx + \frac{Eb}{2(1+\nu)}\int_0^L\int_0^H\left\{U_{12}\frac{d\varphi_1}{dz}\psi_1\frac{dV_{12}}{dx}\right\}dzdx +$$
$$+ \frac{Eb}{4(1+\nu)}\int_0^L\int_0^H\left\{\left(\frac{dV_{12}}{dx}\right)^2\psi_1^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)^2 U_{12}^2\right\}dzdx + \frac{Eb(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\int_L^{+\infty}\int_0^H\left\{\left(\frac{dU_{13}}{dx}\right)^2\varphi_1^2 + \left(\frac{d\psi_1}{dz}\right)^2 V_{13}^2\right\}dzdx +$$
$$+ \frac{Eb\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\int_L^{+\infty}\int_0^H\left\{V_{13}\frac{d\psi_1}{dz}\varphi_1\frac{dU_{13}}{dx}\right\}dzdx + \frac{Eb}{2(1+\nu)}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^H\left\{U_{13}\frac{d\varphi_1}{dz}\psi_1\frac{dV_{13}}{dx}\right\}dzdx +$$
$$+ \frac{Eb}{2(1+\nu)}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^H\left\{\left(\frac{dV_{13}}{dx}\right)^2\psi_1^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)^2 U_{13}^2\right\}dzdx - \int_0^L q(x)V_{12}(x)dx \tag{4.34}$$

Για τον υπολογισμό της πρώτης μεταβολής του συναρτησιακού (4.34) γίνεται εφαρμογή των αρχών του λογισμού των μεταβολών. Μετά την εφαρμογή των αρχών αυτών και την εκτέλεση των απαραίτητων αλγεβρικών μετασχηματισμών – που εδώ παραλείπονται – προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$
\begin{aligned}
\delta\pi = {} & \int_{-\infty}^{0}\left[(k_4-k_3)\frac{dV_{11}}{dx}+k_6U_{11}-k_1\frac{d^2U_{11}}{dx^2}\right]\delta U_{11}dx+\int_0^L\left[(k_4-k_3)\frac{dV_{12}}{dx}+k_6U_{12}-k_1\frac{d^2U_{12}}{dx^2}\right]\delta U_{12}dx+\\
& +\int_L^{+\infty}\left[(k_4-k_3)\frac{dV_{13}}{dx}+k_6U_{13}-k_1\frac{d^2U_{13}}{dx^2}\right]\delta U_{13}dx+\int_{-\infty}^{0}\left[-(k_4-k_3)\frac{dU_{11}}{dx}+k_2V_{11}-k_5\frac{d^2V_{11}}{dx^2}\right]\delta V_{11}dx+\\
& +\int_0^L\left[E_bI\left(\frac{d^4V_{12}}{dx^4}\right)-q(x)-(k_4-k_3)\frac{dU_{12}}{dx}+k_2V_{12}-k_5\frac{d^2V_{12}}{dx^2}\right]\delta V_{12}dx+\\
& +\int_L^{+\infty}\left[-(k_4-k_3)\frac{dU_{13}}{dx}+k_2V_{13}-k_5\frac{d^2V_{13}}{dx^2}\right]\delta V_{13}dx+\int_0^H\left[(M_2-M_3)\frac{d\psi_1}{dz}+M_1\varphi_1-N_2\frac{d^2\varphi_1}{dz^2}\right]\delta\varphi_1dz+\\
& +\int_0^H\left[-(M_2-M_3)\frac{d\varphi_1}{dz}+M_4\psi_1-N_1\frac{d^2\psi_1}{dz^2}\right]\delta\psi_1dz+\left[\left(k_3V_{11}+k_1\frac{dU_{11}}{dx}\right)\delta U_{11}\right]_{-\infty}^{0}+\\
& +\left[\left(k_3V_{12}+k_1\frac{dU_{12}}{dx}\right)\delta U_{12}\right]_0^L+\left[\left(k_3V_{13}+k_1\frac{dU_{13}}{dx}\right)\delta U_{13}\right]_L^{+\infty}+\left[\left(k_4U_{11}+k_5\frac{dV_{11}}{dx}\right)\delta V_{11}\right]_{-\infty}^{0}+\\
& +\left[\left(-E_bI\frac{d^3V_{12}}{dx^3}+k_4U_{12}+k_5\frac{dV_{12}}{dx}\right)\delta V_{12}\right]_0^L+\left[\left(k_4U_{13}+k_5\frac{dV_{13}}{dx}\right)\delta V_{13}\right]_L^{+\infty}+\\
& +\left[E_bI\frac{d^2V_{12}}{dx^2}\delta\left(\frac{dV_{12}}{dx}\right)\right]_0^L+\left[\left(N_1\frac{d\psi_1}{dz}+M_2\varphi_1\right)\delta\psi_1\right]_0^H+\left[\left(N_2\frac{d\varphi_1}{dz}+M_3\psi_1\right)\delta\varphi_1\right]_0^H=0
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

Όπου:

$$
k_1=\frac{Eb(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\int_0^H\varphi_1^2dz\right]\qquad k_2=\frac{Eb(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\int_0^H\left(\frac{d\psi_1}{dz}\right)^2dz\right]\qquad k_3=\frac{Eb\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\int_0^H\varphi_1\frac{d\psi_1}{dz}dz
$$

$$
k_4=\frac{Eb}{2(1+\nu)}\int_0^H\psi_1\frac{d\varphi_1}{dz}dz\qquad k_5=\frac{Eb}{2(1+\nu)}\left[\int_0^H\psi_1^2dz\right]\qquad k_6=\frac{Eb}{2(1+\nu)}\left[\int_0^H\left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)^2dz\right]
\tag{4.36}
$$

και

$$
M_1=m_{11}+m_{12}+m_{13}\qquad M_3=m_{31}+m_{32}+m_{33}
$$

$$
M_2=m_{21}+m_{22}+m_{23}\qquad M_4=m_{41}+m_{42}+m_{43}
\tag{4.37α}
$$

$$
N_1=n_{11}+n_{12}+n_{13}\qquad N_2=n_{21}+n_{22}+n_{23}
\tag{4.37β}
$$

$$
m_{11}=\frac{Eb(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{dU_{11}}{dx}\right)^2dx\right]\qquad m_{12}=\frac{Eb(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\int_0^L\left(\frac{dU_{12}}{dx}\right)^2dx\right]
$$

$$
m_{13}=\frac{Eb(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\int_L^{+\infty}\left(\frac{dU_{13}}{dx}\right)^2dx\right]\qquad m_{21}=\frac{Eb\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\int_{-\infty}^{0}V_{11}\frac{dU_{11}}{dx}dx
\tag{4.37γ}
$$

$$
m_{22}=\frac{Eb\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\int_0^L V_{12}\frac{dU_{12}}{dx}dx\qquad m_{23}=\frac{Eb\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\int_L^{+\infty}V_{13}\frac{dU_{13}}{dx}dx
$$

$$
m_{31}=\frac{Eb}{2(1+\nu)}\int_{-\infty}^{0}U_{11}\frac{dV_{11}}{dx}dx\qquad m_{32}=\frac{Eb}{2(1+\nu)}\int_0^l U_{12}\frac{dV_{12}}{dx}dx
\tag{4.37δ}
$$

$$m_{33} = \frac{Eb}{2(1+\nu)}\int_{L}^{+\infty} U_{13}\frac{dV_{13}}{dx}dx \qquad m_{41} = \frac{Eb}{2(1+\nu)}\left[\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{dV_{11}}{dx}\right)^2 dx\right]$$

$$m_{42} = \frac{Eb}{2(1+\nu)}\left[\int_{0}^{L}\left(\frac{dV_{12}}{dx}\right)^2 dx\right] \qquad m_{43} = \frac{Eb}{2(1+\nu)}\left[\int_{L}^{+\infty}\left(\frac{dV_{13}}{dx}\right)^2 dx\right] \tag{4.37ε}$$

$$n_{11} = \frac{Eb(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\int_{-\infty}^{0} V_{11}^2 dx\right] \qquad n_{12} = \frac{Eb(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\int_{0}^{L} V_{12}^2 dx\right]$$

$$n_{13} = \frac{Eb(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\int_{L}^{+\infty} V_{13}^2 dx\right] \qquad n_{21} = \frac{Eb}{2(1+\nu)}\left[\int_{-\infty}^{0} U_{11}^2 dx\right] \tag{4.37στ}$$

$$n_{22} = \frac{Eb}{2(1+\nu)}\left[\int_{0}^{L} U_{12}^2 dx\right] \qquad n_{23} = \frac{Eb}{2(1+\nu)}\left[\int_{L}^{+\infty} U_{13}^2 dx\right]$$

Για την εκπλήρωση της συνθήκης δπ=0 θα πρέπει αφενός οι ολοκληρωτές των ολοκληρωμάτων της σχέσης (4.35) να είναι όλοι ίσοι με το μηδέν και αφετέρου οι τιμές των εκφράσεων εντός των αγκυλών να μηδενίζονται στα όρια x=±∞ και z=0, Η. Επειδή όμως οι μεταβολές δU_{1i}, δV_{1i}, $\delta\varphi_1$, $\delta\psi_1$ των συναρτήσεων U_{1i}, V_{1i}, φ_1, ψ_1 είναι μη μηδενικές, η συνθήκη μηδενισμού της μεταβολής δπ διασπάται στις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

<u>α. Επιφάνεια ελαστικού υποστρώματος -∞<x<+∞, z=0</u>

α1. Τμήμα επιφανείας: -∞<x<0, z=0

Στο πεδίο αυτό ορίζονται οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$(k_4 - k_3)\frac{dV_{11}}{dx} + k_6 U_{11} - k_1\frac{d^2U_{11}}{dx^2} = 0 \tag{4.38α}$$

$$-(k_4 - k_3)\frac{dU_{11}}{dx} + k_2 V_{11} - k_5\frac{d^2V_{11}}{dx^2} = 0 \tag{4.38β}$$

Ξεκινώντας από τις δυο παραπάνω εξισώσεις και ακολουθώντας την μαθηματική διαδικασία που παρουσιάστηκε και στην Παράγραφο 4.3.1 προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$(k_1k_5)\frac{d^4F_I}{dx^4} + \left[(k_4 - k_3)^2 - (k_1k_2 + k_5k_6)\right]\frac{d^2F_I}{dx^2} + (k_2k_6)F_I = 0 \tag{4.39}$$

Στην εξίσωση αυτή η συνάρτηση F_I συνδέεται με τα μεγέθη U_{11}, V_{11} με τις παρακάτω σχέσεις:

$$U_{11} = -L_{12,1}F_I \tag{4.40α}$$

$$V_{11} = L_{11,1}F_I \tag{4.40β}$$

Όπου οι διαφορικοί τελεστές $L_{11,1}$, $L_{12,1}$ δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$L_{11,1} = k_6 - k_1\frac{d^2}{dx^2} \qquad L_{12,1} = (k_4 - k_3)\frac{d}{dx} \tag{4.41}$$

Η επίλυση της εξίσωσης (4.39) οδηγεί στον προσδιορισμό της βοηθητικής συνάρτησης F_I, και με τη βοήθεια των (4.40α), (4.40β) στον προσδιορισμό τελικά των U_{11}, V_{11}.

α2. Τμήμα επιφανείας: 0<x<L, z=0

Στο πεδίο αυτό ορίζονται οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$(k_4 - k_3)\frac{dV_{12}}{dx} + k_6 U_{12} - k_1 \frac{d^2 U_{12}}{dx^2} = 0 \tag{4.42α}$$

$$E_b I \frac{d^4 V_{12}}{dx^4} - q(x) - (k_4 - k_3)\frac{dU_{12}}{dx} + k_2 V_{12} - k_5 \frac{d^2 V_{12}}{dx^2} = 0 \tag{4.42β}$$

Ακολουθώντας την διαδικασία που ακολουθήθηκε και προηγουμένως, προκύπτει:

$$-(E_B I_B k_1)\frac{d^6 F_{II}}{dx^6} + E_B I_B \left[k_6 + \frac{(k_1 k_5)}{E_B I_B}\right]\frac{d^4 F_{II}}{dx^4} + \left[(k_4 - k_3)^2 - (k_1 k_2 + k_5 k_6)\right]\frac{d^2 F_{II}}{dx^2} + (k_2 k_6) F_{II} = q \tag{4.43}$$

Όπου:

$$U_{12} = -L_{12,2} F_{II} = -L_{12,1} F_{II} \qquad V_{12} = L_{11,2} F_{II} = L_{11,1} F_{II} \tag{4.44}$$

α3. Τμήμα επιφανείας: L<x<+∞, z=0

Στο πεδίο αυτό ορίζονται δυο διαφορικές εξισώσεις όμοιες με τις (4.38α) και (4.38β) αλλά με αγνώστους τις μετακινήσεις U_{13}, V_{13}. Επομένως ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως και προηγουμένως, προκύπτει:

$$(k_1 k_5)\frac{d^4 F_{III}}{dx^4} + \left[(k_4 - k_3)^2 - (k_1 k_2 + k_5 k_6)\right]\frac{d^2 F_{III}}{dx^2} + (k_2 k_6) F_{III} = 0 \tag{4.45}$$

Για την βοηθητική συνάρτηση F_{III} ισχύουν:

$$U_{13} = -L_{12,3} F_{III} = -L_{12,1} F_{III} \qquad V_{13} = L_{11,3} F_{III} = L_{11,1} F_{III} \tag{4.46}$$

<u>β. Κατανομή των οριζοντίων και κατακορύφων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου, 0<z<H</u>

Η κατάστρωση της μαθηματικής διατύπωσης του προσομοιώματος του Vlasov με εφαρμογή της αρχής της στάσιμης τιμής της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης οδηγεί, πέραν των εξισώσεων από τις οποίες υπολογίζονται οι μετακινήσεις στην επιφάνεια του υποστρώματος, και στις διαφορικές εξισώσεις που καθορίζουν την κατανομή των μετακινήσεων στο εσωτερικό του. Έτσι από την σχέση (4.35) προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις με άγνωστες τις συναρτήσεις $\varphi_1(z)$ και $\psi_1(z)$:

$$(M_2 - M_3)\frac{d\psi_1}{dz} + M_1 \varphi_1 - N_2 \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} = 0 \tag{4.47α}$$

$$-(M_2 - M_3)\frac{d\varphi_1}{dz} + M_4 \psi_1 - N_1 \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} = 0 \tag{4.47β}$$

Με εισαγωγή της βοηθητικής συνάρτησης G οι παραπάνω εξισώσεις συμπτύσσονται στην παρακάτω εξίσωση:

$$(N_1 N_2)\frac{d^4 G}{dz^4} + \left[(M_2 - M_3)^2 - (M_1 N_1 + M_4 N_2)\right]\frac{d^2 G}{dz^2} + (M_1 M_4) G = 0 \tag{4.48}$$

Η βοηθητική συνάρτηση G συνδέεται με τις άγνωστες συναρτήσεις $\varphi_1(z)$ και $\psi_1(z)$ με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\varphi_1(z) = -(M_2 - M_3)\frac{dG}{dz} \qquad \psi_1(z) = M_1 G - N_2 \frac{d^2 G}{dz^2} \tag{4.49}$$

γ. Εισαγωγή των οριακών συνθηκών και των συνθηκών συνέχειας

Κατά τη διαδικασία σχηματισμού της πρώτης μεταβολής του συναρτησιακού (4.34) διατυπώθηκε η πρόταση – η οποία είναι βασισμένη σε βασικό λήμμα του λογισμού των μεταβολών – ότι ο μηδενισμός της απαιτεί τόσο το μηδενισμό των ολοκληρωτών των ολοκληρωμάτων της (4.35), όσο και τον μηδενισμό των αντιστοίχων εκφράσεων εντός των αγκυλών. Η απαίτηση για μηδενισμό των ολοκληρωτών εκπληρώνεται από την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων (4.39), (4.43), (4.45) και (4.48).

Είναι προφανές, ότι ενώ ο μηδενισμός των ολοκληρωτών απαιτείται σε διαστήματα τιμών τόσο της μεταβλητής x όσο και της μεταβλητής z, ο μηδενισμός των εκφράσεων εντός των αγκυλών απαιτείται σε συγκεκριμένα σημεία του πεδίου. Επομένως η εξίσωση με το μηδέν όλων των εκφράσεων εντός των αγκυλών οδηγεί στην διατύπωση των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος.

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.4, στα άκρα της δοκού (δηλαδή στα σημεία x=0 και x=L), τα οποία είναι τα σημεία της επιφάνειας που βρίσκονται στα όρια των τριών πεδίων στα οποία χωρίζεται το ελαστικό υπόστρωμα, ισχύουν συνθήκες συνέχειας των οριζοντίων και κατακορύφων μετακινήσεων. Βάσει αξιώματος του λογισμού των μεταβολών εφόσον υφίσταται ισότητα τιμών δυο συναρτήσεων σε κάποιο δεδομένο σημείο του πεδίου ορισμού τους, υφίσταται ισότητα και των μεταβολών τους στο δεδομένο σημείο. Επομένως για τα σημεία (x=0, z=0) και (x=L, z=0) θα ισχύουν:

$$U_{11}(0) = U_{12}(0) \Rightarrow \delta U_{11}(0) = \delta U_{12}(0) \tag{4.50α}$$

$$V_{11}(0) = V_{12}(0) \Rightarrow \delta V_{11}(0) = \delta V_{12}(0) \tag{4.50β}$$

$$U_{12}(L) = U_{13}(L) \Rightarrow \delta U_{12}(L) = \delta U_{13}(L) \tag{4.50γ}$$

$$V_{12}(L) = V_{13}(L) \Rightarrow \delta V_{12}(L) = \delta V_{13}(L) \tag{4.50δ}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω ισότητες, και θεωρώντας ότι το πεδίο μετακινήσεων ικανοποιεί τις διαφορικές εξισώσεις (4.39), (4.43), (4.45) και (4.48) η σχέση (4.35) λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned}
\delta\pi = &\left[k_1\left(\frac{dU_{11}}{dx} - \frac{dU_{12}}{dx}\right)\delta U_{11}\right]_{x=0} + \left\{\left[E_b I \frac{d^3V_{12}}{dx^3} - k_5\left(\frac{dV_{12}}{dx} - \frac{dV_{11}}{dx}\right)\right]\delta V_{11}\right\}_{x=0} - \\
&-\left[E_b I \frac{d^2V_{12}}{dx^2}\delta\left(\frac{dV_{12}}{dx}\right)\right]_{x=0} + \left[E_b I \frac{d^2V_{12}}{dx^2}\delta\left(\frac{dV_{12}}{dx}\right)\right]_{x=L} + \left[k_1\left(\frac{dU_{12}}{dx} - \frac{dU_{13}}{dx}\right)\delta U_{12}\right]_{x=L} + \\
&+\left\{\left[-E_b I \frac{d^3V_{12}}{dx^3} + k_5\left(\frac{dV_{12}}{dx} - \frac{dV_{13}}{dx}\right)\right]\delta V_{12}\right\}_{x=L} - \left[\left(k_3 V_{11} + k_1 \frac{dU_{11}}{dx}\right)\delta U_{11}\right]_{(x\to-\infty)} + \\
&+\left[\left(k_3 V_{13} + k_1 \frac{dU_{13}}{dx}\right)\delta U_{13}\right]_{(x\to+\infty)} - \left[\left(k_4 U_{11} + k_5 \frac{dV_{11}}{dx}\right)\delta V_{11}\right]_{(x\to-\infty)} + \\
&+\left[\left(k_4 U_{13} + k_5 \frac{dV_{13}}{dx}\right)\delta V_{13}\right]_{(x\to+\infty)} + \left[\left(N_1 \frac{d\psi_1}{dz} + M_2\varphi_1\right)\delta\psi_1\right]_0^H + \left[\left(N_2 \frac{d\varphi_1}{dz} + M_3\psi_1\right)\delta\varphi_1\right]_0^H = 0
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν και οι υπόλοιπες τρεις συνθήκες συνέχειας στα άκρα x=0 και x=L της δοκού. Πιο συγκεκριμένα για το σημείο x=0 προκύπτουν οι παρακάτω συνθήκες:

$$\left.\frac{dU_{11}}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{dU_{12}}{dx}\right|_{x=0} \tag{4.52α}$$

$$\left\{\left[E_b I \frac{d^3V_{12}}{dx^3} - k_5\left(\frac{dV_{12}}{dx} - \frac{dV_{11}}{dx}\right)\right]\right\}_{x=0} = 0 \tag{4.52β}$$

$$\left[E_b I \frac{d^2V_{12}}{dx^2}\right]_{x=0} = 0 \tag{4.52γ}$$

Η συνθήκη (4.52α) μαζί με την (4.50α) εκφράζει την συνέχεια των οριζοντίων μετακινήσεων στο άκρο x=0 της δοκού, και η συνθήκη (4.52γ) το μηδενισμό της ροπής κάμψης στο ίδιο σημείο. Η συνθήκη (4.52β) επαληθεύεται από τη κλασσική θεώρηση των συνθηκών ισορροπίας: Όπως είναι γνωστό στα πλαίσια της διαδικασίας σχηματισμού των εξισώσεων ισορροπίας του προσομοιώματος του Vlasov (Παράγραφος 2.2.2.5) ορίζονται η γενικευμένη διαμήκης και η γενικευμένη εγκάρσια (διατμητική) δύναμη T_1 και S_1 (σχέσεις (2.21α) και (2.21β) αντίστοιχα). Ξεκινώντας από τις σχέσεις (2.21α) και (2.21β) και λαμβάνοντας υπόψη τις (4.31α), (4.31γ) και (4.36) προκύπτουν:

$$T_1 = k_1 \frac{dU}{dx} + k_3 V \tag{4.53α}$$

$$S_1 = k_5 \frac{dV}{dx} + k_4 U \tag{4.53β}$$

Από την εφαρμογή των (4.53α) και (4.53β) αριστερά και δεξιά του σημείου x=0 (δηλαδή για $x=0^-$ και $x=0^+$) προκύπτουν:

$$T_1\big|_{x=0^-} = T_{11}(0) = k_1 \left.\frac{dU_{11}}{dx}\right|_{x=0} + k_3 V_{11}(0) \qquad T_1\big|_{x=0^+} = T_{12}(0) = k_1 \left.\frac{dU_{12}}{dx}\right|_{x=0} + k_3 V_{12}(0) \tag{4.54α}$$

$$S_1\big|_{x=0^-} = S_{11}(0) = k_5 \left.\frac{dV_{11}}{dx}\right|_{x=0} + k_4 U_{11}(0) \qquad S_1\big|_{x=0^+} = S_{12}(0) = k_5 \left.\frac{dV_{12}}{dx}\right|_{x=0} + k_4 U_{12}(0) \tag{4.54β}$$

Επειδή όμως η γενικευμένη διατμητική δύναμη S_1 είναι η συνισταμένη των διατμητικών τάσεων στο εσωτερικό του υποστρώματος, και αφού οι όλες οι συνθήκες ισορροπίας αφορούν όχι μόνο το εδαφικό υπόστρωμα αλλά το σύστημα δοκός – εδαφικό υπόστρωμα, θα πρέπει να προστεθεί στην τιμή της διατμητικής δύναμης $S_{12}(0)$ και η τέμνουσα δύναμη της δοκού. Από την πρόσθεση αυτή προκύπτει η γενικευμένη τέμνουσα της δοκού N(x) για την οποία έγινε αναφορά στην Παράγραφο 4.2.2 (Σχέση 4.14), και στην Παράγραφο 4.3.1 (Σχέση 4.27γ):

$$N\big|_{x=0} = Q(0) + S_{12}(0) = -E_b I \frac{d^3V_{12}}{dx^3} + \left[k_5 \left.\frac{dV_{12}}{dx}\right|_{x=0} + k_4 U_{12}(0)\right] \tag{4.55}$$

Επειδή προφανώς θα πρέπει να ισχύει: $S_{11}(0)=N(0)$, η εξίσωση των σχέσεων (4.54β) και (4.55) δίνει:

$$-E_b I \frac{d^3V_{12}}{dx^3} + \left[k_5 \left.\frac{dV_{12}}{dx}\right|_{x=0} + k_4 U_{12}(0)\right] = k_5 \left.\frac{dV_{11}}{dx}\right|_{x=0} + k_4 U_{11}(0) \tag{4.56}$$

Αν όμως στην παραπάνω σχέση ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι $U_{11}(0)=U_{12}(0)$ (Σχέση 4.50α), τότε προκύπτει η (4.52β).

Με βάση τους παραπάνω συλλογισμούς, προκύπτουν αντίστοιχες συνθήκες συνέχειας και για το άλλο άκρο της δοκού x=L.

Μετά τον σχηματισμό των συνθηκών συνέχειας στα σημεία (x=0, z=0) και (x=L, z=0), θα πρέπει να γίνει και ο σχηματισμός των οριακών συνθηκών, των συνθηκών δηλαδή που ισχύουν στα όρια του ελαστικού υποστρώματος, δηλαδή στα όρια {x→-∞, z=0} και {x→+∞, z=0}. Είναι προφανές ότι καθώς το x τείνει στο άπειρο, τόσο οι οριζόντιες όσο και οι κατακόρυφες μετακινήσεις τείνουν στο μηδέν. Επομένως:

$$\left(U_{11}\right)_{x\to-\infty}=0 \Rightarrow \left(\delta U_{11}\right)_{x\to-\infty}=0 \qquad \left(V_{11}\right)_{x\to-\infty}=0 \Rightarrow \left(\delta V_{11}\right)_{x\to-\infty}=0 \tag{4.57α}$$

$$\left(U_{13}\right)_{x\to+\infty}=0 \Rightarrow \left(\delta U_{13}\right)_{x\to+\infty}=0 \qquad \left(V_{13}\right)_{x\to+\infty}=0 \Rightarrow \left(\delta V_{13}\right)_{x\to+\infty}=0 \tag{4.57β}$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι συμβατές με τις απαραίτητες συνθήκες μηδενισμού της (4.51).

Για τον προσδιορισμό των συναρτήσεων κατανομής των μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου $\varphi_1(z)$ και $\psi_1(z)$, απαιτείται η επίλυση των εξισώσεων (4.47α) και (4.47β), ή ισοδύναμα της εξίσωσης (4.48). Οι απαιτούμενες για την επίλυση αυτή συνοριακές συνθήκες, προκύπτουν από τις αρχικές παραδοχές (4.29γ) και (4.29δ), και ικανοποιούν τη συνθήκη δπ=0 (Σχέση 4.51). Πράγματι, εφόσον οι συναρτήσεις $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ έχουν σταθερές τιμές στα όρια z=0 και z=H, αυτό σημαίνει ότι:

$$\left(\delta\varphi_1\right)_{z=0}=\left(\delta\psi_1\right)_{z=0}=0 \tag{4.58α}$$

$$\left(\delta\varphi_1\right)_{z=H}=\left(\delta\psi_1\right)_{z=H}=0 \tag{4.58β}$$

Οι δυο παραπάνω σχέσεις προκαλούν τον μηδενισμό των αντιστοίχων εκφράσεων της (4.51) και επομένως οι συνοριακές συνθήκες (4.29γ) και (4.29δ) είναι συμβατές με την απαίτηση μηδενισμού της πρώτης μεταβολής δπ της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης του συστήματος δοκός – ελαστικό υπόβαθρο (Σχήμα 4.4).

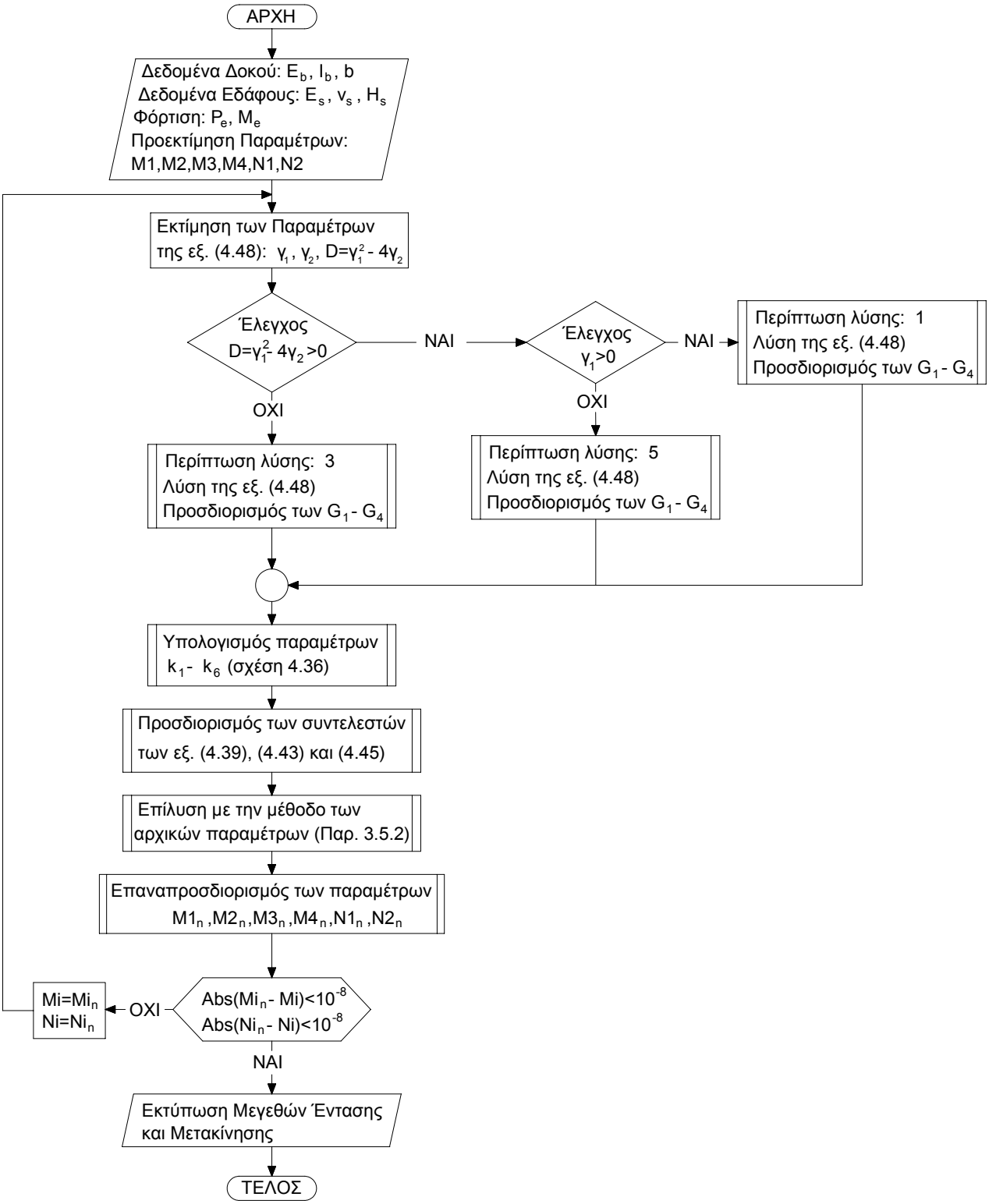
Ανακεφαλαιώνοντας την διαδικασία που παρουσιάστηκε παραπάνω, θα πρέπει να τονιστεί ότι από την εφαρμογή της αρχής της στάσιμης τιμής της ελαστικής ενέργειας του συστήματος δοκός – ελαστικό υπόβαθρο προκύπτουν τα ακόλουθα:

1. Το πρόβλημα διέπεται από τρεις διαφορικές εξισώσεις από τις οποίες προσδιορίζονται οι μετακινήσεις της επιφάνειας του ελαστικού υποβάθρου (εξισώσεις (4.39), (4.43) και (4.45)), και από μια διαφορική εξίσωση από την οποία προσδιορίζεται η κατανομή των οριζοντίων και κατακορύφων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποστρώματος (εξίσωση 4.48). Για τις εξισώσεις αυτές ισχύουν τα εξής:
   - Η εξίσωση η οποία διέπει τις μετακινήσεις στο τμήμα της επιφανείας του εδάφους που βρίσκεται εν επαφή με τη δοκό (εξίσωση 4.43), είναι μια διαφορική εξίσωση έκτης τάξης όμοια με αυτή που διέπει το πρόβλημα της κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων του Kerr (εξισώσεις (3.7α) και (3.22)). Επομένως για την επίλυση της μπορεί να γίνει χρήση των λύσεων που σχηματίστηκαν στην Παράγραφο 3.1 (βλέπε και Πίνακες 3.2α, 3.2β).
   - Οι εξισώσεις οι οποίες διέπουν τις μετακινήσεις στα τμήματα της επιφάνειας του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού (εξισώσεις (4.39) και (4.45)), αλλά και η εξίσωση που διέπει την κατανομή των μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου (εξίσωση 4.48), είναι εξισώσεις τέταρτης τάξης όμοιες

με αυτήν που διέπει το πρόβλημα της κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων (εξισώσεις (4.11) και (4.12)). Επομένως για την επίλυση τους μπορεί να γίνει χρήση των λύσεων που δίνονται στο σχήμα 4.2.

2. Επαληθεύονται οι συνθήκες συνέχειας και οι οριακές συνθήκες που χρησιμοποιούνται για την επίλυση του προβλήματος με τη μέθοδο των Rao et al, η οποία παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 4.3.1. Η διαφορά της παρούσας προσέγγισης του προβλήματος από την αντίστοιχη των Rao et al έγκειται στο γεγονός της μαθηματικής τεκμηρίωσης της εξίσωσης που διέπει την κατανομή των μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου.
3. Η επίλυση του προβλήματος μπορεί να γίνει μόνον με επαναληπτική διαδικασία, καθώς οι συντελεστές της εξίσωσης (4.48) εξαρτώνται από τα ολοκληρώματα (4.37γ – 4.37στ). Τα ολοκληρώματα αυτά όμως εξαρτώνται από τις συναρτήσεις $U_{1i}(x)$ και $V_{1i}(x)$ ο προσδιορισμός των οποίων απαιτεί την επίλυση των (4.39), (4.43) και (4.45). Οι συντελεστές των εξισώσεων αυτών υπολογίζονται από τα ολοκληρώματα (4.36) που με τη σειρά τους εξαρτώνται από τις συναρτήσεις $\varphi_1(z)$ και $\psi_1(z)$. Τέλος ο προσδιορισμός των συναρτήσεων $\varphi_1(z)$ και $\psi_1(z)$ απαιτεί την επίλυση της εξίσωσης (4.48). Επομένως το σχήμα επίλυσης θα πρέπει να είναι αυτό που δίνεται εποπτικά στο διάγραμμα ροής της επόμενης σελίδας.

Διάγραμμα ροής για την επίλυση του προβλήματος της κάμψης δοκού πεπερασμένου μήκους επί ελαστικού υποβάθρου Vlasov με θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου, σύμφωνα με την νέα προσέγγιση.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. Αριθμητικές Εφαρμογές

5.1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί μια σειρά από αριθμητικές εφαρμογές οι οποίες αποσκοπούν:

- στην σύγκριση του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων με τα προσομοιώματα των δυο παραμέτρων και μίας παραμέτρου, έχοντας ως λύση αναφοράς αυτήν που προκύπτει από την προσομοίωση του εδάφους με επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία, και
- στην διερεύνηση της εφαρμοσιμότητας του νέου γενικευμένου στοιχείου, που παρουσιάστηκε στις Παραγράφους 3.6 και 3.7, σε προβλήματα προσομοίωσης στοιχείων θεμελίωσης κυρίως, και σε προβλήματα προσομοίωσης στοιχείων με ημιάκαμπτες συνδέσεις δευτερευόντως.

Το κεφάλαιο ξεκινά με μια παράθεση σχετικών παραδειγμάτων της βιβλιογραφίας, ορισμένα εκ των οποίων θα επιλυθούν και στα πλαίσια της παρούσας διατριβής. Πιο συγκεκριμένα, θα γίνει μια σύντομη επισκόπηση της βιβλιογραφίας με αναλυτική παρουσίαση των παραδειγμάτων που θα επιλυθούν στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, ή όσων καταλήγουν σε αξιοπρόσεκτα συμπεράσματα. Θα παρουσιαστούν παραδείγματα που αφορούν σε επιλύσεις με το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων (τα οποία, όπως έχει τονιστεί και σε προηγούμενα κεφάλαια, είναι ελάχιστα), με το κλασικό προσομοίωμα των δυο παραμέτρων, και με το προσομοίωμα του Vlasov.

Στο δεύτερο τμήμα του Κεφαλαίου γίνεται παρουσίαση των δεδομένων και των αποτελεσμάτων των παραδειγμάτων που επιλύθηκαν στα πλαίσια της παρούσας έρευνας. Με βάση τους στόχους των αριθμητικών εφαρμογών που αναφέρθηκαν παραπάνω, τα παραδείγματα που επιλύθηκαν ταξινομούνται σε τρεις ομάδες:

Ομάδα 1: Τα παραδείγματα της ομάδας αυτής αφορούν την επίλυση δοκών «απείρου» μήκους υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση (Παράδειγμα 1α, Σχήμα 5.3) και υπό μοναχική ροπή (Παράδειγμα 1β, Σχήμα 5.3). Η αναλυτική επίλυση των προβλημάτων αυτών για δοκούς επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 4.1. Πέραν του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων, ελέγχονται το προσομοίωμα του Winkler καθώς και τα προσομοιώματα δυο παραμέτρων. Ως λύσεις αναφοράς χρησιμοποιούνται κατά περίπτωση οι λύσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή των εξισώσεων του ελαστικού ημιεπιπέδου (Biot (1937) και Vesic (1960)), αλλά και λύσεις που προκύπτουν από την χρήση προσομοιωμάτων επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων.

Ομάδα 2: Τα παραδείγματα της ομάδας αυτής αφορούν την επίλυση δοκών πεπερασμένου μήκους, καταρχήν με απλές φορτίσεις (κατακόρυφες δυνάμεις και ροπές, Παραδείγματα 2α και 2β, Σχήμα 5.23), και εν συνεχεία με πιο σύνθετα συστήματα φόρτισης (Παράδειγμα 2γ, Σχήμα 5.34). Για τις αναλύσεις, γίνεται χρήση των προσομοιωμάτων που χρησιμοποιούνται και για την επίλυση των παραδειγμάτων της Ομάδας 1. Ως λύσεις αναφοράς χρησιμοποιούνται λύσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή προσομοιωμάτων επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων.

Ομάδα 3: Με την τρίτη ομάδα παραδειγμάτων παρουσιάζεται η εφαρμογή του προτεινόμενου γενικευμένου στοιχείου στην προσομοίωση στοιχείων θεμελίωσης και στοιχείων με ημιάκαμπτες συνδέσεις. Παράλληλα διερευνάται η εφαρμοσιμότητα του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων σε πιο σύνθετα συστήματα φορέων θεμελίωσης. Πιο συγκεκριμένα, τα παραδείγματα που επιλύονται στα πλαίσια των παραδειγμάτων της ομάδας 3 είναι τα εξής:

Παράδειγμα 3α – Απλό πλαίσιο σύμφωνα με τη θεωρία α' και β' τάξης (Σχήμα 5.47): Με το παράδειγμα αυτό τεκμηριώνεται η δυνατότητα του προτεινόμενου στοιχείου για εύκολη και αξιόπιστη προσομοίωση στοιχείων θεμελίωσης αλλά και στοιχείων με ημιάκαμπτες συνδέσεις όπως είναι τα μεταλλικά πλαίσια.

Παράδειγμα 3β – Τριώροφα πλαίσια υπό οριζόντια και κατακόρυφη στατική φόρτιση (Σχήμα 5.63): Το παράδειγμα αυτό έχει ως στόχο την διερεύνηση της επιρροής του χρησιμοποιούμενου εδαφικού προσομοιώματος σε περιοχές ενός φορέα που βρίσκονται τοπολογικά μακριά από την περιοχή της ενδόσιμης θεμελίωσης. Διερευνάται επίσης και η επιρροή του εδάφους που βρίσκεται εκατέρωθεν του φορέα εντός του επιπέδου του. Γίνεται χρήση των προσομοιωμάτων που εφαρμόστηκαν και για τα παραδείγματα της πρώτης ομάδας παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 3γ – Ελαστική ευστάθεια πασσαλοθεμελίωσης (Σχήμα 5.92): Το παράδειγμα αυτό αφορά την μελέτη της ελαστικής ευστάθειας ενός φορέα θεμελίωσης, ο οποίος αποτελείται από μια πεδιλοδοκό που εδράζεται μέσω πασσάλων σε ακλόνητο υπόβαθρο (βράχο). Στόχοι του παραδείγματος αυτού είναι η εφαρμογή του νέου στοιχείου σε προβλήματα στα οποία απαιτείται ο προσδιορισμός κρίσιμου φορτίου λυγισμού και η διερεύνηση της επιρροής της δεύτερης εδαφικής παραμέτρου επί της τιμής του κρισίμου φορτίου λυγισμού.

5.2. Σύντομη επισκόπηση χαρακτηριστικών παραδειγμάτων της βιβλιογραφίας

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστούν συνοπτικά κάποια από τα παραδείγματα της βιβλιογραφίας τα οποία αφορούν το πρόβλημα της κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου δυο και τριών παραμέτρων. Η μορφή της παρουσίασης συνίσταται στη παράθεση του φορέα, της φόρτισης του και των χαρακτηριστικών του εδάφους, καθώς και στην παρουσίαση των συμπερασμάτων των επιλύσεων.

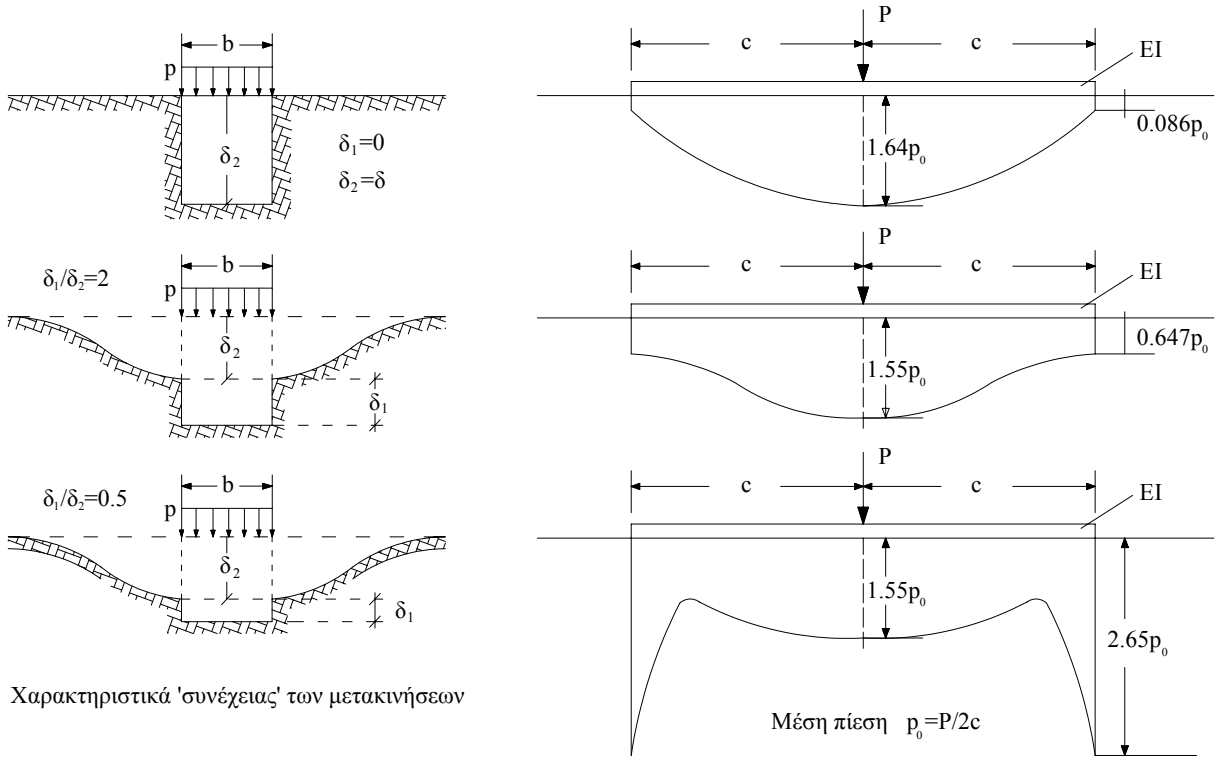
5.2.1. Δοκοί επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων

Όπως τονίστηκε και στην Παράγραφο 1.2.1.3, είναι λίγες οι δημοσιεύσεις – και κατ' επέκταση τα παραδείγματα – πάνω στο αντικείμενο της κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων. Θα πρέπει μάλιστα να τονιστεί ότι το μεγαλύτερο μέρος του μικρού αυτού τμήματος της βιβλιογραφίας είναι καθαρά θεωρητικό και δεν περιέχει αριθμητικές εφαρμογές. Εξαίρεση αποτελεί η συστηματική διερεύνηση και η πρακτική εφαρμογή, με αξιοσημείωτα μάλιστα αποτελέσματα, του εν λόγω προσομοιώματος από τον Horvath ((1983α, β) και (1992)), για την οποία γίνεται αναφορά στην Παράγραφο 2.2.7. Η διερεύνηση αυτή – τμήμα της οποίας αποτελείται από συγκρίσεις με αποτελέσματα που προέκυψαν από μετρήσεις σε υπάρχουσες κατασκευές – είναι καθαρά προσανατολισμένη προς την εδαφοτεχνική πλευρά του προβλήματος, υπό την έννοια ότι δεν επεκτείνεται στην μητρωική του διατύπωση (βλέπε Παραγράφους

1.2.1.3 και 2.2.7). Έτσι τα αριθμητικά αποτελέσματα των εφαρμογών που διενεργήθηκαν στα πλαίσια της έρευνας του Horvath δεν μπορούν να αποτελέσουν συγκρίσιμα αποτελέσματα για τις εφαρμογές της παρούσας διατριβής, και για τον λόγο αυτό δεν παρατίθενται αναλυτικά εδώ. Ωστόσο τα συμπεράσματα της διερεύνησης αυτής, που παρουσιάζονται στην Παράγραφο 2.2.7 της παρούσας διατριβής, καταδεικνύουν μια σαφή υπεροχή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων έναντι του προσομοιώματος του Winkler. Οι υπόλοιπες διαθέσιμες αριθμητικές εφαρμογές του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων είναι:

– Απλή δοκός πεπερασμένου μήκους επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων του Hetényi.

  Ο Hetényi (1950) επικεντρώνεται σε ένα παράδειγμα που ως στόχο έχει να παρουσιάσει τη δυνατότητα του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων στην επιτυχή προσομοίωση διαφορετικών κατανομών πίεσης στην διεπιφάνεια εδάφους – δοκού ανάλογα με το «βαθμό» συνέχειας που επιλέγεται (Παράγραφος 2.2.3.3). Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι μεταβάλλοντας το «βαθμό» συνέχειας των μετακινήσεων προκύπτει μια σειρά από διαφορετικές κατανομές πίεσης, όπως φαίνεται ποιοτικά στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 5.1. Κατανομή πίεσης κάτω από δοκό πεπερασμένου μήκους επί ελαστικού υποβάθρου του Hetényi

Στο σχήμα 5.1 καθίσταται εμφανής η δυνατότητα προσαρμοστικότητας του προσομοιώματος όσον αναφορά την ορθή προσομοίωση της κατανομής των πιέσεων που αναπτύσσονται κάτω από φορτιζόμενη δοκό που εδράζεται επί εδάφους διαφόρων «μηχανικών» χαρακτηριστικών.

– Απολύτως στερεά δοκός επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Kerr.

  Ο Kerr (1965) παρουσιάζει μια σειρά από παραμετρικές αναλύσεις απολύτως στερεών δοκών φορτιζόμενων είτε από μοναχική κατακόρυφη δύναμη είτε από μοναχική ροπή στο μέσον του ανοίγματος. Τα συμπεράσματα των αναλύσεων αυτών παρουσιάζονται στην Παράγραφο 2.2.7.

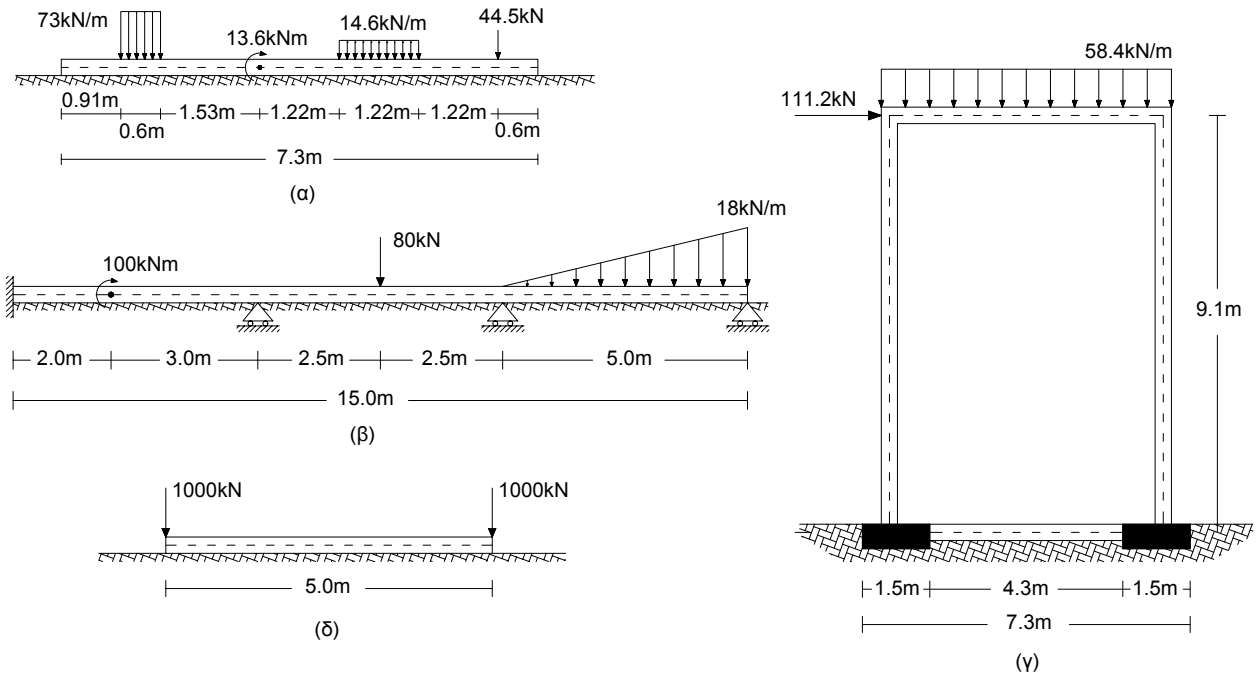
5.2.2. Δοκοί επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων

Η βιβλιογραφία που αφορά το πρόβλημα της κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων είναι σαφώς πιο εκτεταμένη από την αντίστοιχη βιβλιογραφία που αφορά το πρόβλημα των τριών παραμέτρων. Οι διαθέσιμες αριθμητικές εφαρμογές (που εντοπίστηκαν κατά την έρευνα της βιβλιογραφίας) αφορούν κατά κύριο λόγο προβλήματα δοκών Euler, ενώ υπάρχουν και ορισμένα παραδείγματα που αφορούν τη δοκό Timoshenko. Πρόκειται κατά κανόνα για απλά παραδείγματα δοκών μιας ή περισσοτέρων ανοιγμάτων με διάφορες συνθήκες στήριξης και φόρτισης, ενώ εξαίρεση αποτελούν κάποιες επιλύσεις επιπέδων πλαισίων. Παρακάτω θα παρουσιαστούν αναλυτικά τα παραδείγματα που εμφανίζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για το αντικείμενο έρευνας της παρούσας διατριβής. Πρόκειται για αριθμητικές εφαρμογές που παρουσιάζονται στις εργασίες των Zhaohua και Cook (1983), Chiwanga και Valsangkar (1988), Razaqpur και Shah (1991), Shirima και Giger (1992), και Onu (2000).

1. Δοκός με ελεύθερα άκρα και σύνθετη φόρτιση ((Harr et al. (1969), Chiwanga και Valsangkar (1988), και Razaqpur και Shah (1991)), (Σχήμα 5.2α). Πρόκειται για μια ενδιαφέρουσα αριθμητική εφαρμογή, αφενός διότι απαιτεί την χρήση μητρώων φορτίου για διάφορους τύπους φόρτισης και αφετέρου διότι η επίλυση της με διάφορες τιμές των παραμέτρων του προβλήματος και με διαφορετικές παραδοχές δίνει τη δυνατότητα χρήσιμων συγκρίσεων.

Το παράδειγμα επιλύθηκε για πρώτη φορά από τον Harr et al. (1969) με βάση το κλασσικό προσομοίωμα του Vlasov. Ωστόσο κατά την επίλυση αυτή δεν πραγματοποιήθηκαν συγκρίσεις με αντίστοιχες επιλύσεις με άλλα προσομοιώματα, και επομένως δεν παρατίθενται σχετικά συμπεράσματα.

Οι Chiwanga και Valsangkar (1988) επίλυσαν το ίδιο παράδειγμα με το προσομοίωμα του Pasternak. Στόχος των επιλύσεων που πραγματοποίησαν είναι αφενός η σύγκριση με τα προσομοιώματα των Vlasov και Winkler, και αφετέρου η σύγκριση των αποτελεσμάτων της επίλυσης με βάση την «αναλυτική» λύση, με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από την επίλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Προκειμένου να συγκριθούν το προσομοίωμα του Pasternak με το προσομοίωμα του Vlasov πραγματοποιήθηκε μια επίλυση κατά την οποία δόθηκαν στις δυο εδαφικές παραμέτρους, οι ίδιες τιμές με αυτές που είχαν χρησιμοποιήσει και οι Harr et al. (1969). Δεν διευκρινίζεται αν δεν λήφθηκε ή όχι υπόψη η επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού. Τα αποτελέσματα των δύο επιλύσεων ήρθαν σε πολύ μεγάλη σύγκλιση γεγονός που αποδεικνύει και αριθμητικά ότι τα προσομοιώματα των Vlasov και Pasternak είναι ισοδύναμα υπό την προϋπόθεση της χρήσης κοινών τιμών για τις δυο εδαφικές παραμέτρους. Η σύγκριση του προσομοιώματος του Pasternak με το προσομοίωμα του Winkler ανέδειξε αξιοσημείωτες διαφορές μεταξύ τους, κυρίως στα αποτελέσματα που αφορούν τις αναπτυσσόμενες καμπτικές ροπές.



Σχήμα 5.2. Χαρακτηριστικές αριθμητικές εφαρμογές του προσομοιώματος των δυο παραμέτρων από τη βιβλιογραφία: (α) Δοκός Euler με ελεύθερα άκρα (Harr et al. (1969)), Chiwanga και Valsangkar (1988), και Razaqpur και Shah (1991)), (β) Συνεχής δοκός Euler τριών ανοιγμάτων (Razaqpur και Shah (1991)), (γ) Επίπεδο πλαίσιο με κατακόρυφη και οριζόντια φόρτιση Chiwanga και Valsangkar (1988)), (δ) Δοκός Timoshenko με ελεύθερα άκρα (Onu (2000)).

Οι Razaqpur και Shah (1991) επέλυσαν το ίδιο παράδειγμα πραγματοποιώντας μια ευρύτερη διερεύνηση, καθώς εκτός από τις τιμές των εδαφικών παραμέτρων που χρησιμοποίησαν οι Harr et al. (1969) και οι οποίες αντιστοιχούν στην συνήθη περίπτωση λύσης της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος (Περίπτωση 3, βλέπε Παράγραφο 4.2.1, Σχήμα 4.2), χρησιμοποίησαν και τιμές που αντιστοιχούν στην περίπτωση λύσης 5. Επιπλέον, πραγματοποίησαν και διερεύνηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού. Τα βασικά συμπεράσματα στα οποία κατέληξαν είναι ότι η διακύμανση της τιμής της δεύτερης παραμέτρου έχει μεγάλη επιρροή στις τιμές των καμπτικών ροπών και των κατακορύφων μετακινήσεων (της τάξης του 40%) και σε μικρότερο βαθμό στις τιμές των τεμνουσών, και ότι η θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού μειώνει κατά 50% περίπου τις κατακόρυφες μετακινήσεις και ταυτόχρονα μεταβάλει κατά 10% περίπου τις τέμνουσες δυνάμεις και τις καμπτικές ροπές. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός, ότι ενώ η διαφοροποίηση που παρατηρείται στις τιμές των καμπτικών ροπών δεν είναι μεγάλη, τα διαγράμματα που προκύπτουν από τις δυο επιλύσεις εμφανίζουν μεταβολές προσήμων σε μεγάλες περιοχές της δοκού.

2. Συνεχής δοκός Euler τριών ανοιγμάτων (Razaqpur και Shah (1991)), (Σχήμα 5.2β). Το παράδειγμα αυτό επιλύθηκε με βάση το προσομοίωμα των δυο παραμέτρων του Pasternak χωρίς την επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού. Αν και δεν παρατίθενται ούτε παραμετρικές αναλύσεις αλλά ούτε και συγκρίσεις με άλλα προσομοιώματα, το εν λόγω παράδειγμα εμφανίζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς αποτελεί μια καλή εφαρμογή για τη σύγκριση των προσομοιωμάτων μιας και δυο παραμέτρων.

3. Επίπεδο πλαίσιο με κατακόρυφη και οριζόντια φόρτιση Chiwanga και Valsangkar (1988)) (Σχήμα 5.2γ).

Πρόκειται για μια ενδιαφέρουσα αριθμητική εφαρμογή, καθώς αφορά ένα φορέα όχι αποκλειστικώς ακαδημαϊκού ενδιαφέροντος, υπό την έννοια ότι είναι πιθανό να εμφανιστεί και σε συνήθεις πρακτικές εφαρμογές. Το παράδειγμα αυτό επιλύθηκε αρχικά από τους Ting και Mockry (1984) με βάση το προσομοίωμα του Winkler με και χωρίς την θεώρηση ζωνών αποκόλλησης από το έδαφος. Οι Chiwanga και Valsangkar (1988) επίλυσαν το ίδιο πλαίσιο με το προσομοίωμα των δυο παραμέτρων του Pasternak με θεώρηση ζωνών αποκόλλησης από το έδαφος αλλά χωρίς τη θεώρηση του εδάφους εκατέρωθεν του πλαισίου. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι για τον προσδιορισμό των τιμών των δυο παραμέτρων έγινε χρήση των εξισώσεων του Vlasov για ελαστικό υπόβαθρο «απείρου» βάθους (σχέσεις (2.121γ) και (2.130γ)). Το βασικό συμπέρασμα από την σύγκριση των προσομοιωμάτων μιας και δυο παραμέτρων είναι ότι η θεώρηση της «συνέχειας» που προσδίδει στις κατακόρυφες μετακινήσεις της επιφανείας του εδάφους η δεύτερη παράμετρος, προκαλεί ανακατανομές στις ροπές των κόμβων των υποστυλωμάτων με την θεμελιοδοκό, αλλά και διαφοροποιήσεις στις τιμές των κατακόρυφων μετακινήσεων.

4. Δοκός Timoshenko με ελεύθερα άκρα

Οι αριθμητικές εφαρμογές δοκών Timoshenko που κατέστη δυνατό να εντοπιστούν κατά τη διάρκεια της έρευνας της βιβλιογραφίας είναι σχετικά περιορισμένες, όπως αναφέρθηκε και στην Παράγραφο 1.2.1.2. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στα πλαίσια της παρούσας έρευνας παρουσιάζουν οι αριθμητικές εφαρμογές των Shirima και Giger (1992) και του Onu (2000):

4α. *Δοκός πεπερασμένου μήκους με ελεύθερα άκρα, φορτιζόμενη με μοναχική ροπή στο μέσον του ανοίγματος της (Shirima και Giger (1992))*. Πρόκειται για μια πολύ απλή αριθμητική εφαρμογή η οποία επιλύθηκε τόσο με το προσομοίωμα των δυο παραμέτρων όσο και με το προσομοίωμα του Winkler. Ως τιμή για την πρώτη παράμετρο επιλέχθηκε μια κοινή τιμή και για τις δυο περιπτώσεις ανάλυσης, ενώ για την δεύτερη παράμετρο χρησιμοποιήθηκε τιμή που προέκυψε από την εφαρμογή των εξισώσεων του Vlasov για ελαστικό υπόβαθρο «απείρου» βάθους (Σχέση 2.130γ). Από την σύγκριση των αποτελεσμάτων των δυο προσομοιωμάτων προκύπτει το συμπέρασμα ότι η μη θεώρηση της δεύτερης παραμέτρου οδηγεί σε υποεκτίμηση των καμπτικών ροπών, και ότι οι διαφορές στις μέγιστες τιμές των κατακορύφων μετακινήσεων και των τεμνουσών δυνάμεων είναι της τάξης του 60%.

4β. Δοκός πεπερασμένου μήκους με ελεύθερα άκρα, φορτιζόμενη με δυο μοναχικές δυνάμεις στα άκρα της Onu (2000), (Σχήμα 5.2δ). Πρόκειται για μια παραμετρική ανάλυση για διάφορες τιμές γεωμετρικών μεγεθών της διατομής της δοκού και σύγκριση μεταξύ των προσομοιωμάτων μίας και δυο παραμέτρων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το συμπέρασμα ότι οι διαφορές μεταξύ των προσομοιωμάτων μιας και δυο παραμέτρων στον υπολογισμό των μεγίστων καμπτικών ροπών κυμαίνεται ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της διατομής της δοκού μεταξύ 28 και 42%, ενώ οι αντίστοιχες διαφορές των κατακορύφων μετακινήσεων μεταξύ 5 και 15%.

5. Αριθμητικές εφαρμογές δοκών «απείρου» μήκους

Πέραν των αριθμητικών εφαρμογών του Vlasov που θα παρουσιαστούν παρακάτω, ενδιαφέρον παρουσιάζει η εφαρμογή των Zhaohua και Cook (1983). Πρόκειται για την επίλυση δοκού Euler «απείρου» μήκους με μοναχική κατακόρυφη φόρτιση, τόσο με τη χρήση των αναλυτικών όσο και των αλγεβρικών / προσεγγιστικών συναρτήσεων παρεμβολής. Η εφαρμογή επιλύθηκε τόσο με το προσομοίωμα των δυο όσο και της μιας παραμέτρου. Για τον υπολογισμό των παραμέτρων των προσομοιωμάτων αυτών χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις του Vlasov για ελαστικό υπόβαθρο «απείρου» βάθους (σχέσεις (2.121γ), (2.130γ)). Απευθείας συγκρίσεις μεταξύ των προσομοιωμάτων μιας και δυο παραμέτρων δεν πραγματοποιήθηκαν. Οι συγκρίσεις περιορίστηκαν στην διερεύνηση της αξιοπιστίας των προσεγγιστικών συναρτήσεων παρεμβολής. Ωστόσο, από αυτές προέκυψε το συμπέρασμα ότι η επίλυση με το προσομοίωμα των δυο παραμέτρων είναι πιο «απαιτητική» από την αντίστοιχη επίλυση με το προσομοίωμα του Winkler όσο αναφορά το ελάχιστο απαιτούμενο αριθμό πεπερασμένων στοιχείων για την επίτευξη ενός ικανοποιητικού επιπέδου σύγκλισης προς την «ακριβή» λύση.

6. Αριθμητικές εφαρμογές με χρήση του προσομοιώματος του κλασσικού και του τροποποιημένου προσομοιώματος του Vlasov.

Παρακάτω θα παρουσιαστούν και ορισμένες χαρακτηριστικές αριθμητικές εφαρμογές του προσομοιώματος του Vlasov αλλά και του αντίστοιχου τροποποιημένου προσομοιώματος, που εντάσσονται στα προσομοιώματα δυο παραμέτρων.

Στην κλασσική του εργασία ο Vlasov (1960), προχωρά σε συγκρίσεις αποτελεσμάτων που αφορούν το πρόβλημα δοκών «απείρου» και πεπερασμένου μήκους υπό μοναχική κατακόρυφη δύναμη. Οι συγκρίσεις που πραγματοποιούνται έχουν ως στόχο τη διερεύνηση της επιρροής της παραμέτρου γ (βλέπε Παράγραφο 2.2.2.5 της παρούσης, Σχέση 2.29), αλλά και την σύγκριση τόσο με το προσομοίωμα του Winkler όσο και με το προσομοίωμα του συνεχούς ελαστικού μέσου. Από την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της επίλυσης του προβλήματος δοκών «απείρου» μήκους προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Τα αποτελέσματα των προσομοιωμάτων του Vlasov και του Winkler είναι σε πολύ καλή σύμπτωση, καθώς επί παραδείγματι η διαφορά των δυο προσομοιωμάτων στο υπολογισμό της μέγιστης ροπής δεν ξεπερνά το 4%. Θα πρέπει βέβαια να τονιστεί ότι το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από την επίλυση για μια και μόνο τιμή της παραμέτρου γ (γ=1.5).
- Οι διαφορές μεταξύ των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την σύγκριση του προσομοιώματος του Vlasov και του προσομοιώματος του συνεχούς ελαστικού μέσου είναι της τάξης του 15% όσον αφορά τις μέγιστες ροπές. Οι διαφορές αυτές αμβλύνονται εάν για τον προσδιορισμό των παραμέτρων του προσομοιώματος γίνει χρήση των σχέσεων που αντιστοιχούν σε ελαστικό υπόβαθρο «απείρου» βάθους (σχέσεις 2.121γ, 2.130γ), και μάλιστα εάν γίνει η χρήση της τιμής γ=1.5 λαμβάνουν την ελάχιστη τιμή.

Από την αξιολόγηση των συγκρίσεων που αφορούν το πρόβλημα δοκών πεπερασμένου μήκους προκύπτει το συμπέρασμα ότι για δοκούς μεσαίου μήκους (βλέπε Παράγραφο 2.5.3, Σχέση 2.134), επιτυγχάνεται σύγκλιση των αποτελεσμάτων με το προσομοίωμα του συνεχούς ελαστικού μέσου, εάν για την τιμή της παραμέτρου γ επιλεγεί η τιμή 1.5.

Επομένως, το βασικό – κεντρικό συμπέρασμα που προκύπτει από τα παραπάνω εκτεθέντα είναι ότι για τη βέλτιστη απόδοση του προσομοιώματος τόσο σε προβλήματα δοκών «απείρου» όσο και σε προβλήματα δοκών πεπερασμένου μήκους, απαιτείται η χρήση των σχέσεων (2.121γ) και (2.130γ) για τον προσδιορισμό των δυο παραμέτρων, με ταυτόχρονη εισαγωγή της τιμής 1.5 για την παράμετρο γ. Δεν θα πρέπει όμως να παραβλέπεται το γεγονός ότι το συμπέρασμα αυτό δεν φαίνεται να προκύπτει από μια διευρυμένη παραμετρική διερεύνηση.

Οι Harr et al. (1969) σε μια σημαντική εργασία που αποτελεί μια από τις πρώτες στις οποίες γίνεται συστηματική εφαρμογή του κλασσικού προσομοιώματος του Vlasov (με σύνταξη κώδικα για την επίλυση αριθμητικών εφαρμογών με H/Y) προχωρούν στην παρουσίαση ορισμένων παραδειγμάτων το βασικό συμπέρασμα των οποίων αφορά την επιρροή του βάθους H_S του ελαστικού υποβάθρου (βλέπε Σχήμα 2.10) και της παραμέτρου γ, στις μέγιστες κατακόρυφες μετακινήσεις. Πιο συγκεκριμένα, το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι υπάρχει μια «κρίσιμη» τιμή του βάθους $H_S=H_0$ πέραν της οποίας η παράμετρος γ παύει να επηρεάζει το μέγεθος των κατακορύφων μετακινήσεων. Η «κρίσιμη» αυτή τιμή H_0 μικραίνει όσο αυξάνει η τιμή του γ και του μέτρου ελαστικότητας του υποβάθρου. Επιπλέον, προκύπτει και το συμπέρασμα ότι αυξάνοντας την τιμή της παραμέτρου γ μειώνονται γενικά οι κατακόρυφες μετακινήσεις. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να εξηγηθεί εάν ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι η παράμετρος γ «ρυθμίζει» την κατανομή των κατακορύφων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου. Μεγάλες τιμές της παραμέτρου γ προκαλούν ραγδαία μείωση των κατακορύφων μετακινήσεων κατά την έννοια του βάθους του υποβάθρου, καθιστώντας το έτσι λιγότερο ενδόσιμο.

Σημαντικές είναι και οι αριθμητικές εφαρμογές του τροποποιημένου προσομοιώματος του Vlasov, εάν μάλιστα ληφθεί υπόψη και το γεγονός ότι το προσομοίωμα αυτό αποτελεί την μοναδική εφαρμοσμένη αναλυτική μέθοδο προσδιορισμού της δεύτερης παραμέτρου.

Οι Jones και Xenophontos (1977) προχώρησαν σε μια περιορισμένη σειρά πειραματικών διερευνήσεων προκειμένου να ελέγξουν την αξιοπιστία της σχέσης (2.34) στην περιγραφή της κατανομής των κατακορύφων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου. Η εκτέλεση των πειραμάτων αυτών πραγματοποιήθηκε με τη φόρτιση δοκών μεγάλης δυσκαμψίας. Από τη διερεύνηση προέκυψε το βασικό συμπέρασμα, ότι η σχέση (2.34) που στηρίζεται σε υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις δίνει αποτελέσματα που συγκλίνουν σε πολύ μεγάλο βαθμό στα αντίστοιχα πειραματικά. Επιπλέον, στην περίπτωση κατά την οποία το μήκος της δοκού είναι της ιδίας τάξεως μεγέθους με το βάθος του ελαστικού υποβάθρου η απλοποιημένη γραμμική σχέση (2.28) δίνει και αυτή ικανοποιητικά αποτελέσματα, συμπέρασμα το οποίο συμφωνεί και με τις εκτιμήσεις του Vlasov (1960). Κλείνοντας θα πρέπει να τονιστεί ότι τα παραπάνω συμπεράσματα δεν μπορούν να θεωρηθούν ως συμπεράσματα γενικής ισχύος, καθώς προκύπτουν από την εκτέλεση πειραμάτων στα πλαίσια των οποίων δεν έγινε παραμετρική διερεύνηση για διάφορες τιμές ελαστικών σταθερών E, ν του υποβάθρου, παρά μόνο για τιμή του ν ίση με 0.48, που είναι πολύ κοντά στην οριακή τιμή 0.5.

Όπως τονίστηκε και στην Παράγραφο 2.2.7, οι Vallabhan και Das (1988, 1991α, β) σε μια σειρά δημοσιεύσεων επέκτειναν και εφήρμοσαν τις εξισώσεις των Jones και Xenophontos, επιτυγχάνοντας την

εξαγωγή ορισμένων συμπερασμάτων για την εφαρμοσιμότητα και την αξιοπιστία του τροποποιημένου προσομοιώματος του Vlasov. Σημαντικό στοιχείο των παραμετρικών τους διερευνήσεων αποτελεί η σύγκριση των αποτελεσμάτων του προτεινόμενου προσομοιώματος με αποτελέσματα που προκύπτουν από την επίλυση με προσομοιώματα επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων. Πιο συγκεκριμένα, οι παραμετρικές αναλύσεις που διενεργήθηκαν αφορούν την επίλυση μεμονωμένων δοκών πεπερασμένου μήκους με τρεις περιπτώσεις φόρτισης: μεμονωμένο κατακόρυφο φορτίο στο μέσον του ανοίγματος, συνεχή ομοιόμορφη φόρτιση, και μεμονωμένα φορτία στα δυο άκρα (η περίπτωση αυτή συμπίπτει με την αριθμητική εφαρμογή του Onu (2000), Σχήμα 5.2δ)). Από τις συγκρίσεις με τα προσομοιώματα των επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων προέκυψε το συμπέρασμα – και για τους τρεις τύπους φόρτισης – ότι η μορφή του παραμορφωμένου άξονα (ελαστική γραμμή) της δοκού είναι σχεδόν πανομοιότυπη και για τους δυο τύπους επιλύσεων (οι ελαστικές γραμμές είναι σχεδόν «παράλληλες»). Σε γενικές γραμμές όμως η επίλυση με το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov οδηγεί σε μικρότερες κατακόρυφες μετακινήσεις απ' ότι η αντίστοιχη επίλυση με τα επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να εξηγηθεί εύκολα, αν αναλογιστεί κανείς ότι βασική παραδοχή για την κατάστρωση των εξισώσεων του τροποποιημένου προσομοιώματος του Vlasov είναι η αγνόηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου, γεγονός που το καθιστά λιγότερο ενδόσιμο σε σύγκριση με τα προσομοιώματα των επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων όπου οι οριζόντιες μετακινήσεις δεν αγνοούνται. Ωστόσο, το γεγονός ότι οι ελαστικές γραμμές είναι σχεδόν παράλληλες οδηγεί τις δυο τεχνικές προσομοίωσης σε παραπλήσιες τιμές καμπτικών ροπών και τεμνουσών δυνάμεων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα εντατικά μεγέθη αυτά προκύπτουν από διαδοχικές παραγωγίσεις των κατακορύφων μετακινήσεων. Τα παραπάνω συμπεράσματα θα πρέπει να αξιολογηθούν με την επισήμανση ότι οι παραπάνω συγκρίσεις δεν έγιναν κάτω από κοινές συνθήκες όσον αναφορά την προσομοίωση της μορφής αλληλεπίδρασης μεταξύ δοκού και εδάφους. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση της επίλυσης με το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov η αλληλεπίδραση αυτή πραγματοποιείται μόνον μέσω κατακορύφων δυνάμεων, ενώ στην περίπτωση της επίλυσης με τα επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία όχι μόνον μέσω κατακορύφων δυνάμεων αλλά και ροπών. Στα σημαντικά συμπεράσματα θα πρέπει να προστεθεί και το γεγονός, ότι ενώ με τη χρήση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων η μορφή και η πυκνότητα του κανάβου επηρεάζει τα εξαγόμενα αποτελέσματα, η χρήση του τροποποιημένου προσομοιώματος του Vlasov απαλλάσσει τον χρήστη από τέτοιου είδους προβλήματα και ενδεχόμενες παραμετρικές διερευνήσεις. Επιπλέον των ανωτέρω συμπερασμάτων που προκύπτουν από τις συγκρίσεις με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, αξίζει να παρατεθούν και τα παρακάτω:

- Οι τιμές των παραμέτρων του προσομοιώματος δεν εξαρτώνται μόνον από τις τιμές των ελαστικών σταθερών του υποβάθρου αλλά και από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της δοκού και την φόρτιση της. Επομένως οι τιμές αυτές είναι μοναδικές για κάθε πρόβλημα.
- Τα εντατικά μεγέθη επηρεάζονται σημαντικά από το βάθος του ελαστικού υποστρώματος ακόμα και για σταθερές τιμές των ελαστικών του σταθερών. Μάλιστα στην περίπτωση φόρτισης με ομοιόμορφο φορτίο

οι τιμές των εντατικών μεγεθών είναι ανεξάρτητες από τον λόγο των ελαστικών σταθερών δοκού / υποβάθρου και εξαρτώνται μόνον από το λόγο του βάθους του υποστρώματος προς το μήκος της δοκού.

– Η απόδοση του προσομοιώματος του Winkler σε προβλήματα αντίστοιχα με τα ανωτέρω είναι φτωχή όσον αφορά τον υπολογισμό των τεμνουσών δυνάμεων και των καμπτικών ροπών. Αυτό έχει όπως είναι φυσικό, και επιπτώσεις στη διαδικασία διαστασιολόγησης.

Κλείνοντας την αναφορά στις αριθμητικές εφαρμογές που αφορούν το προσομοίωμα του Vlasov κρίνεται σκόπιμο να γίνει και μια αναφορά σε αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του προσομοιώματος του Vlasov με θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου. Η μοναδική εργασία επί του αντικειμένου που κατέστη δυνατό να εντοπιστεί στα πλαίσια της έρευνας της βιβλιογραφίας, είναι η εργασία των Rao et al. (1971). Στην συγκεκριμένη εργασία πραγματοποιήθηκαν συγκρίσεις του προσομοιώματος του Vlasov με θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου, με το αντίστοιχο κλασσικό προσομοίωμα (με αγνόηση των οριζοντίων μετακινήσεων) αλλά και με το προσομοίωμα του ελαστικού ημιχώρου. Για τις συγκρίσεις αυτές επιλύθηκε δοκός Euler πεπερασμένου μήκους με μοναχική κατακόρυφη φόρτιση στο μέσον του ανοίγματος της. Πραγματοποιήθηκαν επιλύσεις για διάφορες τιμές του χαρακτηριστικού μήκους της δοκού (βλέπε Σχέση 2.134). Οι συγκρίσεις ανάμεσα στο νέο προσομοίωμα και στο κλασσικό προσομοίωμα του Vlasov πραγματοποιήθηκαν με τιμή ν=0.3 για το έδαφος, ενώ οι αντίστοιχες συγκρίσεις των δυο αυτών προσομοιωμάτων με το προσομοίωμα του ελαστικού ημιχώρου, με ν=0. Για τις συναρτήσεις κατανομής των μετακινήσεων (οριζοντίων και κατακορύφων) στο εσωτερικό του υποβάθρου χρησιμοποιήθηκε η σχέση που αντιστοιχεί σε υπόβαθρο «απείρου» βάθους (Σχέση 2.30), ενώ για την επίλυση με το κλασσικό προσομοίωμα του Vlasov έγινε χρήση της σχέσης που αντιστοιχεί σε υπόβαθρο πεπερασμένου πάχους (Σχέση 2.29). Από τις συγκρίσεις των δυο εκδοχών του προσομοιώματος του Vlasov προέκυψε το συμπέρασμα ότι η θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου οδηγεί στην εμφάνιση μεγαλυτέρων κατακορύφων μετακινήσεων. Οι διαφορές μεταξύ των δυο προσομοιωμάτων αμβλύνονται για μεγάλες τιμές του χαρακτηριστικού μήκους της δοκού. Σημαντικό είναι επίσης και το συμπέρασμα ότι οι καμπτικές ροπές που προκύπτουν από την επίλυση με το προς εξέταση προσομοίωμα είναι σε πολύ καλή σύγκλιση με τις καμπτικές ροπές που προκύπτουν από την ανάλυση με τις εξισώσεις του ελαστικού ημιεπιπέδου (το συμπέρασμα αυτό βέβαια δεν μπορεί να είναι γενικής ισχύος, καθώς προκύπτει ειδικά από την επίλυση για ν=0). Τέλος, ένα ακόμα συμπέρασμα που προκύπτει από τις αναλύσεις είναι ότι καθώς η τιμή της παραμέτρου γ μειώνεται, το προσομοίωμα αποκτά την δυνατότητα καλύτερης απόδοσης της κατανομής των εξωτερικών φορτίων στο εσωτερικό του υποβάθρου. Αντίθετα όταν η τιμή του γ αποκτά μεγαλύτερες τιμές, η «συνοχή» του ελαστικού υποβάθρου μειώνεται και έτσι τα αποτελέσματα του προσομοιώματος συγκλίνουν προς τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του προσομοιώματος Winkler.

5.3. Παραδείγματα εφαρμογής και συγκρίσεις των αποτελεσμάτων των διαφόρων προσομοιωμάτων.

Στην παρούσα Παράγραφο, θα γίνει εφαρμογή των μητρώων δυσκαμψίας, μεταφοράς και φόρτισης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων, που σχηματίστηκαν στο Κεφάλαιο 3. Για το σκοπό αυτό θα επιλυθεί μια σειρά παραδειγμάτων για τα οποία έγινε μια σύντομη αναφορά στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου. Επιπλέον των επιλύσεων με το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων, θα πραγματοποιηθούν επιλύσεις και με μια σειρά άλλων προσομοιωμάτων που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2. Πιο συγκεκριμένα, τα προσομοιώματα που θα χρησιμοποιηθούν είναι τα εξής:

1. Κλασικό προσομοίωμα του Winkler,
2. Προσομοίωμα **δυο** παραμέτρων **χωρίς** την επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν των δοκών (Pasternak),
3. Προσομοίωμα **τριών** παραμέτρων **με** την επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν των δοκών (Kerr),
4. Προσομοίωμα **τριών** παραμέτρων **χωρίς** την επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν των δοκών (Kerr1),
5. Κλασικό προσομοίωμα Vlasov **χωρίς** την επιρροή των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου,
6. Κλασικό προσομοίωμα Vlasov **με** την επιρροή των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου,
7. Τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov **χωρίς** την επιρροή των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου,

Ως προσομοιώματα αναφοράς για τις απαιτούμενες συγκρίσεις χρησιμοποιούνται αφενός προσομοιώματα πεπερασμένων στοιχείων, στα οποία η προσομοίωση του εδάφους υλοποιείται με τη βοήθεια επιφανειακών στοιχείων (Προσομοιώματα FEM), και αφετέρου προσομοιώματα που βασίζονται στις εξισώσεις του ελαστικού ημιεπιπέδου όπου είναι εφικτή η εφαρμογή τους. Το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση των αριθμητικών εφαρμογών είναι το εξής:

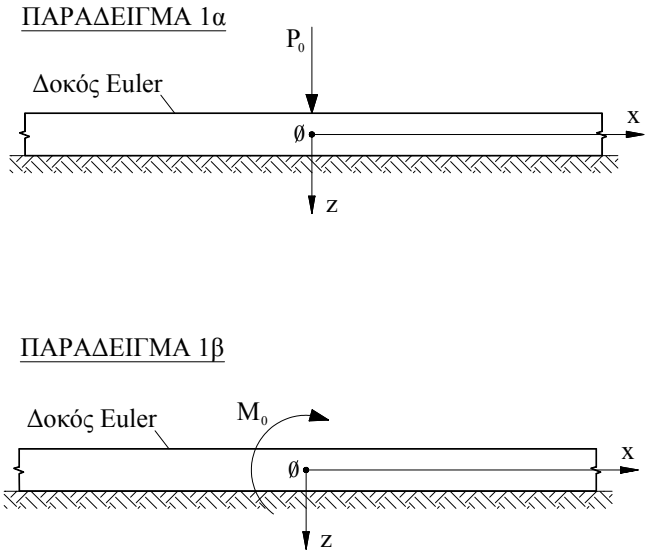
- Γενικό πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων **SAP2000** (2000). Με το πρόγραμμα αυτό θα επιλυθούν τα προσομοιώματα των επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων, καθώς και ορισμένα προσομοιώματα στα οποία γίνεται χρήση του προσομοιώματος του Winkler.
- Πρόγραμμα **B**eam **E**lastic **F**oundation (Jones (1997)): Πρόκειται για ένα πρόγραμμα ειδικευμένο στην επίλυση προβλημάτων δοκών Euler ενός ή περισσοτέρων ανοιγμάτων επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Winkler, το οποίο βασίζεται στην εφαρμογή της μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών. Στην παρούσα διατριβή, το συγκεκριμένο πρόγραμμα θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση των παραδειγμάτων της Ομάδας 2.
- Γενικό Πρόγραμμα Μαθηματικών **Mathematica V.4.1**. (2000): Το πρόγραμμα αυτό θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του προβλήματος δοκών «απείρου» μήκους επί ελαστικού υποβάθρου μιας, δυο και τριών παραμέτρων, αλλά και για την αριθμητική εφαρμογή των εξισώσεων του ελαστικού ημιεπιπέδου. Καθώς η επίλυση του προβλήματος της κάμψης των δοκών «απείρου» μήκους είναι απλή από πλευράς προγραμματιστικής διαδικασίας (καθώς συνίσταται στην εφαρμογή συγκεκριμένων μαθηματικών

σχέσεων) αλλά παράλληλα είναι και καθαρά μαθηματική, κρίνεται πιο συμφέρουσα η χρήση ενός τέτοιου υπολογιστικού εργαλείου. Επιπλέον, η εφαρμογή των ειδικών ολοκληρωμάτων, μέσω των οποίων επιτυγχάνεται η επίλυση του προβλήματος της κάμψης δοκών επί υποβάθρου που περιγράφεται από τις εξισώσεις του ελαστικού ημιεπιπέδου, καθιστά την χρήση του προγράμματος αυτού και επιβεβλημένη.

– Αλγόριθμοι σε γλώσσες προγραμματισμού **Fortran 90** και **QBasic**: Για την επίλυση προβλημάτων δοκών πεπερασμένου μήκους αλλά και επιπέδων πλαισίων εδραζόμενων επί ελαστικού υποβάθρου δυο ή τριών παραμέτρων, συντάχθηκαν αλγόριθμοι σε γλώσσες προγραμματισμού Fortran 90 και QBasic, καθώς η υλοποίηση των μηχανικών προσομοιωμάτων των δυο και των τριών παραμέτρων με κλασικά προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων δεν είναι εφικτή.

5.3.1. Παραδείγματα Ομάδας 1: Δοκοί απείρου μήκους

Όπως τονίστηκε και στην Παράγραφο 5.1, οι αριθμητικές εφαρμογές ξεκινούν από την επίλυση προβλημάτων δοκών «απείρου» μήκους. Οι συγκρίσεις αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την επίλυση τέτοιων προβλημάτων είναι απαλλαγμένες από την επιρροή των συνοριακών συνθηκών που υπεισέρχονται στα αντίστοιχα προβλήματα μεμονωμένων δοκών ή συστημάτων δοκών πεπερασμένου μήκους. Έτσι, με τα παραδείγματα της ομάδας αυτής επιτυγχάνεται μια πρώτη και άμεση σύγκριση του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων με τα προσομοιώματα των δυο και της μίας παραμέτρου, των οποίων οι λύσεις είναι διαθέσιμες στην βιβλιογραφία. Τα παραδείγματα της ομάδας αφορούν στην επίλυση δοκών υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση (Παράδειγμα 1α) και υπό μοναχική ροπή (Παράδειγμα 1β).



Χρησιμοποιούμενα Προσομοιώματα

Προσομοίωμα Winkler

$$p(x) = kw(x)$$

Προσομοιώματα 2 Παραμέτρων

(Pasternak, Vlasov, Modified Vlasov)

$$p(x) = kw(x) - G\frac{d^2w}{dx^2}$$

Προσομοιώματα 3 Παραμέτρων

(Kerr, Vlasov με θεώρηση οριζοντίων μετακινήσεων)

$$\left(1+\frac{k}{c}\right)p(x) - \left(\frac{G}{c}\right)\frac{d^2p(x)}{dx^2} = kw(x) - G\frac{d^2w(x)}{dx^2}$$

Σχήμα 5.3. Το πρόβλημα κάμψης ελαστικώς εδραζόμενων δοκών απείρου μήκους υπό κατακόρυφη δύναμη (Παράδειγμα 1α), ή ροπή (Παράδειγμα 1β), και τα προσομοιώματα που θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυση του.

Βασικό χαρακτηριστικό των προβλημάτων κάμψης δοκών «απείρου» μήκους είναι η δυνατότητα επίλυσης τους με κλειστές αναλυτικές σχέσεις. Στον παρακάτω πίνακα παρατίθενται οι σχέσεις αυτές για

την περίπτωση της κάμψης δοκών Euler επί ελαστικού υποβάθρου μιας και δυο παραμέτρων. (Οι αντίστοιχες σχέσεις για δοκούς επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων δίνονται στην Παράγραφο 4.1).

Πίνακας 5.1. Εντατικά μεγέθη και μεγέθη μετακίνησης δοκών Euler επί ελαστικού υποβάθρου μίας ή δυο παραμέτρων (Πηγές Hetényi (1946) και Vlasov (1960)).

	Προσομοίωμα μίας Παραμέτρου (Winkler)	**Προσομοίωμα δυο Παραμέτρων** (Pasternak, Vlasov)
Μοναχική Δύναμη P_0	$w(x)=\frac{P_0R}{2k}e^{-Rx}\left[\cos(Rx)+\sin(Rx)\right]$ $\varphi(x)=\frac{dw}{dx}=-\frac{P_0R^2}{k}e^{-Rx}\sin(Rx)$ $M(x)=\frac{P_0}{4R}e^{-Rx}\left[\cos(Rx)-\sin(Rx)\right]$ $V(x)=-\frac{P_0}{2}e^{-Rx}\cos(Rx)$ $R=\sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$	$w(x)=\frac{P_0}{4EI(R^2+Q^2)}e^{-Rx}\left[\frac{\cos(Qx)}{R}+\frac{\sin(Qx)}{Q}\right]$ $M(x)=-\frac{P_0}{4RQ}e^{-Rx}\left[-Q\cos(Qx)+R\sin(Qx)\right]$ $V(x)=\frac{P_0}{4RQ}e^{-Rx}\left[(R^2-Q^2)\sin(Qx)-2RQ\cos(Qx)\right]$ $V_G(x)=-\frac{P_0}{4EIRQ}e^{-Rx}\left[\begin{array}{l}\left[G-EI(R^2-Q^2)\right]\sin(Qx)+\\+2EIRQ\cos(Qx)\end{array}\right]$ $R=\sqrt{\sqrt{\frac{k}{4EI}}+\frac{G}{4EI}}\quad Q=\sqrt{\sqrt{\frac{k}{4EI}}-\frac{G}{4EI}}$
Μοναχική Ροπή M_0	$w(x)=\frac{M_0R^2}{k}e^{-Rx}\sin(Rx)$ $\varphi(x)=\frac{M_0R^3}{k}e^{-Rx}\left[\cos(Rx)-\sin(Rx)\right]$ $M(x)=\frac{M_0}{2}e^{-Rx}\cos(Rx)$ $V(x)=-\frac{M_0R}{2}e^{-Rx}\left[\cos(Rx)+\sin(Rx)\right]$	$w(x)=\frac{M_0}{4EIRQ}e^{-Rx}\sin(Qx)$ $M(x)=\frac{M_0}{4RQ}e^{-Rx}\left[2RQ\cos(Qx)-(R^2-Q^2)\sin(Qx)\right]$ $V(x)=\frac{M_0}{4RQ}e^{-Rx}\left[\begin{array}{l}Q(Q^2-3R^2)\cos(Qx)+\\+R(R^2-3Q^2)\sin(Qx)\end{array}\right]$ $V_G(x)=\frac{M_0}{4EIRQ}e^{-Rx}\left[\begin{array}{l}Q\left[EI(Q^2-3R^2)+G\right]\cos(Qx)+\\+R\left[EI(R^2-3Q^2)-G\sin(Qx)\right]\end{array}\right]$

(Θα πρέπει να τονιστεί ότι οι σχέσεις του παραπάνω πίνακα που αφορούν τα προσομοιώματα του Pasternak και του Vlasov, αντιστοιχούν στην Περίπτωση λύσης 3 της διαφορικής εξίσωσης (4.11), Παράγραφος 4.2.1).

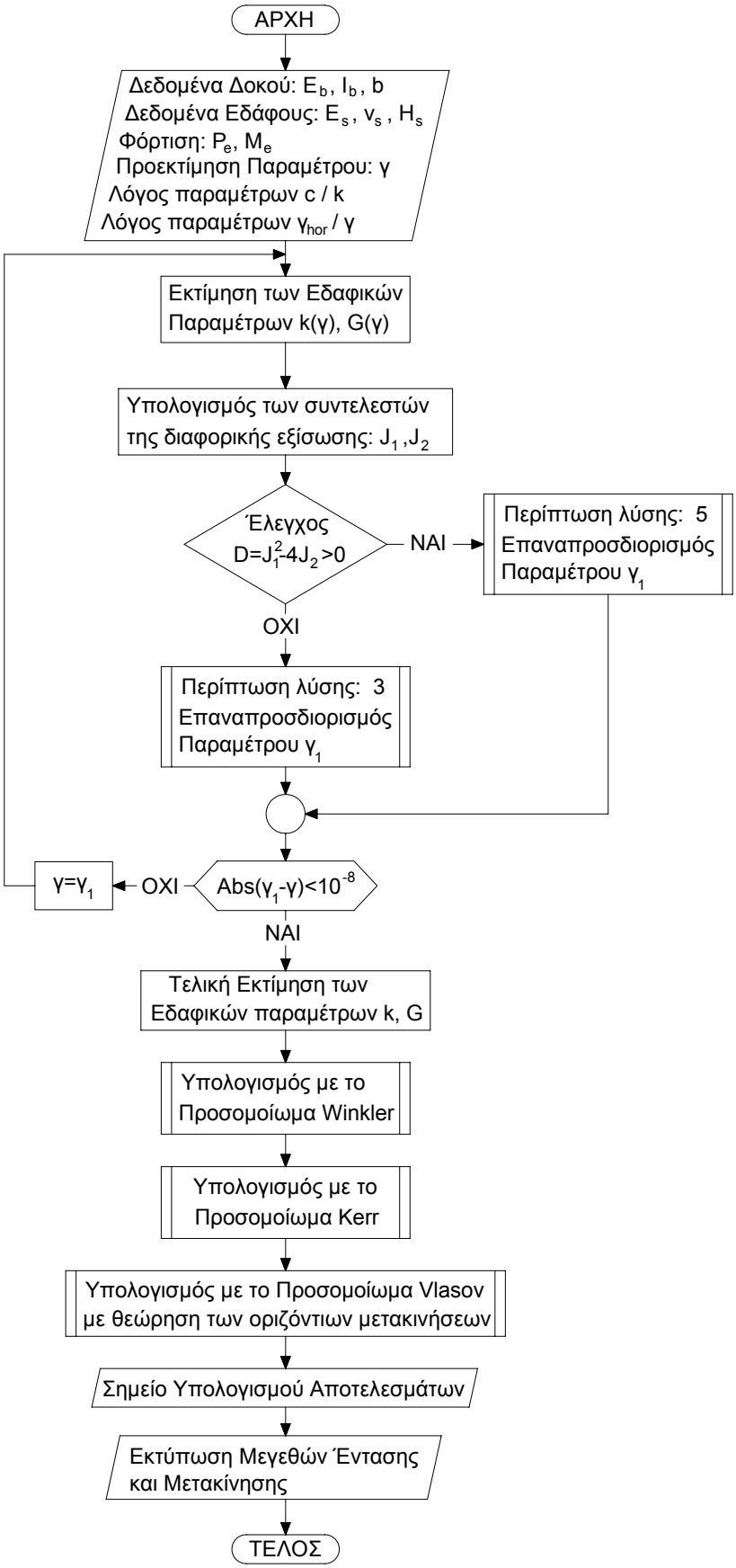
5.3.1.1. Παράδειγμα 1α. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη δύναμη

Για την επίλυση του συγκεκριμένου παραδείγματος συντάχθηκε αλγόριθμος σε γλώσσα Fortran 90 (Αλγόριθμος **I**nfinite **B**eams **O**n **E**lastic **F**oundation). Η δομή του αλγορίθμου αυτού δίνεται στο Σχήμα 5.4. Στον κεντρικό κορμό του επιλύεται το πρόβλημα με χρήση του τροποποιημένου προσομοιώματος του Vlasov και ταυτόχρονα γίνεται μια εκτίμηση των τιμών των δυο απαιτούμενων εδαφικών παραμέτρων. Κατόπιν, με βάση τις τιμές αυτές γίνεται η επίλυση του ίδιου προβλήματος με χρήση των προσομοιωμάτων Winkler, Kerr και Vlasov με θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου. Κατά τη σύνταξη του αλγορίθμου ελήφθη ειδική μέριμνα, έτσι ώστε να είναι δυνατή η επίλυση του προβλήματος για κάθε πιθανό συνδυασμό τιμών των παραμέτρων αυτών. Αυτό σημαίνει, ότι ο αλγόριθμος είναι «εφοδιασμένος» με τις συναρτήσεις που συνθέτουν τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος για τις δυο πιθανές περιπτώσεις 3 και 5 (βλέπε Παράγραφο 4.2.1 και Σχήμα 4.2), αλλά και με τον κατάλληλο μηχανισμό ελέγχου. Αντίστοιχα ελήφθη μέριμνα και για την κάλυψη των πιθανών περιπτώσεων λύσης της διαφορικής εξίσωσης που διέπει την κάμψη δοκών επί ελαστικού υποβάθρου Kerr, και Vlasov με τη θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου. (Πρόκειται για τις περιπτώσεις A_1 και B_1: Βλέπε Παράγραφο 3.3.2.1 και Πίνακες 3.2α , 3.2β και 3.6).

Πέραν των επιλύσεων με τον αλγόριθμο που περιγράφηκε προηγουμένως, πραγματοποιήθηκε και μια σειρά αναλύσεων με χρήση κανάβων επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων, αλλά και υπολογισμοί με βάση τις εξισώσεις του συνεχούς ελαστικού ημιεπιπέδου, προκειμένου να χρησιμοποιηθούν τα αποτελέσματα τους ως αποτελέσματα αναφοράς. Θα πρέπει να τονιστεί ότι πραγματοποιήθηκαν παραμετρικές αναλύσεις μεταβάλλοντας τόσο το βάθος H_S του ελαστικού υποβάθρου όσο και τις ελαστικές του σταθερές E_S, ν_S. Για το λόγο αυτό θεωρήθηκε ότι το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος H_S=10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60 μέτρα (η επίλυση για βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60 μέτρα αντιστοιχεί πρακτικά σε ανάλυση ελαστικού υποβάθρου «απείρου» βάθους). Όσον αφορά τις ελαστικές σταθερές του υποβάθρου, έγινε επιλογή πέντε διαφορετικών ζευγών τιμών των σταθερών E_S, ν_S, έτσι ώστε να καλυφθεί ένα όσο το δυνατόν μεγαλύτερο φάσμα τύπων εδαφών θεμελίωσης, από μαλάκα έως και σκληρά. Πιο συγκεκριμένα, θεωρήθηκαν οι κατηγορίες εδαφών που δίνονται στον Πίνακα 5.2 (Πηγή: Bowles (1988)).

Πίνακας 5.2. Κατηγορίες εδαφών που θεωρήθηκαν στα πλαίσια των αναλύσεων.

Έδαφος		**Χρησιμοποιούμενη τιμή μέτρου ελαστικότητας E_S (kN/m^2)**	**Χρησιμοποιούμενη τιμή λόγου Poison ν_S**
E1	Άργιλος Μέσης σκληρότητας	9000	0.4
E2	Σκληρή Άργιλος	15000	0.1
E3	Χαλαρή άμμος	17500	0.3
E4	Πυκνή άμμος	75000	0.35
E5	Αμμοχάλικο	150000	0.15



Σχήμα 5.4. Διάγραμμα ροής αλγορίθμων για την επίλυση του προβλήματος κάμψης δοκών «απείρου» μήκους υπό μοναχική κατακόρυφη δύναμη ή ροπή (Αλγόριθμος **I**nfinite **B**eams **O**n **E**lastic **F**oundation).

Όπως επισημάνθηκε και παραπάνω, ως λύσεις αναφοράς για τις συγκρίσεις των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από τις επιλύσεις με τα μηχανικά προσομοιώματα μιας, δυο ή τριών παραμέτρων, χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την επίλυση με προσομοιώματα επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων, αλλά και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή των εξισώσεων του συνεχούς ελαστικού ημιεπιπέδου. Πιο συγκεκριμένα, η επίλυση με τις εξισώσεις του ελαστικού ημιεπιπέδου χρησιμοποιήθηκε μόνο για την σύγκριση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από τις επιλύσεις για την περίπτωση κατά την οποία το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από ελαστικό υπόβαθρο βάθους 60 μέτρων. Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις, οι εξισώσεις του ελαστικού ημιεπιπέδου δεν μπορούν να θεωρηθούν ως αξιόπιστη λύση αναφοράς, καθώς το μικρό βάθος του ελαστικού υποβάθρου ανάγει το πρόβλημα σε πρόβλημα ελαστικού στρώματος πεπερασμένου βάθους επί ακλόνητης βάσης, η ακριβής λύση του οποίου προκύπτει με διαφορετικές αναλυτικές διαδικασίες (βλέπε π.χ. Burmister (1945) ή Poulos (1967)).

Οι αναλύσεις πραγματοποιήθηκαν με την υπόθεση της ισχύος συνθηκών επίπεδης έντασης. Έτσι, για τον υπολογισμό των καμπτικών ροπών με βάση τις εξισώσεις του ελαστικού ημιεπιπέδου έγινε χρήση της παρακάτω σχέσης (Biot (1937), Selvadurai (1979)):

$$M(x) = \frac{P}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\lambda\cos(\lambda x)}{\lambda^3 + [(E_S b)/(2E_b I)]} d\lambda \tag{5.1}$$

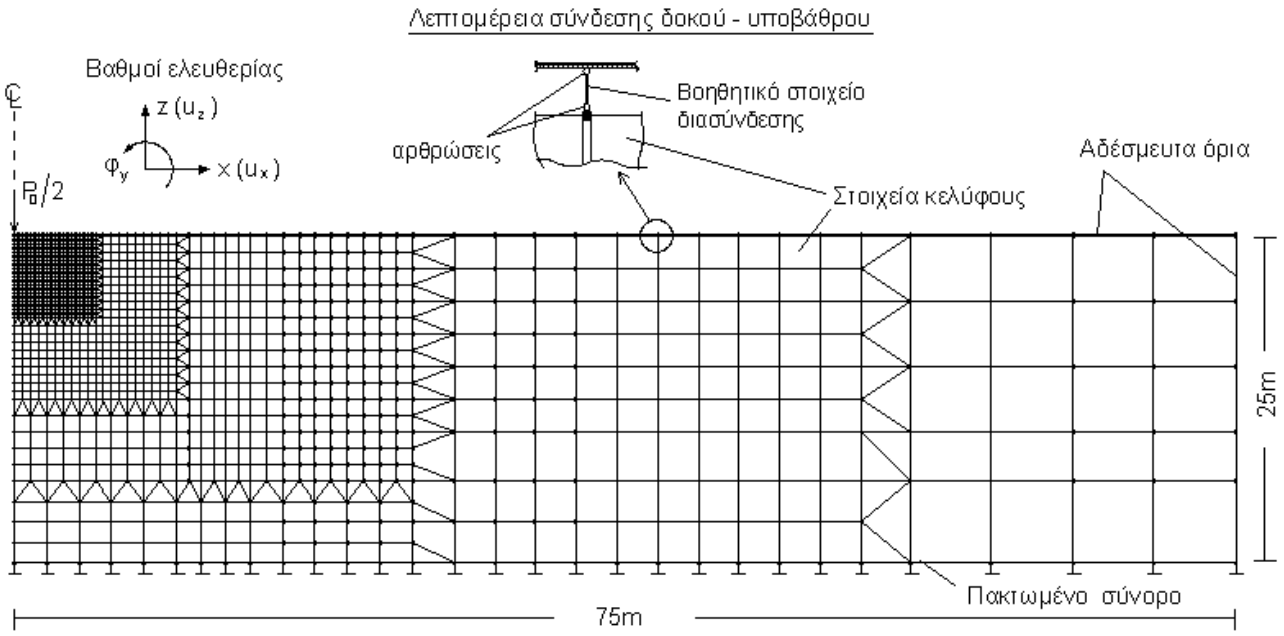
(Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος αυτού έγινε με χρήση του προγράμματος Mathematica όπως τονίστηκε και στην εισαγωγή της παραγράφου). Η αντίστοιχη σχέση για τον υπολογισμό των κατακορύφων μετακινήσεων δεν είναι δυνατό να δώσει απευθείας συγκρίσιμα αποτελέσματα καθώς – σύμφωνα με το Biot (1937) – αποδίδει σε κάθε σημείο της επιφανείας του ημιεπιπέδου «άπειρες» τιμές. Λύση στο πρόβλημα δίνεται μόνον αν υπολογιστεί σε κάθε σημείο η σχετική κατακόρυφη μετακίνηση του συγκεκριμένου σημείου ως προς την κατακόρυφη μετακίνηση στο σημείο εφαρμογής της κατακόρυφης δύναμης. Μια τέτοια διαδικασία κρίθηκε ως μη λειτουργική στα πλαίσια των αναλύσεων που πραγματοποιήθηκαν, και δεν εφαρμόστηκε. Έτσι όσον αφορά τις συγκρίσεις των κατακορύφων μετακινήσεων, χρησιμοποιήθηκαν ως αποτελέσματα αναφοράς αυτά που προκύπτουν από την επίλυση με τα επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία.

Τα χαρακτηριστικά των κανάβων που χρησιμοποιήθηκαν περιγράφονται αναλυτικά παρακάτω (τυπικό δείγμα των κανάβων αυτών δίνεται στο σχήμα. 5.5).

Δεδομένου του ότι το πρόβλημα είναι συμμετρικό, κρίθηκε σκόπιμο να διακριτοποιηθεί μόνον το ήμισυ του συστήματος δοκός – ελαστικό υπόβαθρο. Στο σύνορο του ελαστικού στρώματος με το ακλόνητο υπόβαθρο θεωρήθηκαν συνθήκες πάκτωσης για τους εκεί τοποθετημένους κόμβους. Στην τομή του κανάβου με το επίπεδο συμμετρίας θεωρήθηκαν οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες για την περίπτωση συμμετρικών φορέων με συμμετρική φόρτιση, τόσο για τον εκεί τοποθετημένο κόμβο της δοκού όσο και για τους κόμβους του ελαστικού υποβάθρου. Τέλος, τα δυο υπόλοιπα όρια του κανάβου παρέμειναν αδέσμευτα. Για την εκπλήρωση των προϋποθέσεων ισχύος των συνθηκών επίπεδης έντασης, δεσμεύτηκαν όλοι οι βαθμοί ελευθερίας που προκαλούν παραμορφώσεις εκτός του επίπεδου του προβλήματος. Η σύνδεση των στοιχείων

της δοκού με τα στοιχεία του κελύφους υλοποιήθηκε με κατακόρυφα στοιχεία ράβδου ικανά στην μεταβίβαση μόνο κατακορύφων δυνάμεων. Για να εξασφαλιστεί η απαίτηση αυτή, αλλά και για να επιτευχθεί η συμβατότητα των κατακόρυφων μετακινήσεων δοκού – ελαστικού υποβάθρου, δόθηκε στα στοιχεία αυτά μια πολύ μεγάλη τιμή για την δυστένεια τους, έτσι ώστε αυτά να είναι πρακτικώς ατενή, ενώ ταυτόχρονα τοποθετήθηκαν αρθρώσεις στα άκρα τους προκειμένου να αποκλειστεί η μεταβίβαση καμπτικών ροπών (Βλέπε Σχήμα 5.5). Με τις παραπάνω τεχνικές προσομοίωσης επιτυγχάνεται η με όσο το δυνατό μεγαλύτερη αντικειμενικότητα σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις επιλύσεις με τα μηχανικά προσομοιώματα της μιας, δυο και τριών παραμέτρων. Τα προσομοιώματα αυτά, ως γνωστόν, στηρίζονται στην παραδοχή της αλληλεπίδρασης δοκού – εδάφους θεμελίωσης μόνον με κατακόρυφες δυνάμεις. Επισημαίνεται τέλος, ότι το πάχος του κανάβου κατά την εγκάρσια προς το επίπεδο του διεύθυνση τέθηκε ίσο με b=0.35m.

Η διατομή της δοκού θεωρήθηκε ότι είναι ορθογωνική με διαστάσεις 0.35x0.70m, ενώ αγνοήθηκαν οι αξονικές και οι διατμητικές της παραμορφώσεις (δοκός Euler). Η τιμή του μοναχικού κατακόρυφου φορτίου P_0 της δοκού δεν θεωρήθηκε κοινή για όλες τις επιλύσεις, αλλά επελέγη συναρτήσει των ελαστικών σταθερών του υποβάθρου και του πάχους του H_S, με τρόπο που οι μέγιστες κατακόρυφες μετακινήσεις να μην είναι υπερβολικά μεγάλες ώστε να αίρονται οι προϋποθέσεις ισχύος των εξισώσεων ελαστικότητας, αλλά και ούτε ιδιαίτερα μικρές έτσι ώστε να είναι εφικτές οι αξιόπιστες συγκρίσεις των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από τις επιλύσεις με τα διάφορα προσομοιώματα.



Σχήμα 5.5. Τυπικός κάναβος επίλυσης δοκών «απείρου» μήκους υπό μοναχική κατακόρυφη δύναμη με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (Πρόγραμμα SAP2000).

Πραγματοποιήθηκαν συνολικά 40 επιλύσεις για κάθε ένα από τα προσομοιώματα που συγκρίθηκαν (έγιναν επιλύσεις για 8 διαφορετικά πάχη ελαστικού υποβάθρου, και για 5 διαφορετικούς τύπους εδαφών).

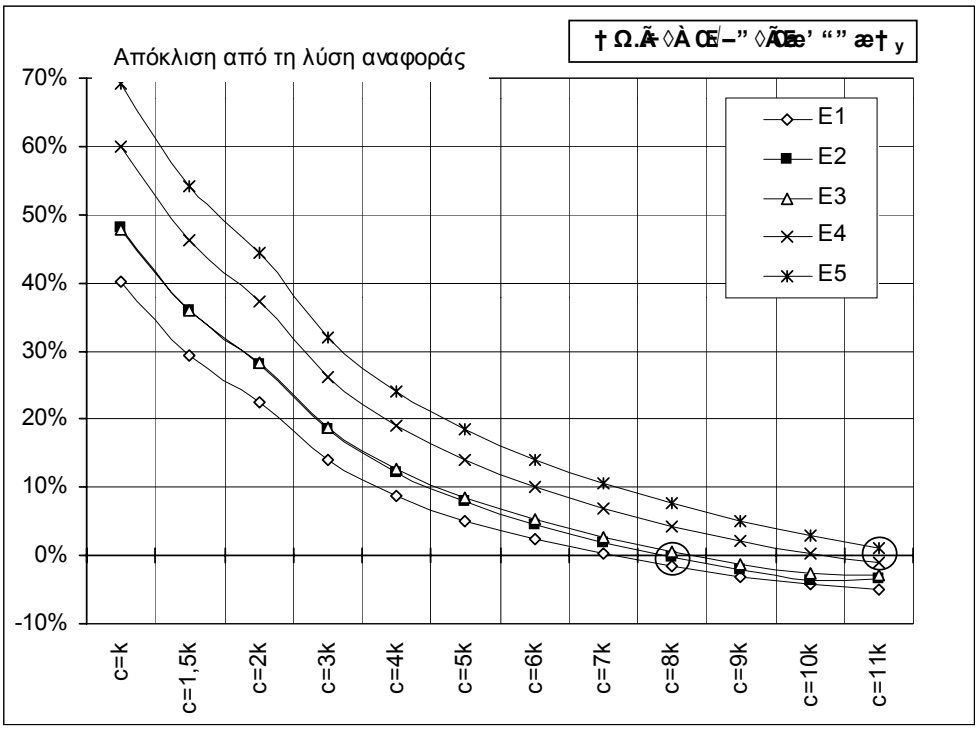
Η διαδικασία των συγκριτικών αναλύσεων ξεκίνησε με τις επιλύσεις των προσομοιωμάτων των επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων, από τις οποίες προέκυψαν τα αποτελέσματα αναφοράς. Ως μεγέθη σύγκρισης επελέγησαν η μέγιστη κατακόρυφη μετακίνηση u_z και η μέγιστη καμπτική ροπή M_y που ως γνωστό εμφανίζονται στο σημείο εφαρμογής της εξωτερικής φόρτισης. Επιπλέον, από την εφαρμογή της σχέσης 5.1 υπολογίστηκαν οι τιμές των καμπτικών ροπών με βάση τις εξισώσεις του ελαστικού ημιεπιπέδου.

Κατόπιν πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις με τον αλγόριθμο **I**nfinite **B**eams **O**n **E**lastic **F**oundation. Από τις αναλύσεις αυτές προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα:

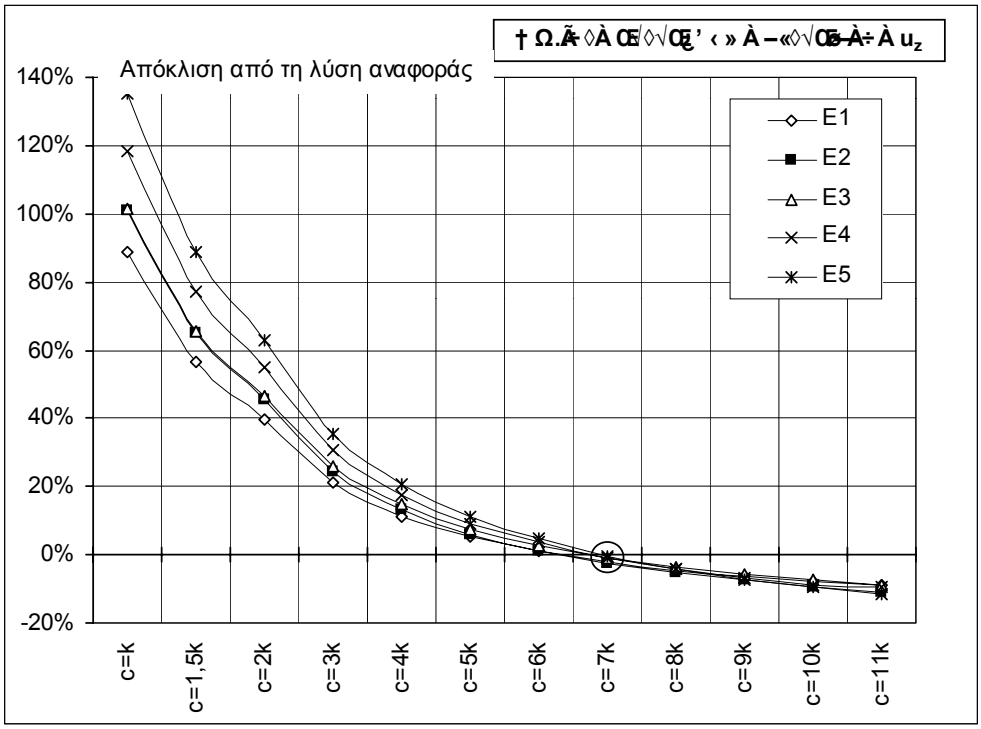
- Οι μέγιστες μετακινήσεις και ροπές από το τροποποιημένο προσομοίωμα τουVlasov,
- Οι τιμές των δυο εδαφικών παραμέτρων k, G καθώς και της παραμέτρου γ που καθορίζει το προφίλ των κατακορύφων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου,
- Οι μέγιστες μετακινήσεις και ροπές από το προσομοίωμα Winkler, εισάγοντας ως τιμή για τον δείκτη εδάφους την τιμή που προέκυψε από την επίλυση με το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov,
- Οι μέγιστες μετακινήσεις και ροπές από το προσομοίωμα του Vlasov με θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων εισάγοντας την τιμή της παραμέτρου γ, όπως προέκυψε από την επίλυση με το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov. Για την τιμή της αντίστοιχης παραμέτρου γ_h που διέπει το αντίστοιχο προφίλ των οριζοντίων μετακινήσεων έγινε η παραδοχή: $\gamma_h=\gamma$.
- Οι μέγιστες μετακινήσεις και ροπές από το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων του Kerr. Για τις τιμές των παραμέτρων k και G γίνεται χρήση των τιμών που προκύπτουν από την επίλυση με το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov. Για την τιμή της τρίτης παραμέτρου c (σταθερά της άνω στρώσης των ελατηρίων) πραγματοποιήθηκε μια παραμετρική ανάλυση που θα περιγραφεί – όπως και τα αποτελέσματα της – παρακάτω.

Λόγω της έλλειψης στοιχείων για τις τιμές που μπορεί να λάβει η σταθερά της άνω στρώσης των ελατηρίων του προσομοιώματος του Kerr κρίθηκε πως θα έπρεπε να γίνει μια παραμετρική ανάλυση, κάνοντας την παραδοχή ότι η ζητούμενη σταθερά c είναι πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια της αντίστοιχης σταθεράς της κάτω στρώσης k, η τιμή της οποίας προέκυψε από την ανάλυση με το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov. Στόχος της παραμετρικής ανάλυσης είναι η διερεύνηση της ύπαρξης ή όχι ενός συντελεστή συσχέτισης n_{ck} των σταθερών k και c ($n_{ck}=c/k$), για τον οποίον να επιτυγχάνεται η σύγκλιση των αποτελεσμάτων που αφορούν τις μέγιστες μετακινήσεις και ροπές, όπως αυτές προκύπτουν αφενός από τις επιλύσεις αναφοράς, και αφετέρου από τις επιλύσεις με το προσομοίωμα τριών παραμέτρων του Kerr.

Στα παρακάτω σχήματα γίνεται μια συνοπτική και παράλληλα εποπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τις παραμετρικές αναλύσεις. Καταρχήν στα σχήματα 5.6 – 5.13 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων που αφορούν την διερεύνηση ύπαρξης ενός συντελεστή συσχέτισης των σταθερών k και c με κριτήριο την εξαγωγή αποτελεσμάτων που συγκλίνουν προς τις λύσεις αναφοράς. Κατόπιν στα σχήματα 5.14 – 5.16 δίνονται τα αποτελέσματα των συγκρίσεων όλων των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων.

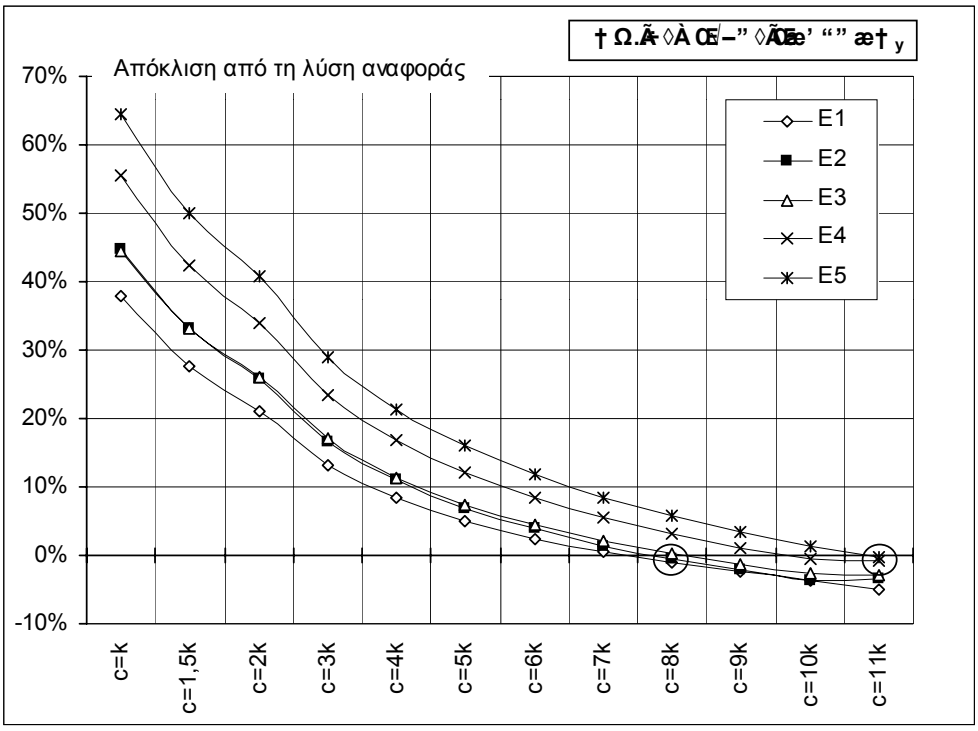


(α)

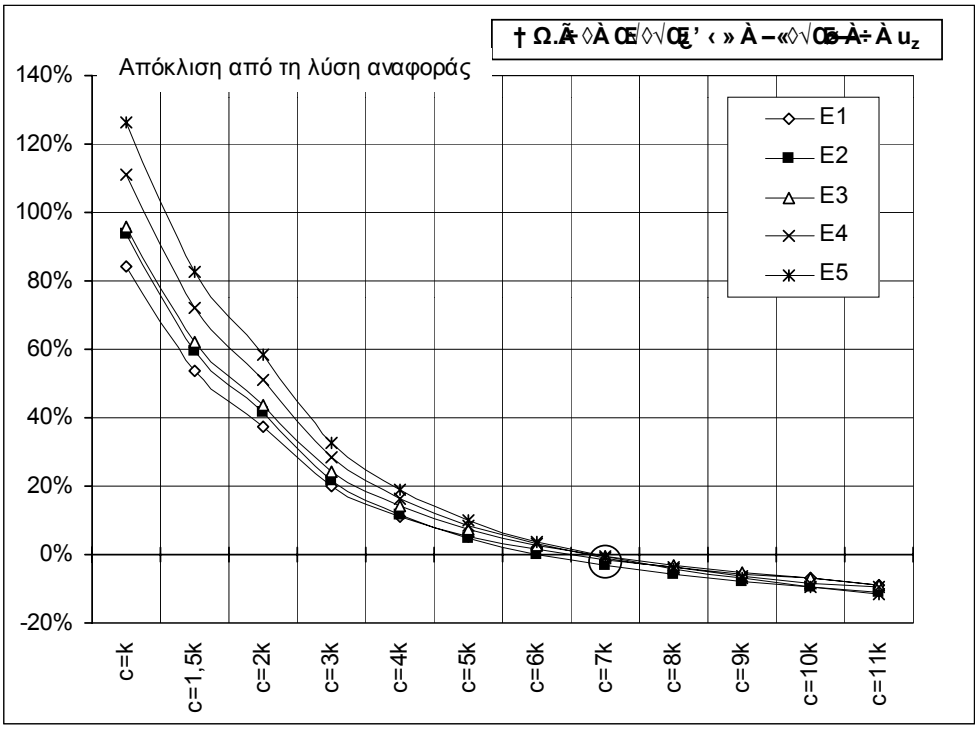


(β)

Σχήμα 5.6. Αποκλίσεις των μέγιστων καμπτικών ροπών M_y (α), και των μέγιστων κατακόρυφων μετακινήσεων u_z (β) του προσομοιώματος τριών παραμέτρων του Kerr από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

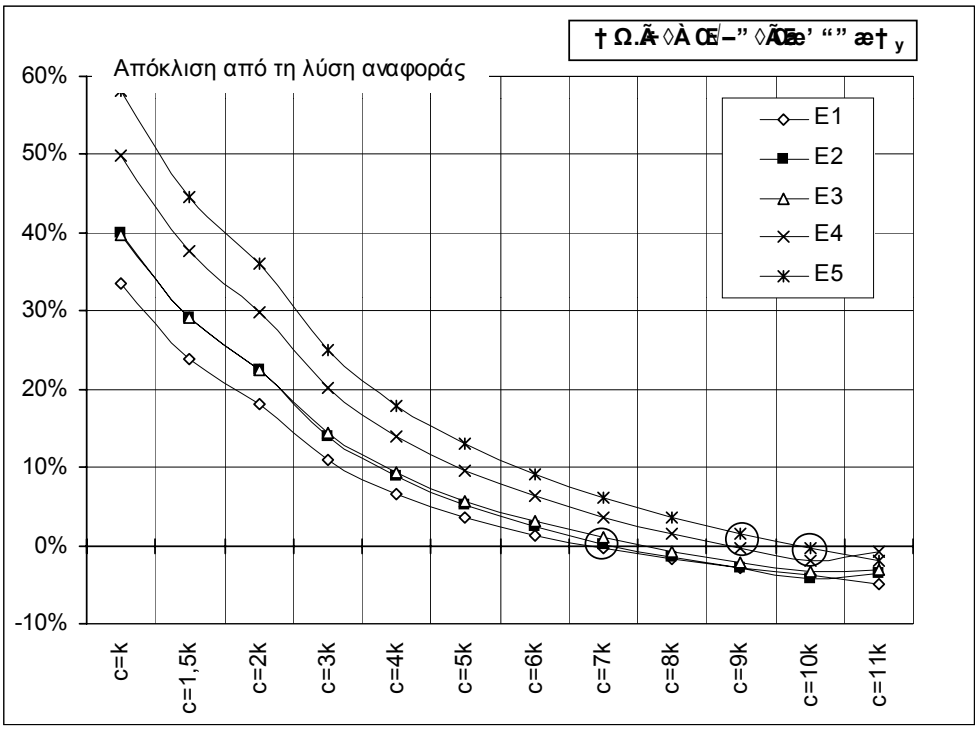


(α)

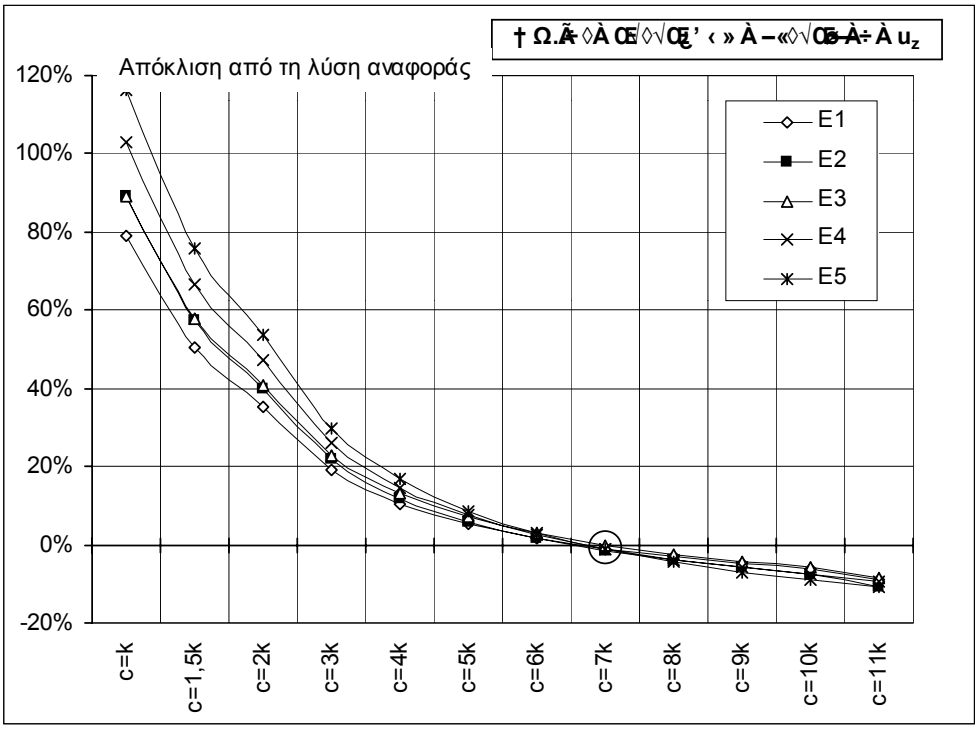


(β)

Σχήμα 5.7. Αποκλίσεις των μέγιστων καμπτικών ροπών M_y (α), και των μέγιστων κατακόρυφων μετακινήσεων u_z (β) του προσομοιώματος τριών παραμέτρων του Kerr από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=50m.

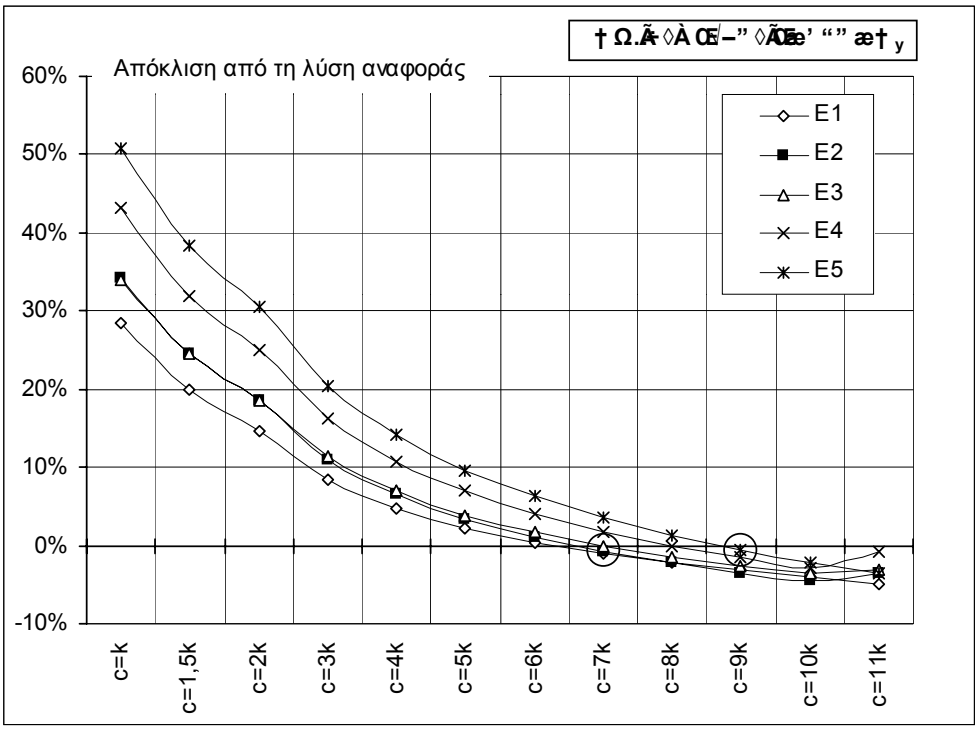


(α)

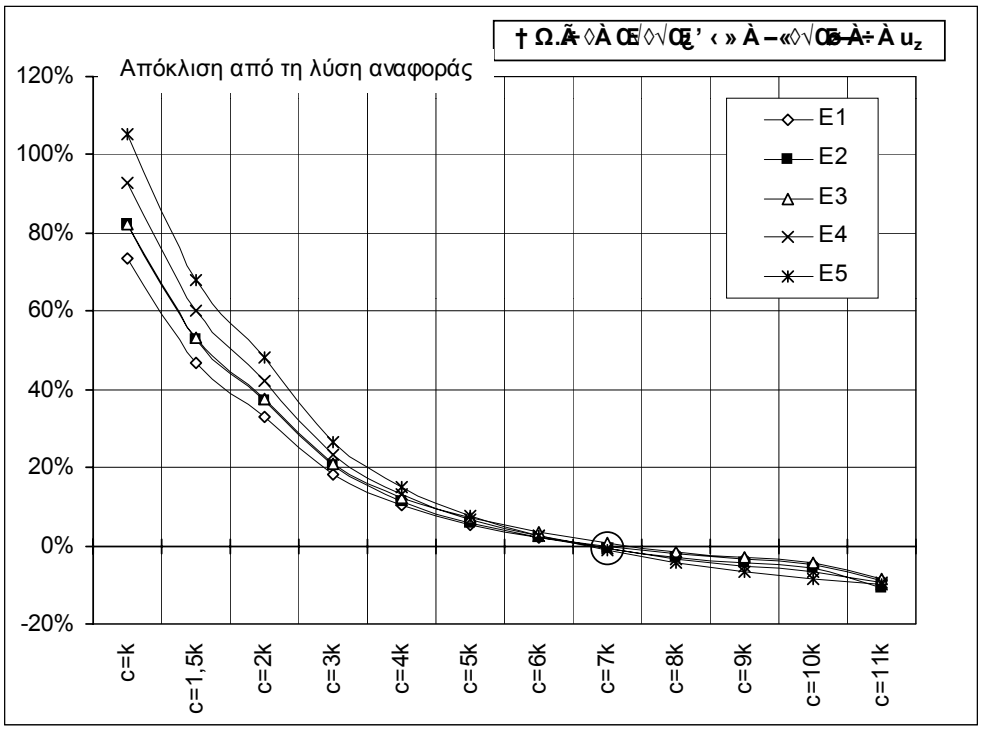


(β)

Σχήμα 5.8. Αποκλίσεις των μέγιστων καμπτικών ροπών M_y (α), και των μέγιστων κατακόρυφων μετακινήσεων u_z (β) του προσομοιώματος τριών παραμέτρων του Kerr από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=40m.

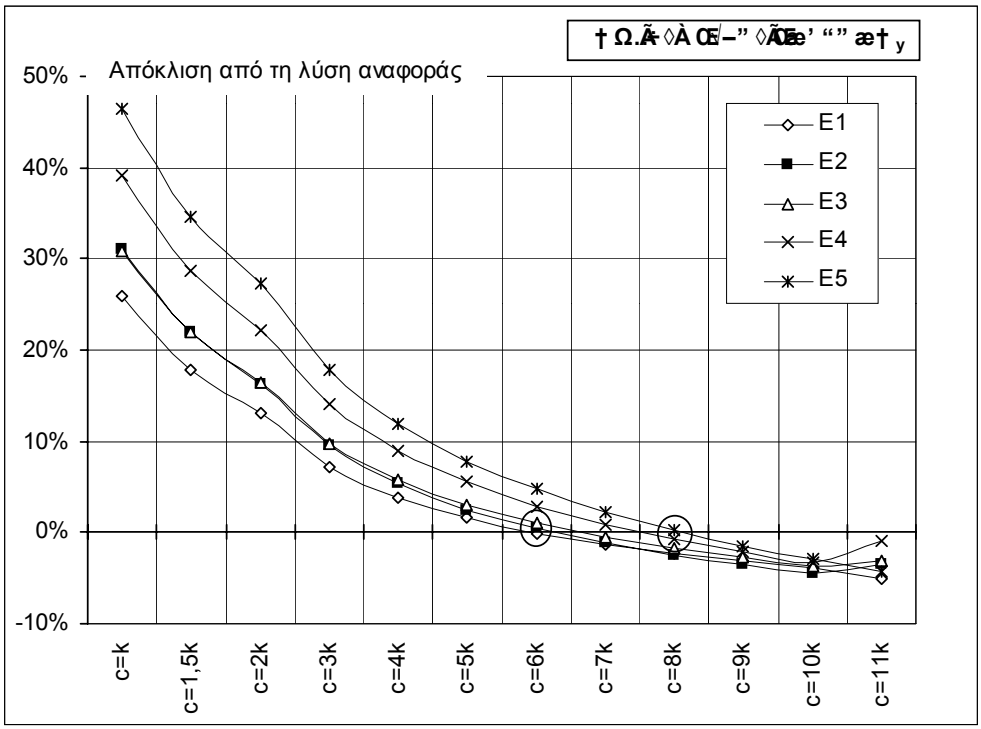


(α)

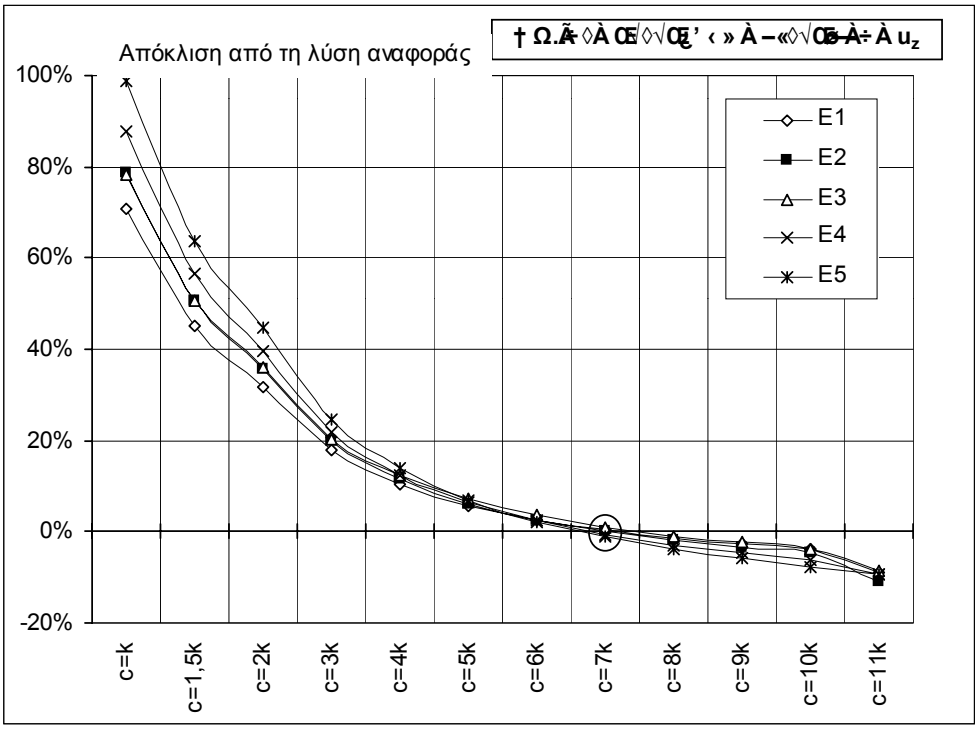


(β)

Σχήμα 5.9. Αποκλίσεις των μέγιστων καμπτικών ροπών M_y (α), και των μέγιστων κατακόρυφων μετακινήσεων u_z (β) του προσομοιώματος τριών παραμέτρων του Kerr από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=30m.

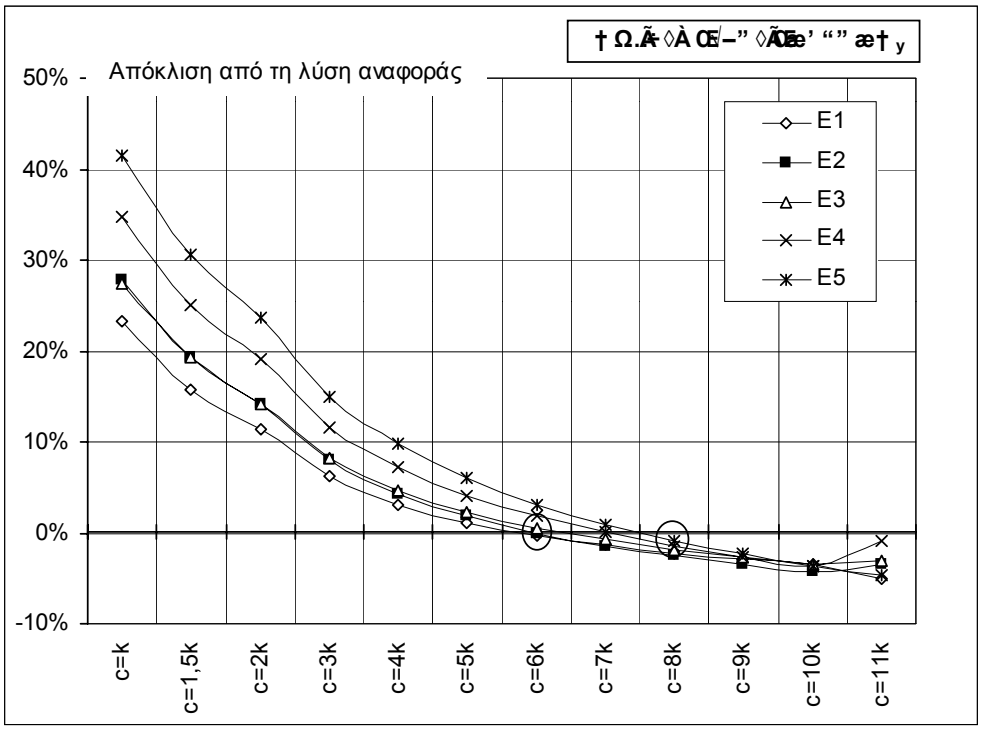


(α)

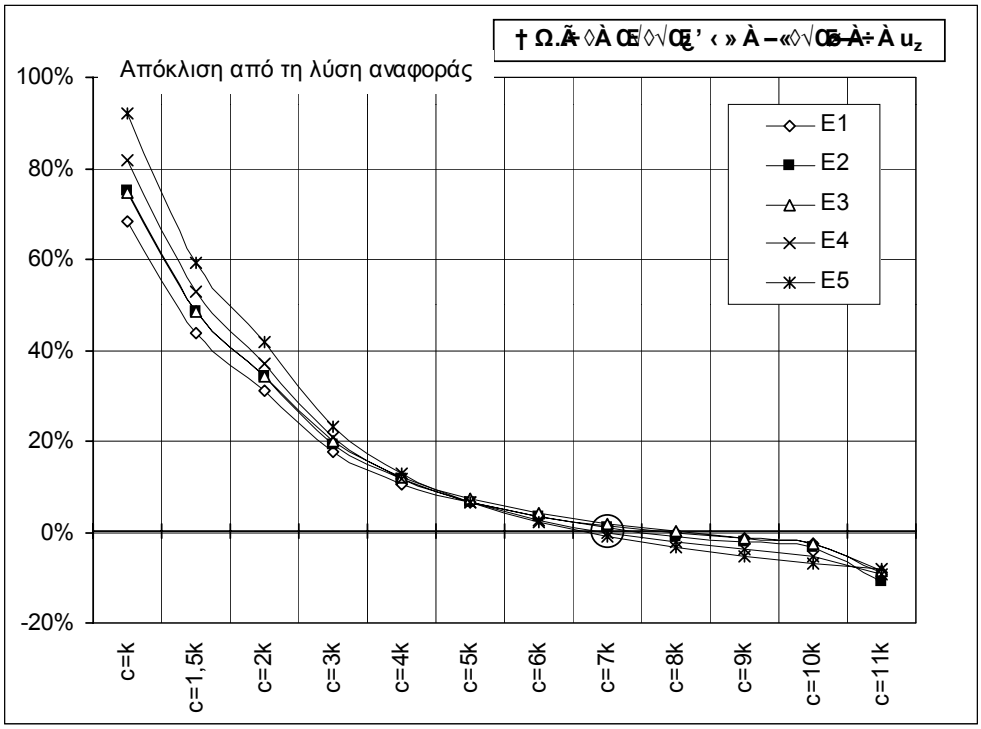


(β)

Σχήμα 5.10. Αποκλίσεις των μέγιστων καμπτικών ροπών M_y (α), και των μέγιστων κατακόρυφων μετακινήσεων u_z (β) του προσομοιώματος τριών παραμέτρων του Kerr από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=25m.

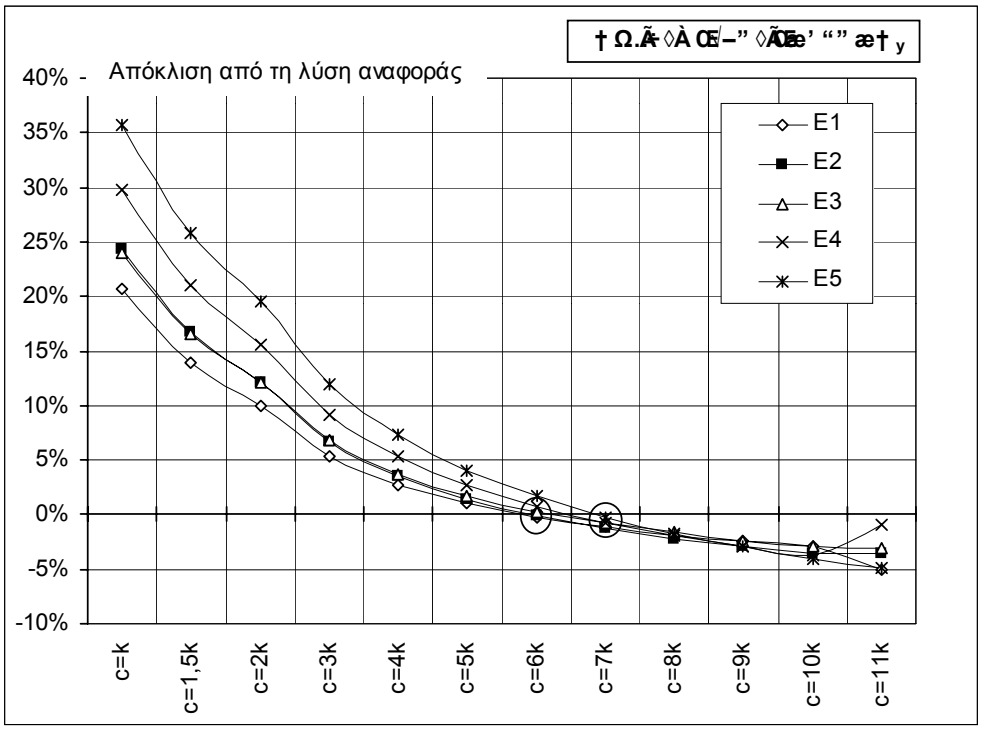


(α)

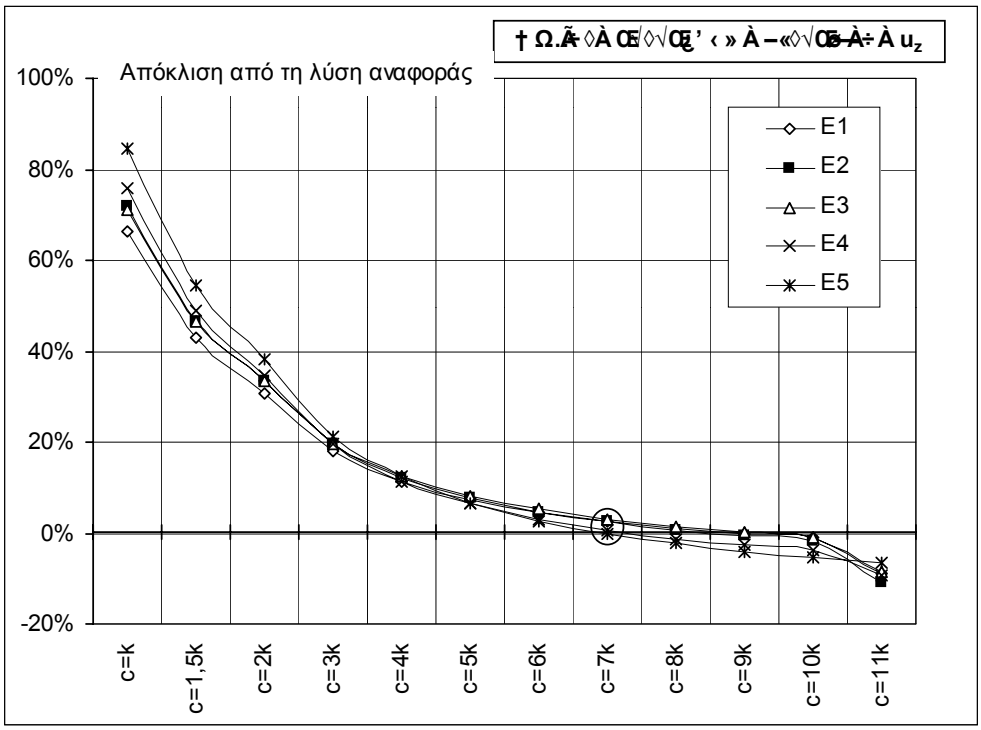


(β)

Σχήμα 5.11. Αποκλίσεις των μέγιστων καμπτικών ροπών M_y (α), και των μέγιστων κατακόρυφων μετακινήσεων u_z (β) του προσομοιώματος τριών παραμέτρων του Kerr από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=20m.

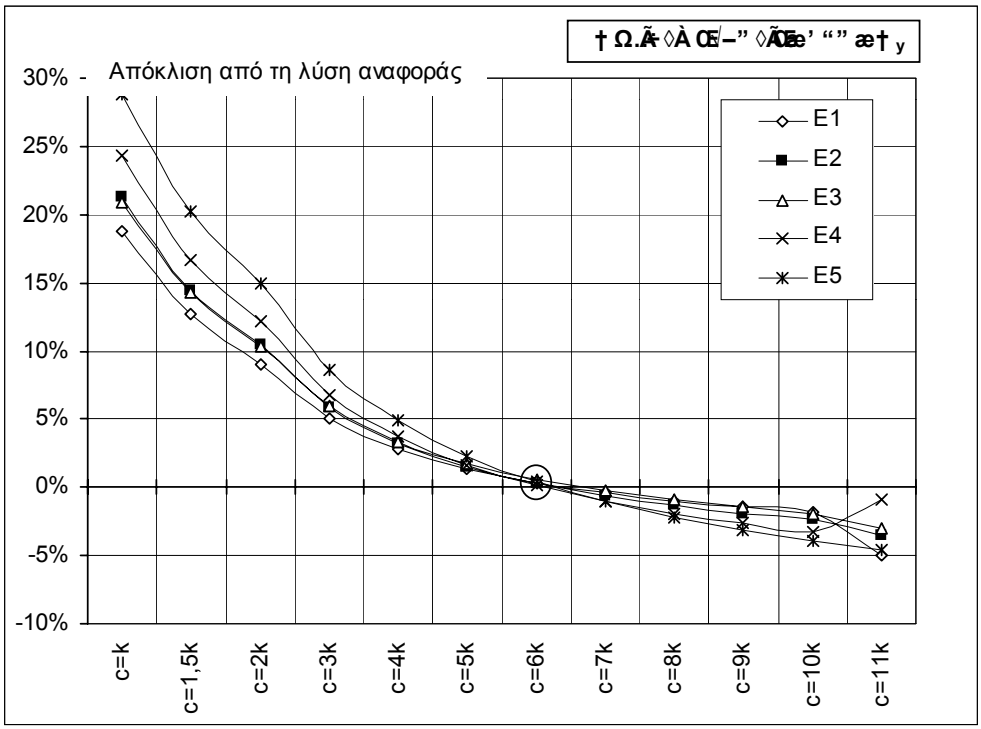


(α)

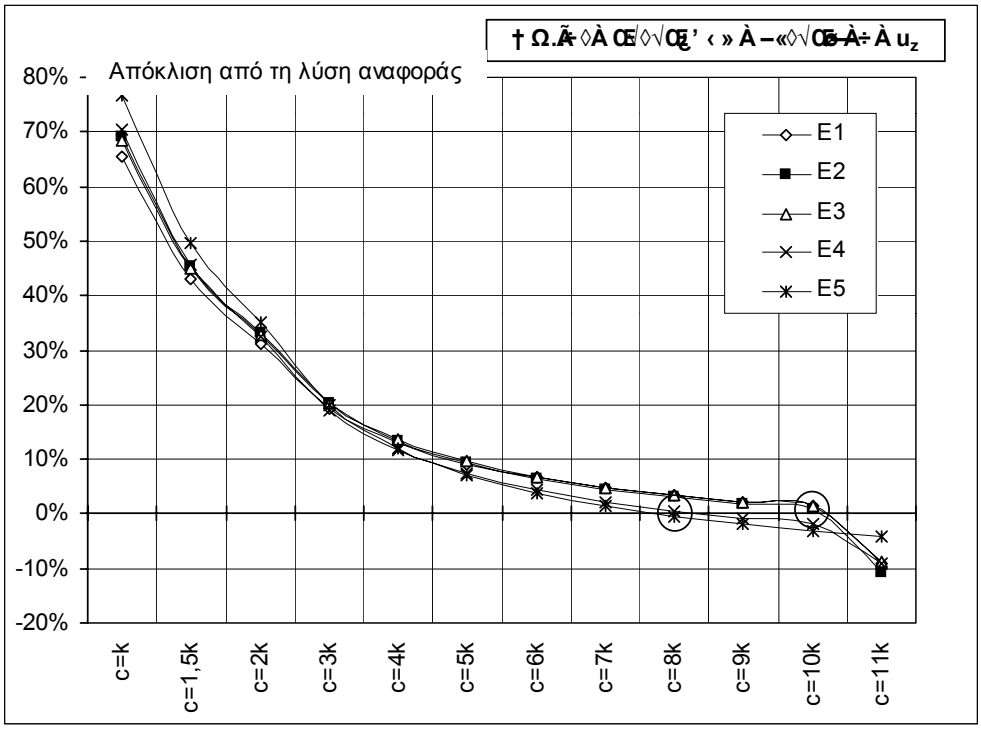


(β)

Σχήμα 5.12. Αποκλίσεις των μέγιστων καμπτικών ροπών M_y (α), και των μέγιστων κατακόρυφων μετακινήσεων u_z (β) του προσομοιώματος τριών παραμέτρων του Kerr από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=15m.

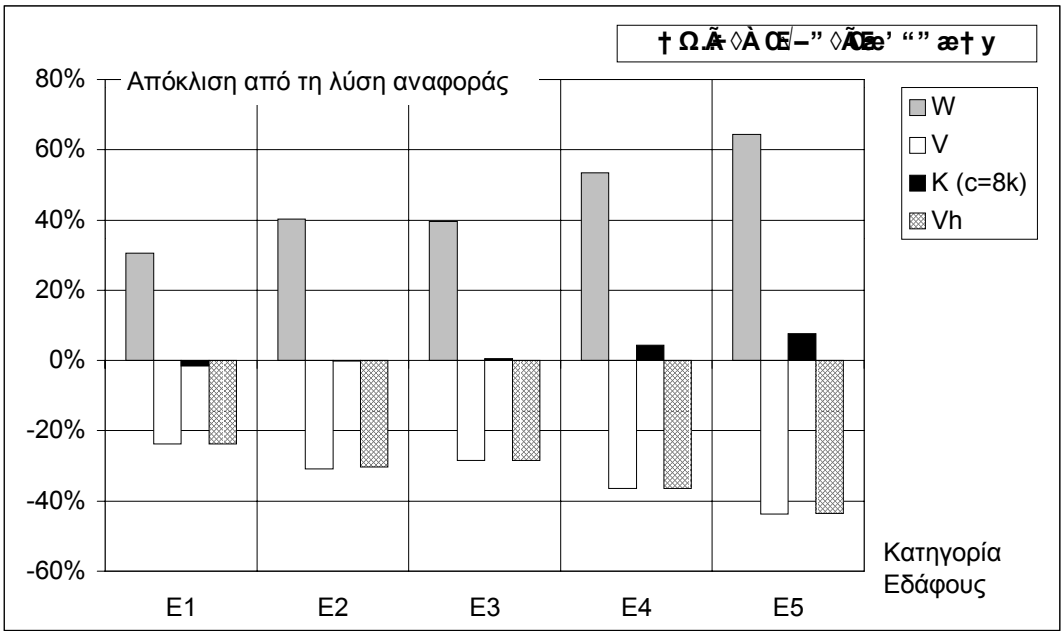


(α)

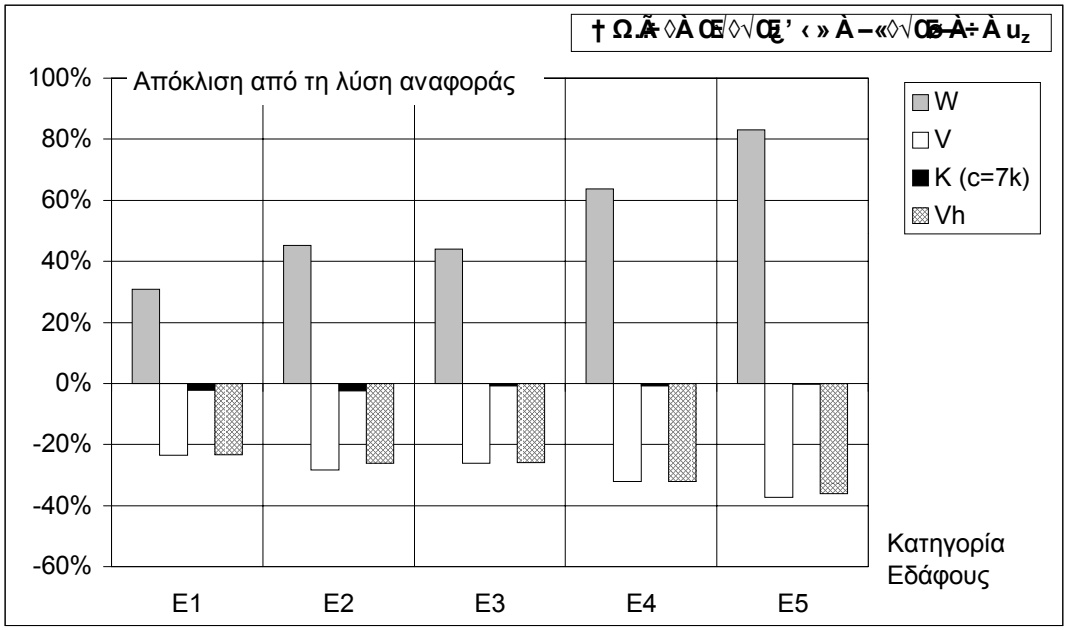


(β)

Σχήμα 5.13. Αποκλίσεις των μέγιστων καμπτικών ροπών M_y (α), και των μέγιστων κατακόρυφων μετακινήσεων u_z (β) του προσομοιώματος τριών παραμέτρων του Kerr από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=10m.

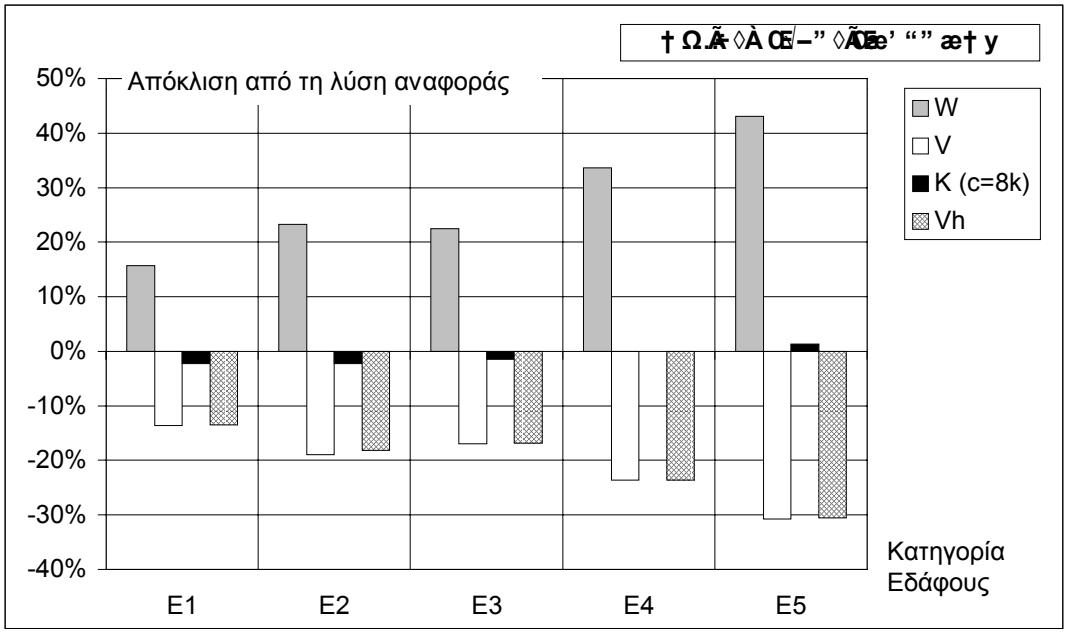


(α)

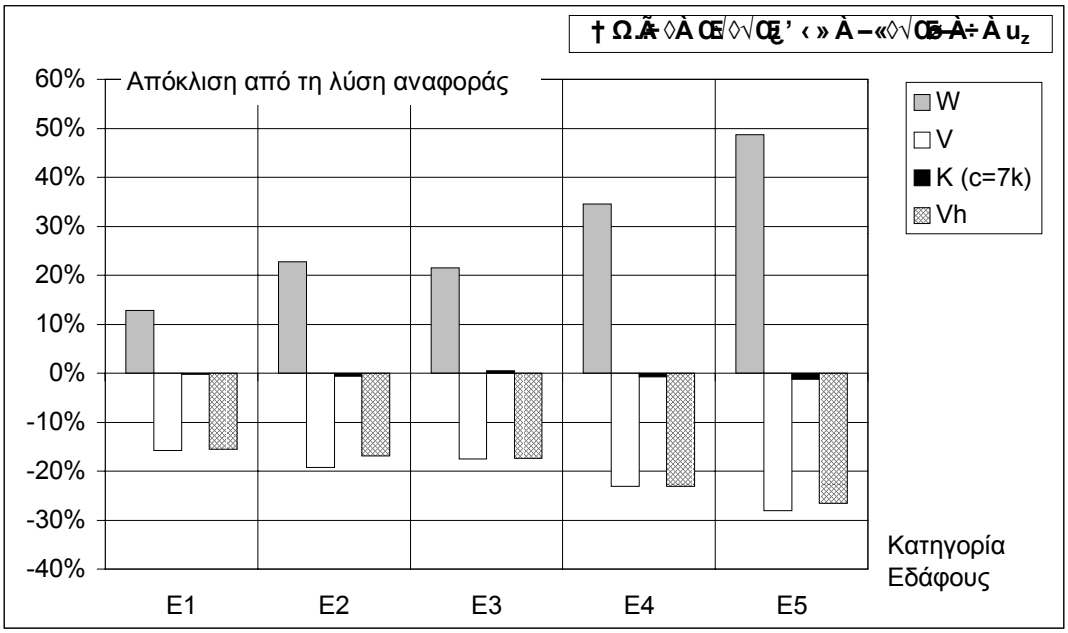


(β)

Σχήμα 5.14. Αποκλίσεις των μέγιστων καμπτικών ροπών M_y (α), και των μέγιστων κατακόρυφων μετακινήσεων u_z (β) των προσομοιωμάτων Winkler (W), Vlasov (V), Kerr (K), και Vlasov με θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου (Vh), από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

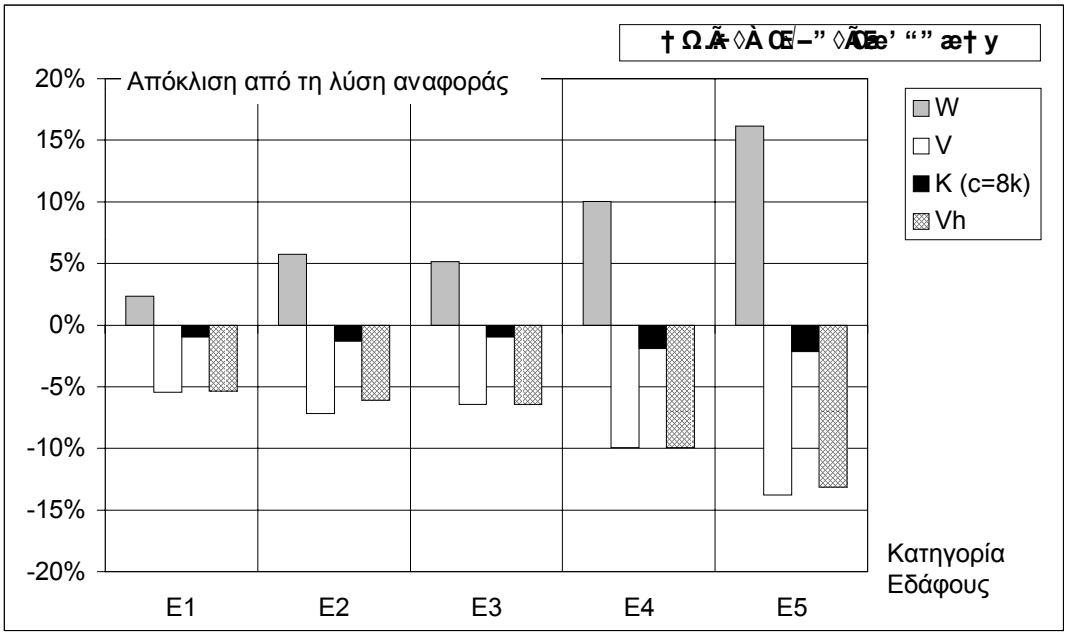


(α)

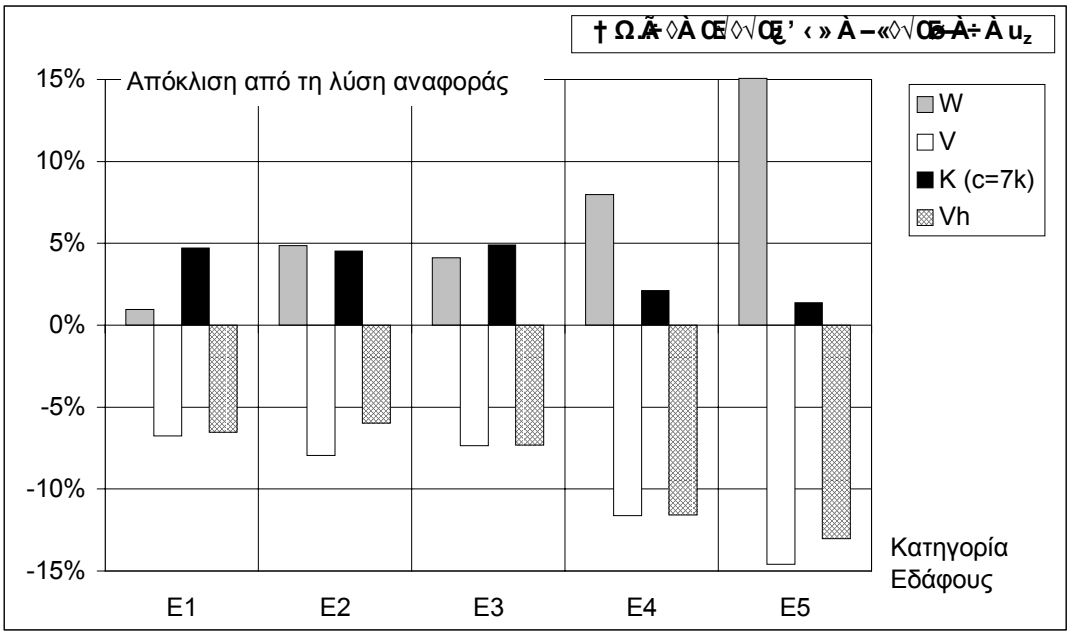


(β)

Σχήμα 5.15. Αποκλίσεις των μέγιστων καμπτικών ροπών M_y (α), και των μέγιστων κατακόρυφων μετακινήσεων u_z (β) των προσομοιωμάτων Winkler (W), Vlasov (V), Kerr (K), και Vlasov με θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου (Vh), από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=30m.



(α)



(β)

Σχήμα 5.16. Αποκλίσεις των μέγιστων καμπτικών ροπών M_y (α), και των μέγιστων κατακόρυφων μετακινήσεων u_z (β) των προσομοιωμάτων Winkler (W), Vlasov (V), Kerr (K), και Vlasov με θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου (Vh), από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=10m.

Από τα σχήματα 5.6 έως 5.13 προκύπτει μια σειρά από χρήσιμα συμπεράσματα, τα οποία μπορούν να συνοψιστούν στα παρακάτω σημεία:

1. Το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων αποδίδει αποτελέσματα που συγκλίνουν προς τα αποτελέσματα αναφοράς (προσομοιώματα επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων και εξισώσεις του ελαστικού ημιεπιπέδου) για συγκεκριμένες τιμές του συντελεστή συσχετισμού των παραμέτρων k και c. Πιο συγκεκριμένα:
   - Για τα «μαλακά» εδάφη Ε1, Ε2, και Ε3 επιτυγχάνεται σημαντική σύγκλιση (της τάξης του 1 – 2.5%) με τα αποτελέσματα αναφοράς, όσον αφορά την μέγιστη καμπτική ροπή M_y, όταν η τιμή του συντελεστή n_{ck} παίρνει τιμές μεταξύ του 6 και του 8 (c=6÷8k). Για μεγάλα πάχη του ελαστικού υποβάθρου η βέλτιστη σχέση είναι c=8k (για πάχη H=60m και H=50m), ενώ όσο το πάχος ελαττώνεται, ο βέλτιστος συντελεστής τείνει στην τιμή 6. Όσον αφορά την σύγκλιση της τιμής της μέγιστης κατακόρυφης μετακίνησης u_z θα πρέπει να τονιστεί ότι για μεγάλα και μεσαία πάχη του ελαστικού υποβάθρου (δηλαδή H_S=60 έως 25m) η βέλτιστη τιμή του n_{ck} είναι 7 (c=7k), ενώ για μικρότερα πάχη η τιμή αυτή αυξάνει ελαφρά έως την τιμή 8. Αξίζει επίσης να σημειωθεί, ότι και για τις κατακόρυφες μετακινήσεις η σύγκλιση που επιτυγχάνεται, όταν n_{ck}=7, είναι σημαντική καθώς είναι της τάξης του 0.5 – 2.5%. Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις προτείνεται ως βέλτιστη τιμή για το n_{ck} η τιμή 7 (c=7k). Με την τιμή αυτή επιτυγχάνεται η βέλτιστη κατά μέσον όρο σύγκλιση τόσο καμπτικών ροπών όσο και κατακορύφων μετακινήσεων ανεξαρτήτως του βάθους του ελαστικού υποβάθρου με εξαίρεση ίσως των πολύ μικρών βαθών (H_S≤15m).
   - Για τα «σκληρά» εδάφη Ε4 και Ε5 η βέλτιστη σύγκλιση της τιμής της μέγιστης καμπτικής ροπής M_y εξαρτάται πιο πολύ από το βάθος του ελαστικού υποβάθρου απ' ότι για τα αντίστοιχα «μαλακά». Έτσι για μεγάλα βάθη (H_S=50–60m) η βέλτιστη τιμή για το n_{ck} είναι ίση με 11. Για μεσαία βάθη (H_S=30–40m) η τιμή αυτή μειώνεται στο 8 – 9, ενώ για μικρά βάθη (H_S≤25m) μειώνεται ακόμα περισσότερο σε 6 – 7. Η μεγάλη αυτή διασπορά των βέλτιστων τιμών του n_{ck} δεν απαγορεύει την επιλογή μιας και μοναδικής βέλτιστης τιμής για κάθε τιμή του βάθους H_S, καθώς αν επί παραδείγματι επιλεγεί η τιμή n_{ck}=9 οι αποκλίσεις των τιμών των καμπτικών ροπών από τις αντίστοιχες τιμές αναφοράς δεν υπερβαίνουν σε καμία περίπτωση το 4%. Τέλος όσον αφορά την σύγκλιση των τιμών των κατακορύφων μετακινήσεων, αυτή επιτυγχάνεται για n_{ck}=7 όπως και στην περίπτωση των «μαλακών» εδαφών.
   - Σημαντική είναι επίσης η παρατήρηση, ότι για την περίπτωση των «σκληρών» εδαφών ο συντελεστής συσχέτισης n_{ck} για τον οποίον επιτυγχάνεται η σύγκλιση των αποτελεσμάτων με τα αποτελέσματα αναφοράς είναι μεγαλύτερος απ' ότι στην περίπτωση των «μαλακών» εδαφών. Η προσπάθεια ερμηνείας του συμπεράσματος αυτού με βάση τα χαρακτηριστικά του μηχανικού προσομοιώματος των τριών παραμέτρων οδηγεί στην παρατήρηση ότι στην περίπτωση των «σκληρών» εδαφών το ποσοστό της κατακόρυφης μετακίνησης που οφείλεται στην παραμόρφωση της άνω στρώσης των ελατηρίων είναι μικρότερο. Κατά συνέπεια θα πρέπει να είναι πιο «σκληρά» και τα αντίστοιχα ελατήρια.

2. Η υπεροχή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων έναντι των προσομοιωμάτων του Winkler και του Vlasov είναι εμφανής, όπως φαίνεται και από τα σχήματα 5.14 – 5.16. Πιο συγκεκριμένα από την μελέτη των σχημάτων αυτών προκύπτουν τα κάτωθι συμπεράσματα:
   - Το προσομοίωμα του Winkler αποδίδει γενικά μεγαλύτερες τιμές καμπτικών ροπών και μετακινήσεων από την λύση αναφοράς. Ειδικότερα, για τις καμπτικές ροπές οι αποκλίσεις είναι μεγαλύτερες στην περίπτωση των «σκληρών» εδαφών και μάλιστα είναι σημαντικότατες, καθώς είναι της τάξης του 50% για μεγάλα και μεσαία βάθη του ελαστικού υποβάθρου, ενώ αμβλύνονται στην περίπτωση μικρού βάθους καθώς μειώνονται στο 10 – 15%. Αντίστοιχης τάξης είναι και οι αποκλίσεις των κατακορύφων μετακινήσεων.
   - Το προσομοίωμα του Vlasov αποδίδει γενικά μικρότερες τιμές καμπτικών ροπών και κατακορύφων μετακινήσεων απ' τις αντίστοιχες τιμές αναφοράς. Πάντως, κατ' απόλυτη τιμή οι αποκλίσεις αυτές είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες αποκλίσεις του προσομοιώματος του Winkler. Έτσι, για τα «σκληρά» εδάφη οι αποκλίσεις των καμπτικών ροπών – που είναι γενικά μεγαλύτερες απ' ότι στην περίπτωση των «μαλακών» εδαφών – δεν υπερβαίνουν το 40% για μεγάλα και μεσαία βάθη υποβάθρου, και το 15% για τα μικρά. Αντίστοιχης τάξης είναι οι αποκλίσεις των μετακινήσεων.
   - Η θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων του υποβάθρου δεν είναι καθοριστικής σημασίας για την περίπτωση της κάμψης δοκών «απείρου» μήκους υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Από την μελέτη των σχημάτων 5.14 – 5.16 προκύπτει το συμπέρασμα, ότι η θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων του υποβάθρου δεν διαφοροποιεί τα αποτελέσματα από την αντίστοιχη επίλυση χωρίς τη θεώρηση τους, καθώς οι διαφορές που προκύπτουν δεν υπερβαίνουν το 5% σε καμία περίπτωση.
3. Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από τις αναλύσεις που προηγήθηκαν αφορά και τον προσδιορισμό των παραμέτρων των προσομοιωμάτων. Όπως είναι γνωστό, η απόδοση ενός προσομοιώματος δεν εξαρτάται μόνον από τις παραδοχές επάνω στις οποίες είναι βασισμένο, ούτε μόνον από τον αριθμό των παραμέτρων που λαμβάνονται υπόψη. Πολύ σημαντική είναι και η εξάρτηση των αποτελεσμάτων από τις αριθμητικές τιμές που λαμβάνουν οι παράμετροι αυτές. Η έλλειψη αξιόπιστων στοιχείων για τις τιμές των εδαφικών παραμέτρων – πέραν της πρώτης – καθιστά προβληματική την χρήση των προσομοιωμάτων των δυο και τριών παραμέτρων. Προκειμένου να αντιμετωπιστεί η έλλειψη αυτή και να καταστεί δυνατή η αξιόπιστη σύγκριση μεταξύ των προσομοιωμάτων, θα πρέπει οι συγκρίσεις αυτές να γίνουν με τιμές εδαφικών παραμέτρων που προκύπτουν από μια συγκεκριμένη διαδικασία. Στα πλαίσια των αναλύσεων που παρουσιάστηκαν η μόνη δυνατότητα που υπήρχε ήταν η χρήση του αναλυτικού προσδιορισμού των παραμέτρων k, G με χρήση του τροποποιημένου προσομοιώματος του Vlasov. Όσο για την τρίτη παράμετρο c, η έλλειψη αξιόπιστων στοιχείων στη βιβλιογραφία οδήγησε στην απόφαση του συσχετισμού της τιμής της με την τιμή της παραμέτρου k, με το σκεπτικό ότι οι δυο αυτές παράμετροι αναφέρονται σε σταθερές κατακορύφων μεταφορικών ελατηρίων και επομένως είναι της ίδιας φύσεως. Τα αποτελέσματα των συγκρίσεων με τις λύσεις αναφοράς οδήγησαν στο σημαντικό συμπέρασμα, ότι οι τιμές του συντελεστή συσχέτισης n_{ck} με τον οποίο επιτυγχάνεται σύγκλιση με τα αποτελέσματα αναφοράς δεν εμφανίζουν μια μεγάλη ή τυχαία

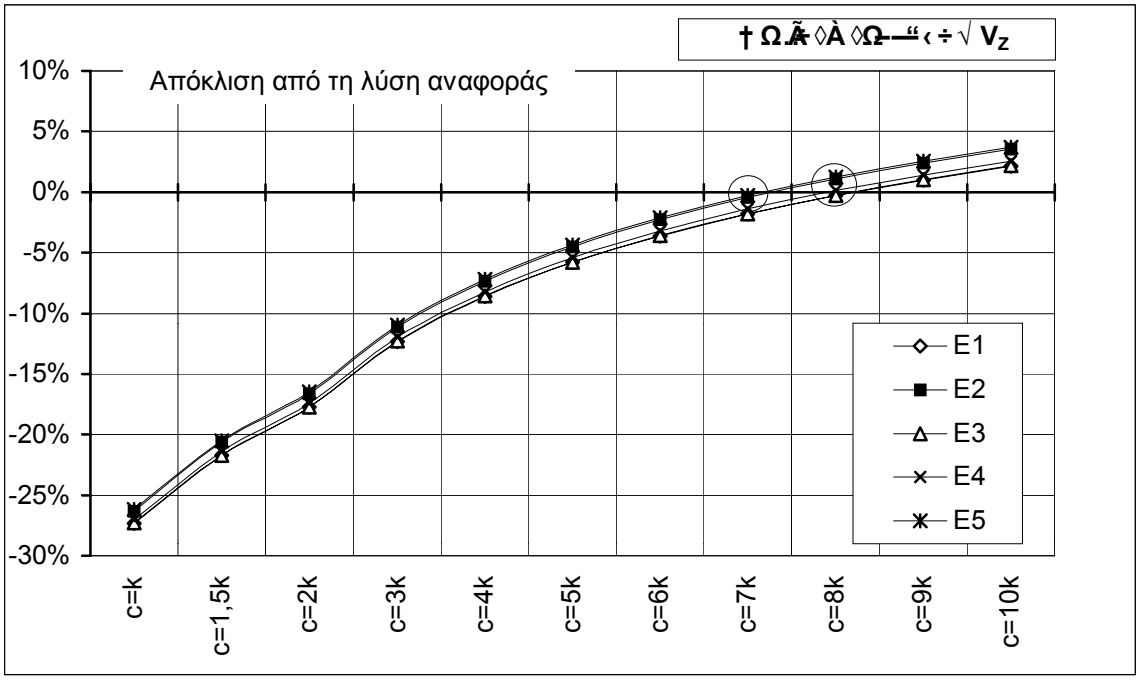
διασπορά όπως περιγράφηκε και πιο πάνω. Η παρατήρηση αυτή μπορεί να οδηγήσει στο συμπέρασμα, ότι η μεθοδολογία προσδιορισμού των τιμών των παραμέτρων k, G με το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov, «εμπλουτισμένη» με τα αποτελέσματα των παραμετρικών αναλύσεων για την συσχέτιση των παραμέτρων k και c, μπορεί να αποτελέσει μια αξιόπιστη μεθοδολογία προσδιορισμού των τριών εδαφικών παραμέτρων του μηχανικού προσομοιώματος του Kerr. Έτσι με βάση τα παραπάνω συμπεράσματα κρίθηκε σκόπιμο να ακολουθηθεί η ίδια διαδικασία προσδιορισμού των παραμέτρων και στα επόμενα παραδείγματα, προκειμένου να ελεγχθεί περαιτέρω η αποτελεσματικότητα και η αξιοπιστία της.

5.3.1.2. Παράδειγμα 1β. Δοκός υπό μοναχική ροπή

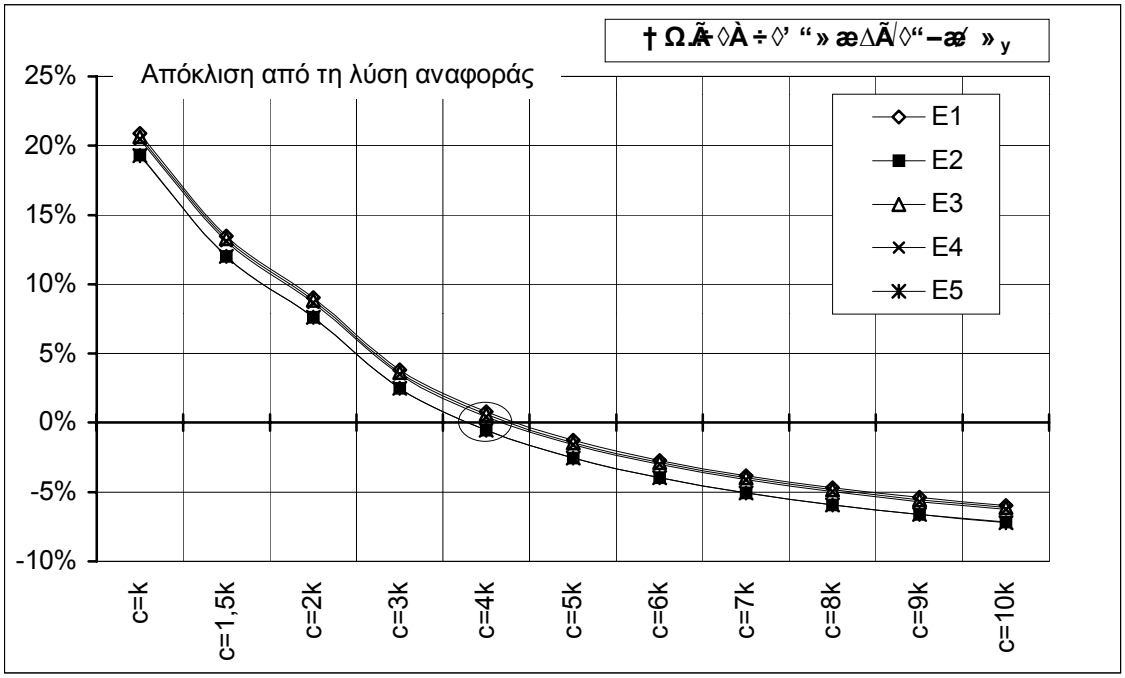
Και για την περίπτωση του προβλήματος της κάμψης δοκού «απείρου» μήκους υπό μοναχική ροπή ακολουθήθηκε διαδικασία επιλύσεων όμοια με αυτή που ακολουθήθηκε και στην περίπτωση του μοναχικού κατακόρυφου φορτίου. Έτσι χρησιμοποιήθηκαν ως λύσεις αναφοράς, οι λύσεις που προκύπτουν από την επίλυση με χρήση προσομοιωμάτων επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων. Για τις επιλύσεις αυτές έγινε χρήση κανάβων με τα χαρακτηριστικά που δίνονται στο Σχήμα 5.5, με τη διαφορά βέβαια ότι στο επίπεδο συμμετρίας έγινε χρήση των συνοριακών συνθηκών που αντιστοιχούν σε προβλήματα συμμετρικών φορέων με αντισυμμετρική φόρτιση. Για τον προσδιορισμό των τιμών των παραμέτρων k και G, αλλά και για τις επιλύσεις με τα υπόλοιπα εξεταζόμενα προσομοιώματα, έγινε χρήση του αλγορίθμου **I**nfinite **B**eams **O**n **E**lastic **F**oundation όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα.

Ωστόσο πραγματοποιήθηκαν λιγότερες επιλύσεις, καθώς θεωρήθηκαν μόνον τρία διαφορετικά πάχη για το ελαστικό υπόβαθρο – H_S=15, 30, 60 μέτρα – ενώ ο αριθμός των διαφορετικών τύπων εδάφους που εξετάστηκαν παρέμεινε ο ίδιος (κατά τον Πίνακα 5.2). Λόγω του ότι στην περίπτωση της φόρτισης με μοναχική ροπή τόσο η κατακόρυφη μετακίνηση u_z όσο και η καμπτική ροπή M_y είναι προκαθορισμένες στο σημείο εφαρμογής της εξωτερικής φόρτισης (με τιμές 0 και $M_0/2$ αντίστοιχα), τα μεγέθη που ελέγχθηκαν είναι η στροφή της διατομής $\varphi_y=du_z/dx$, και η τέμνουσα δύναμη της δοκού V_z.

Στα σχήματα 5.17 – 5.19 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των παραμετρικών αναλύσεων που αφορούν την διερεύνηση του βέλτιστου συντελεστή συσχέτισης των παραμέτρων k και c, προκειμένου να επιτευχθεί σύγκλιση των εξεταζομένων μεγεθών προς τα αποτελέσματα αναφοράς, ενώ στα σχήματα 5.20 – 5.22 δίνονται τα αποτελέσματα των συγκρίσεων όλων των προσομοιωμάτων.

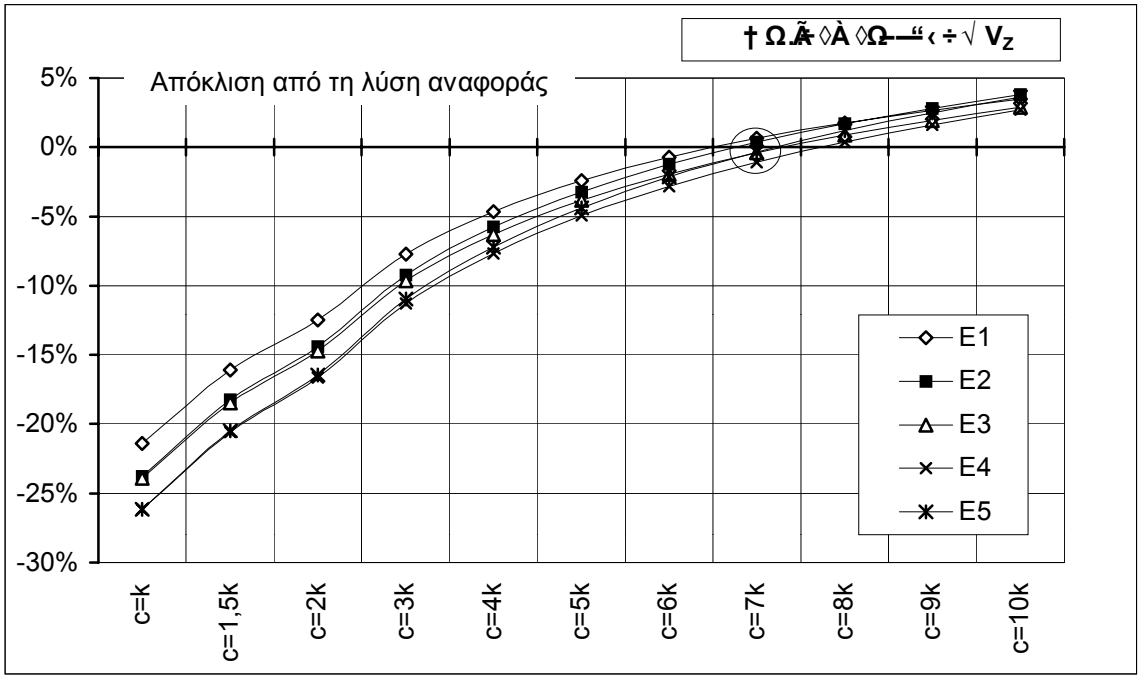


(α)

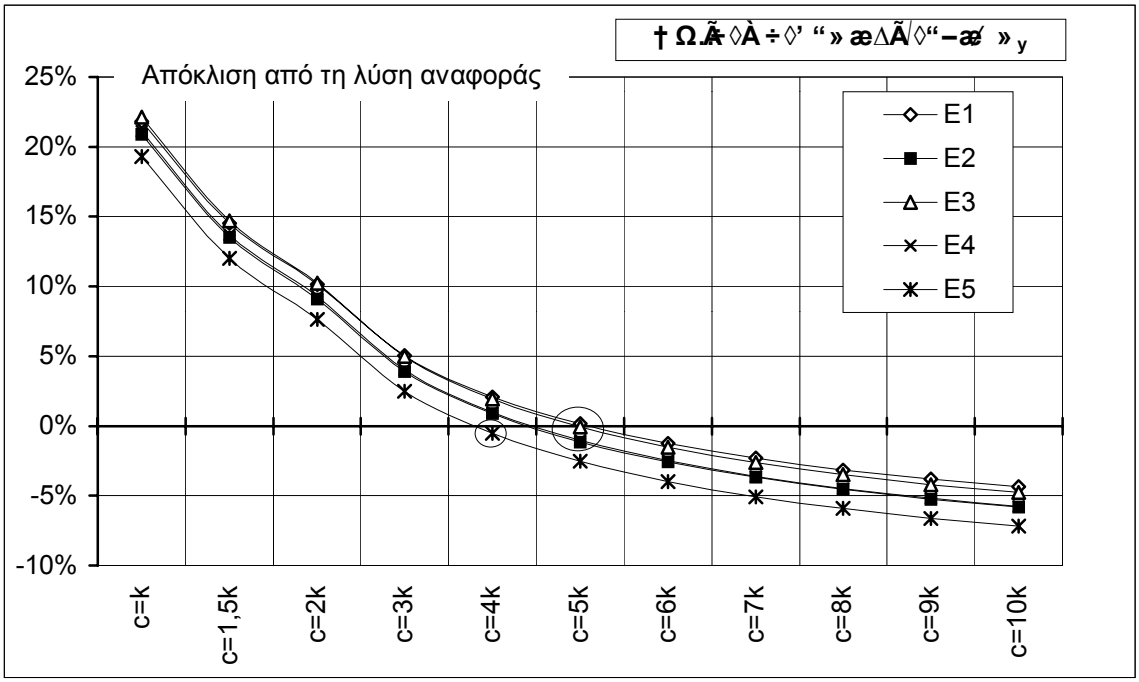


(β)

Σχήμα 5.17. Αποκλίσεις των μέγιστων τεμνουσών δυνάμεων V_z (α), και των μεγίστων στροφών της διατομής φ_y (β) του προσομοιώματος τριών παραμέτρων του Kerr από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική ροπή. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

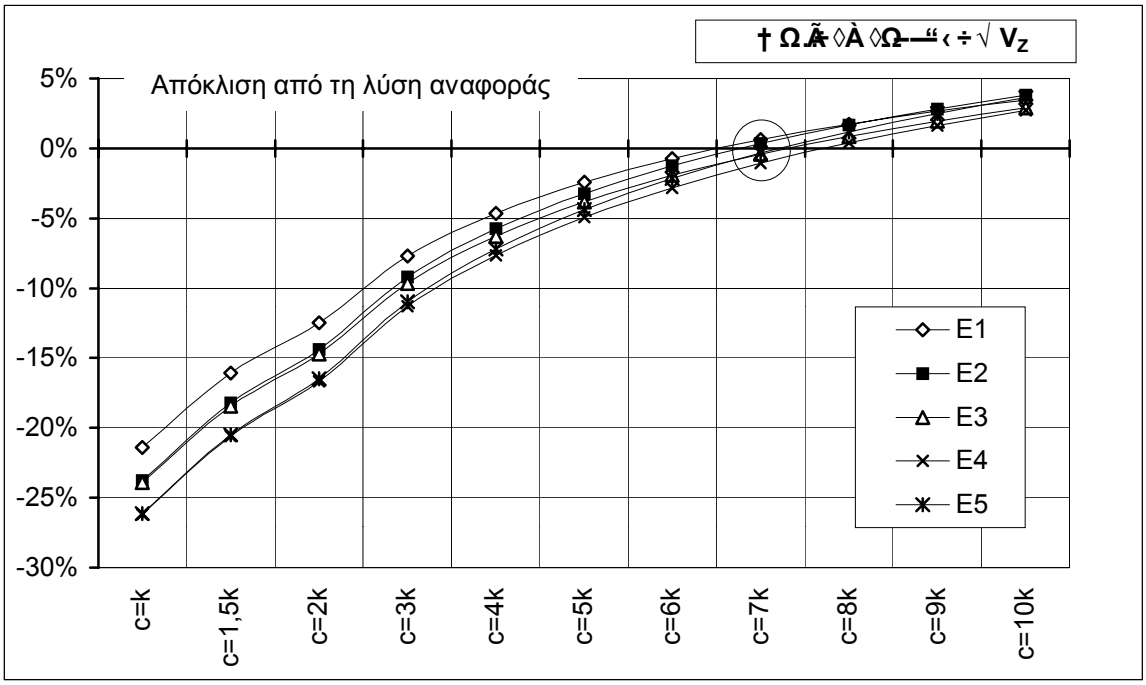


(α)

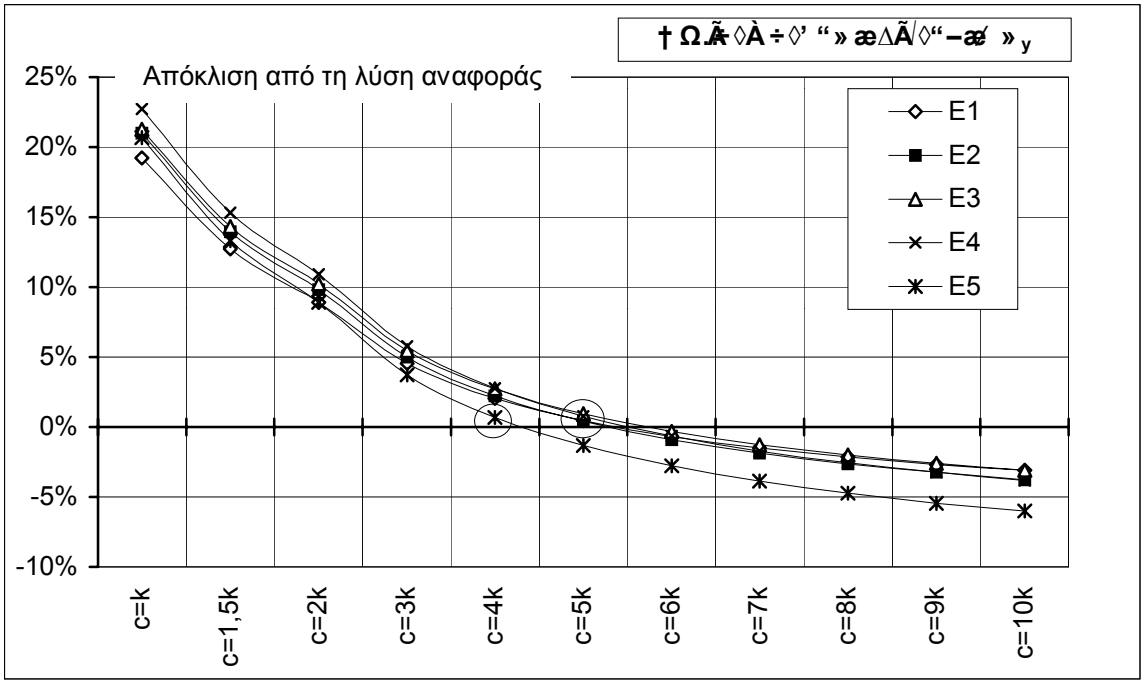


(β)

Σχήμα 5.18. Αποκλίσεις των μέγιστων τεμνουσών δυνάμεων V_z (α), και των μεγίστων στροφών της διατομής φ_y (β) του προσομοιώματος τριών παραμέτρων του Kerr από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική ροπή. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=30m.

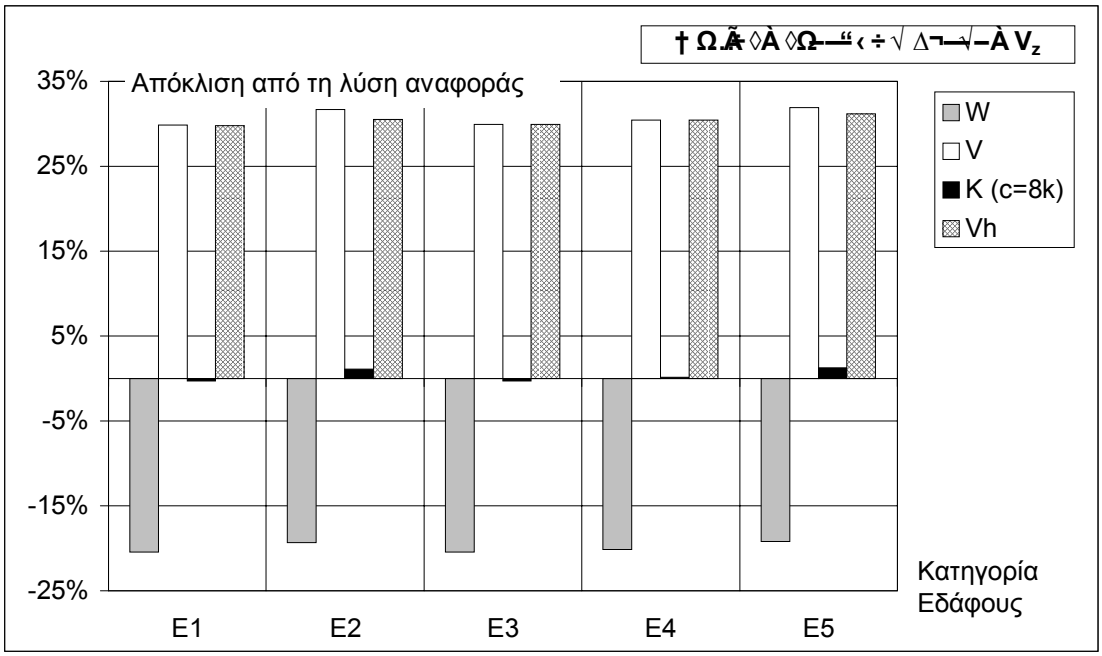


(α)

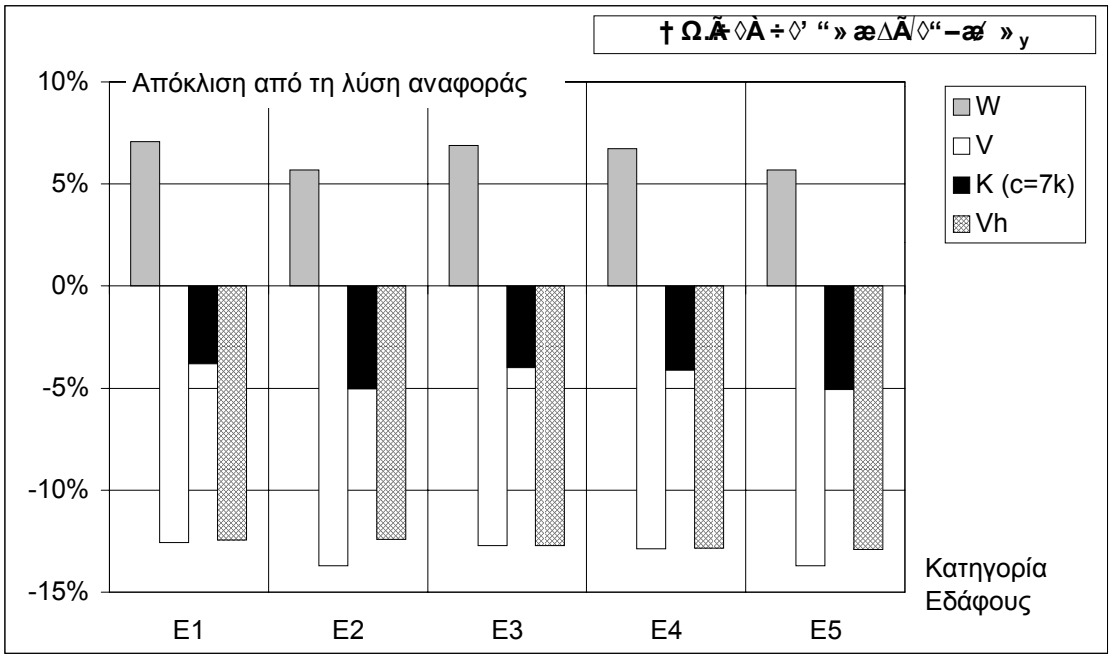


(β)

Σχήμα 5.19. Αποκλίσεις των μέγιστων τεμνουσών δυνάμεων V_z (α), και των μεγίστων στροφών της διατομής φ_y (β) του προσομοιώματος τριών παραμέτρων του Kerr από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική ροπή. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=15m.

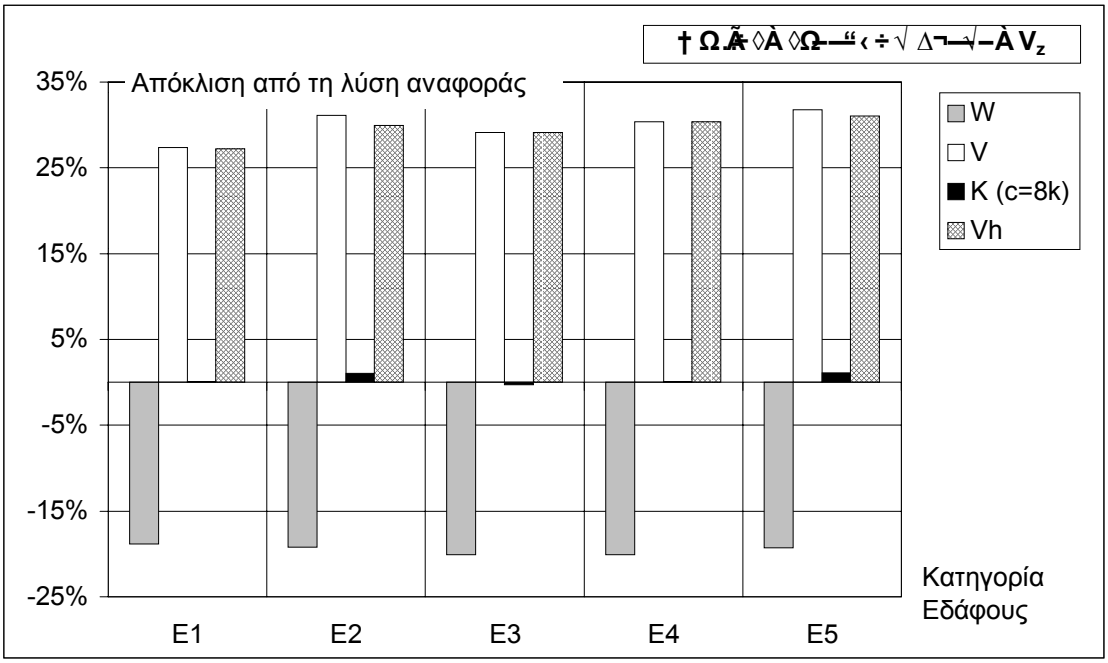


(α)

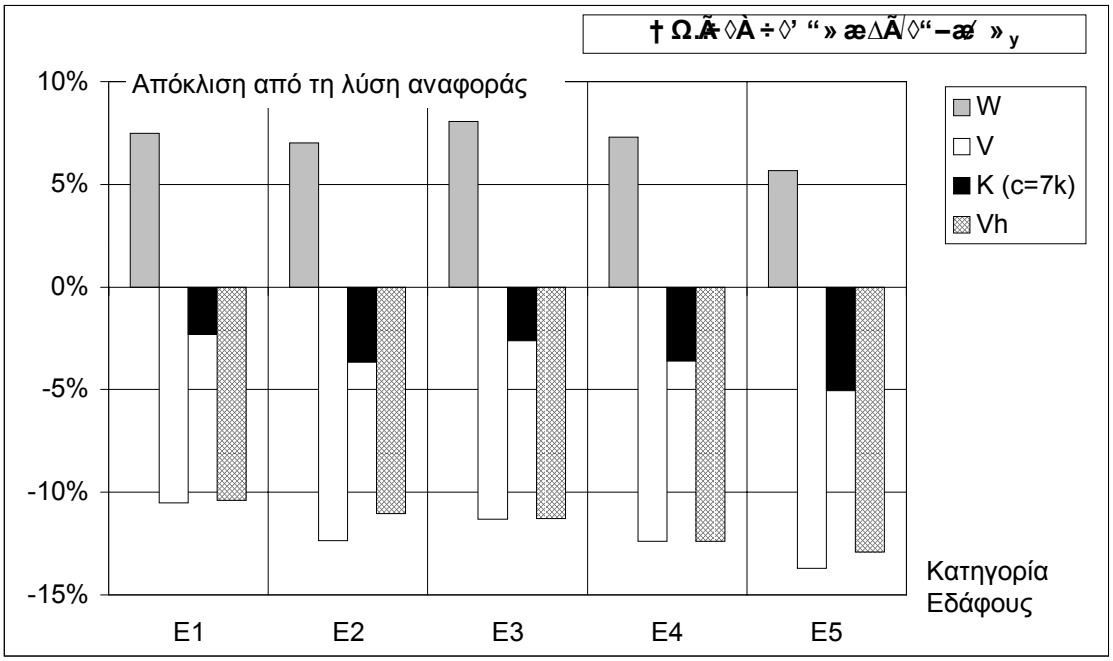


(β)

Σχήμα 5.20. Αποκλίσεις των μέγιστων τεμνουσών δυνάμεων V_z (α), και των μεγίστων στροφών της διατομής φ_y (β) των προσομοιωμάτων Winkler (W), Vlasov (V), Kerr (K), και Vlasov με θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου (Vh), από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική ροπή. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

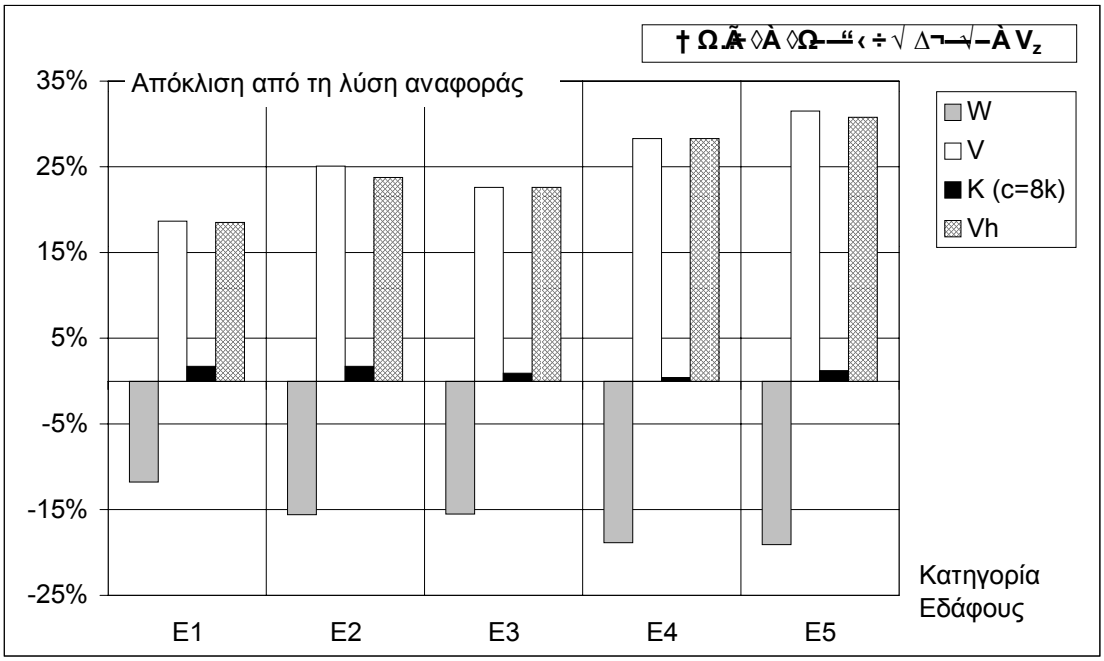


(α)

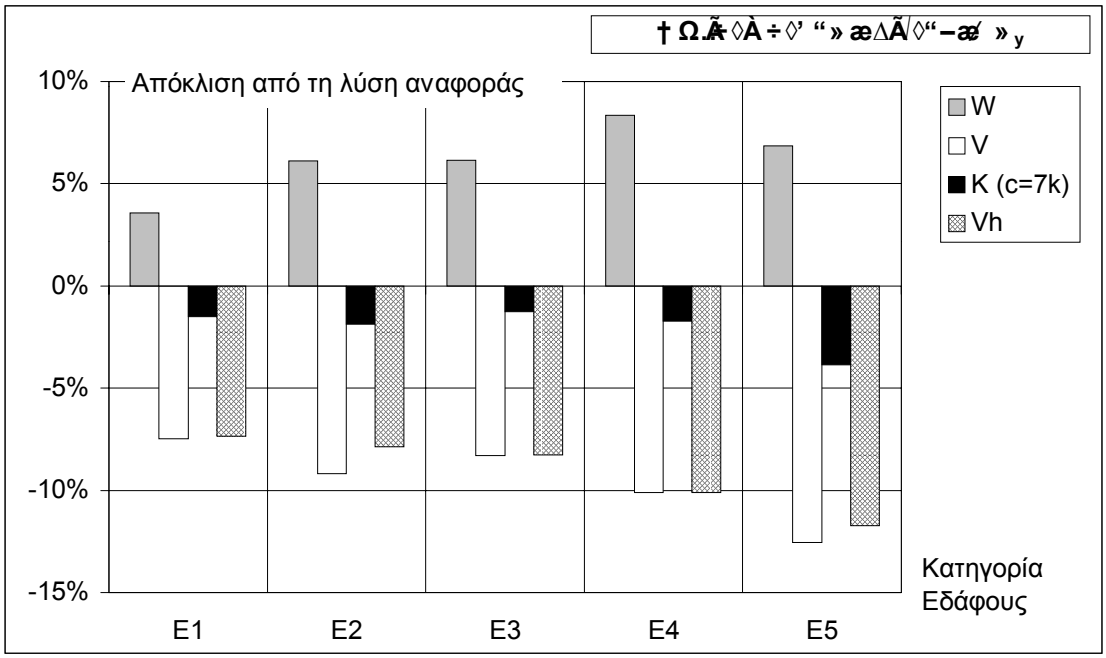


(β)

Σχήμα 5.21. Αποκλίσεις των μέγιστων τεμνουσών δυνάμεων V_z (α), και των μεγίστων στροφών της διατομής φ_y (β) των προσομοιωμάτων Winkler (W), Vlasov (V), Kerr (K), και Vlasov με θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου (Vh), από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική ροπή. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=30m.



(α)



(β)

Σχήμα 5.22. Αποκλίσεις των μέγιστων τεμνουσών δυνάμεων V_z (α), και των μεγίστων στροφών της διατομής φ_y (β) των προσομοιωμάτων Winkler (W), Vlasov (V), Kerr (K), και Vlasov με θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου (Vh), από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική ροπή. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=15m.

Από τη μελέτη των σχημάτων 5.17 έως 5.19 προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

1. Σε αντίθεση με την περίπτωση φόρτισης με μοναχικό κατακόρυφο φορτίο, δεν υφίσταται διαφοροποίηση μεταξύ των «μαλακών» εδαφών Ε1, Ε2, Ε3 και των «σκληρών» εδαφών Ε4, Ε5 όσον αφορά την τιμή του συντελεστή n_{ck} με την οποία επιτυγχάνεται η μέγιστη σύγκλιση των τεμνουσών δυνάμεων V_z με τη λύση αναφοράς. Η τιμή αυτή είναι μάλιστα ανεξάρτητη και του βάθους του ελαστικού υποβάθρου και κυμαίνεται μεταξύ του 6 και του 7.
2. Οι αντίστοιχες τιμές του συντελεστή n_{ck} για την επίτευξη σύγκλισης της μέγιστης στροφής των διατομών φ_y, ενώ δεν εξαρτώνται από το αν το έδαφος είναι «σκληρό» ή «μαλακό», παρουσιάζουν μια περίπου γραμμική εξάρτηση από το βάθος H_S του ελαστικού υποβάθρου. Έτσι, για H_S=60m η βέλτιστη τιμή του n_{ck} είναι 4 ενώ για H_S=30m και H_S=15m είναι 5 και 6 αντίστοιχα.
3. Ως τιμή του συντελεστή n_{ck} για την επίτευξη μιας βέλτιστης προσέγγισης – τόσο των τεμνουσών δυνάμεων όσο και των στροφών της διατομής ανεξαρτήτως τύπου εδάφους και ανεξαρτήτως πάχους του ελαστικού υποβάθρου – στην λύση αναφοράς μπορεί να θεωρηθεί η τιμή 7. Πράγματι, για την τιμή αυτή οι αποκλίσεις από την λύση αναφοράς δεν υπερβαίνουν σε καμία περίπτωση το 4%.

Από τη μελέτη των σχημάτων 5.20 έως 5.22 προκύπτει και για την παρούσα περίπτωση το συμπέρασμα της σαφούς υπεροχής του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων έναντι των προσομοιωμάτων των δυο και της μιας παραμέτρου, εάν επιλεγεί για τον συντελεστή n_{ck} η τιμή 7. Πιο συγκεκριμένα, προκύπτουν και τα ακόλουθα συμπεράσματα:

1. Το προσομοίωμα του Winkler αποδίδει γενικά μικρότερες τιμές για τις τέμνουσες δυνάμεις απ' ό,τι το προσομοίωμα αναφοράς. Η τάξη μεγέθους των αποκλίσεων αυτών δεν μεταβάλλεται σημαντικά σε σχέση με το βάθος του ελαστικού υποβάθρου ούτε και σε σχέση με το αν το έδαφος είναι «μαλακό» ή «σκληρό». Κυμαίνεται δε μεταξύ του 7 και του 20%. Όσον αφορά την στροφή της διατομής, το προσομοίωμα αποδίδει γενικά μεγαλύτερες τιμές από τις «ακριβείς». Οι αποκλίσεις είναι της ίδιας τάξης μεγέθους για κάθε ένα από τους τύπους εδάφους που μελετήθηκαν και κυμαίνονται γύρω στο 5 με 9%.
2. Το προσομοίωμα του Vlasov και το αντίστοιχο προσομοίωμα με την θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου εξακολουθούν και στην περίπτωση αυτή να μην παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές και για το λόγο αυτό τα συμπεράσματα που παρατίθενται παρακάτω είναι κοινά και για τα δυο αυτά προσομοιώματα:
   - Παρατηρείται απόδοση γενικά μεγαλύτερων τιμών από την ακριβή λύση, αναφορικά με την μέγιστη τέμνουσα V_Z. Οι αποκλίσεις κυμαίνονται, ανεξαρτήτως του τύπου του εδάφους, γύρω στο 25 – 30%, και απλώς μειώνονται λίγο στην περίπτωση υποβάθρου με μικρό πάχος (H_S=15m). Οι τιμές των αποκλίσεων αυτών είναι κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερες από τις αντίστοιχές αποκλίσεις του προσομοιώματος του Winkler.
   - Όσον αφορά τις τιμές της στροφής των διατομών, αυτές εμφανίζονται να είναι γενικά μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες «ακριβείς» και με αποκλίσεις που κυμαίνονται μεταξύ του 10 – 15%. Και στην περίπτωση αυτή παρατηρείται μια άμβλυνση των αποκλίσεων στην περίπτωση ελαστικού υποβάθρου με μικρό πάχος.

Κλείνοντας τα συμπεράσματα για την περίπτωση της κάμψης δοκών «απείρου» μήκους υπό μοναχική ροπή θα πρέπει να επισημανθεί ότι η διαδικασία προσδιορισμού των τιμών των τριών εδαφικών παραμέτρων εμφανίζεται και στην περίπτωση αυτή αποτελεσματική όσον αφορά τον προσδιορισμό τιμών για τις οποίες επιτυγχάνεται σύγκλιση των αποτελεσμάτων με τα αποτελέσματα ακριβέστερων επιλύσεων όπως η επίλυση με επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι ορίζονται και στην παρούσα περίπτωση συγκεκριμένες τιμές για τους συντελεστές συσχέτισης με τους οποίους επιτυγχάνονται οι προαναφερόμενες συγκλίσεις προς τις λύσεις αναφοράς.

Πολύ σημαντικό είναι το γεγονός, ότι για τα «μαλακά» εδάφη, η τιμή n_{ck}=7 οδηγεί σε αποτελέσματα τα όποια δεν αποκλίνουν σε καμία περίπτωση περισσότερο από 4% και για τα εντασιακά και για τα παραμορφωσιακά μεγέθη είτε για την περίπτωση της φόρτισης με μοναχικό κατακόρυφο φορτίο είτε για την περίπτωση της φόρτισης με μοναχική ροπή. Έτσι, η τιμή αυτή αποτελεί αντικείμενο περαιτέρω έρευνας, για το αν εξακολουθεί να είναι ικανοποιητική και κατά την περίπτωση της μελέτης δοκών πεπερασμένου μήκους.

Αντίστοιχα, για τα «σκληρά» εδάφη η τιμή n_{ck}=7 οδηγεί σε σύγκλιση των αποτελεσμάτων με τα αποτελέσματα αναφοράς για την περίπτωση φόρτισης με μοναχική ροπή, ενώ η αντίστοιχη τιμή για την περίπτωση φόρτισης με μοναχική κατακόρυφη δύναμη είναι n_{ck}=9. Και στην περίπτωση αυτή οι παραπάνω τιμές θα αποτελέσουν αντικείμενο έρευνας για τις δοκούς πεπερασμένου μήκους.

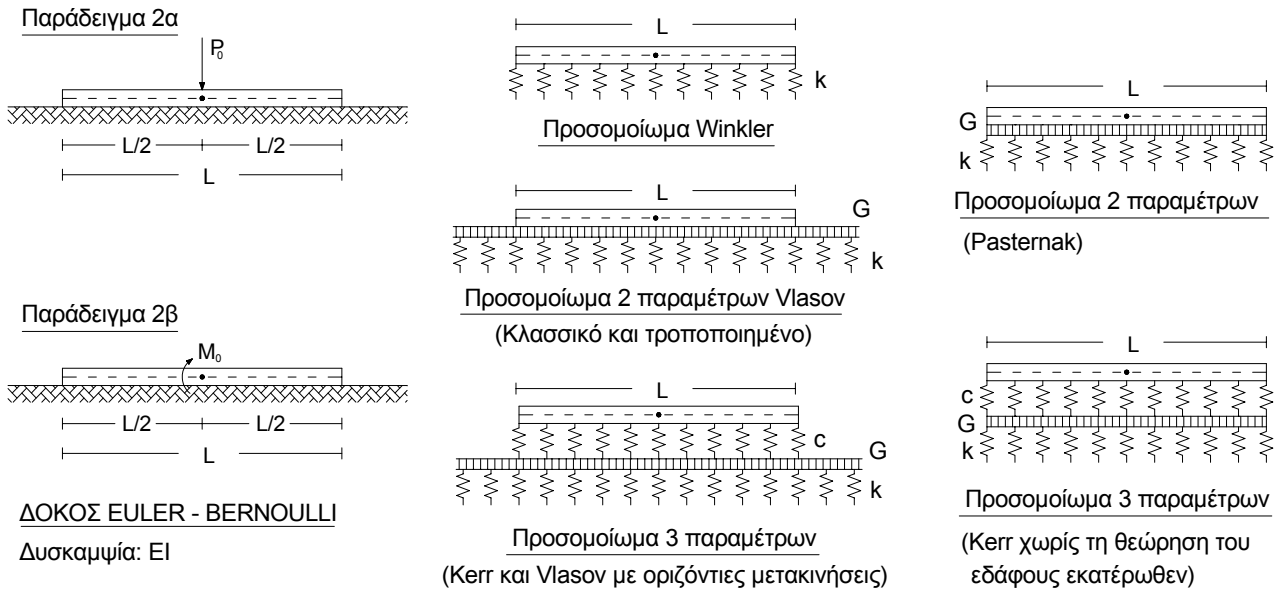
Δεν θα πρέπει, τέλος, να λησμονείται το γεγονός ότι όλα τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τις παραπάνω αναλύσεις μπορούν να θεωρηθούν ως ισχύοντα και για την περίπτωση δοκών πεπερασμένου μήκους, εάν το μήκος τους υπερβαίνει το όριο που ορίστηκε στην Παράγραφο 2.5.3 (Σχέση 2.134) και ισχύει για δοκούς που εδράζονται επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων (λ>1.86). Επιπλέον, στα πλαίσια των αναλύσεων των δοκών πεπερασμένου μήκους που ακολουθούν, θα γίνουν και έλεγχοι της ισχύος του προαναφερομένου ορίου και για την περίπτωση δοκών που εδράζονται επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων.

5.3.2. Παραδείγματα Ομάδας 2: Μεμονωμένες Δοκοί Πεπερασμένου μήκους

Τα παραδείγματα της ομάδας αυτής αφορούν την επίλυση δοκών πεπερασμένου μήκους, καταρχήν με απλές φορτίσεις (κατακόρυφες δυνάμεις και ροπές, Παραδείγματα 2α και 2β), και εν συνεχεία με ένα πιο σύνθετο σύστημα φόρτισης (Παράδειγμα 2γ). Βασικός στόχος των παραδειγμάτων αυτών είναι η αξιολόγηση της συμπεριφοράς των προσομοιωμάτων λαμβάνοντας υπόψη και την επιρροή των συνοριακών συνθηκών, ενώ ταυτόχρονα αξιολογείται η επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν των δοκών στην διαμήκη προς τον άξονα τους διεύθυνση. Για τις επιλύσεις γίνεται χρήση των προσομοιωμάτων που δίνονται στο σχήμα 5.23. Ως λύσεις αναφοράς, όπου απαιτούνται, χρησιμοποιούνται λύσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή προσομοιωμάτων επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων.

5.3.2.1. Παράδειγμα 2α: Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση

Πρόκειται για το απλούστερο παράδειγμα δοκού πεπερασμένου μήκους. Ωστόσο, παρά την απλότητα του είναι πολύ χρήσιμο για την σύγκριση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από τη χρήση των διαφορών προσομοιωμάτων. Για τον λόγο αυτό έχει χρησιμοποιηθεί σε πάρα πολλά παραδείγματα της βιβλιογραφίας.



Σχήμα 5.23. Δοκοί πεπερασμένου μήκους υπό απλές φορτίσεις, και τα χρησιμοποιούμενα προσομοιώματα.

Για την επίλυση του παραδείγματος έγινε χρήση του παρακάτω λογισμικού:

- Προσομοίωμα Winkler → Πρόγραμμα **B**eam on **E**lastic **F**oundation.
- Προσομοίωμα Επιφανειακών Πεπερασμένων Στοιχείων → Πρόγραμμα SAP2000.
- Προσομοιώματα δυο και τριών παραμέτρων και παραλλαγές τους → Αναπτύχθηκαν αλγόριθμοι σε γλώσσα Fortran.

Όσον αφορά τα δεδομένα επίλυσης, θα πρέπει να τονιστούν τα εξής:

Τα δεδομένα του εδάφους θεμελίωσης (Μηχανικά χαρακτηριστικά E_S, ν_S, και πάχος ελαστικού υποβάθρου H_S) είναι ίδια με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν και για τις επιλύσεις των δοκών «απείρου» μήκους (βλέπε Παράγραφο 5.3.1.1, Πίνακας 5.2). Εξαίρεση αποτελεί ο τύπος εδάφους Ε2, ο οποίος αγνοήθηκε στις επιλύσεις που ακολουθούν, καθώς από τα αποτελέσματα των δοκών «απείρου» μήκους που προηγήθηκαν

προέκυψε το συμπέρασμα ότι δεν οδηγεί σε αποτελέσματα πολύ διαφορετικά από το τύπο εδάφους Ε3. Για τα πάχη των ελαστικών υποβάθρων θεωρήθηκαν οι εξής τιμές: H_S=10, 20, 40, 60 μέτρα.

Όσον αφορά την διατομή της δοκού, διατηρήθηκε η ίδια με την περίπτωση των δοκών «απείρου» μήκους (διατομή 0.35x0.70m). Για την επιλογή του μήκους των δοκών λήφθηκε μέριμνα έτσι ώστε να βρίσκεται εντός των ορίων που οριοθετούν τις δοκούς «μέσου» μήκους (Παράγραφος 2.5.3). Η επιλογή αυτή θεωρήθηκε απαραίτητη, καθώς τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την επίλυση δοκών μεγάλου μήκους προσεγγίζουν σε πολύ μεγάλο βαθμό τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την επίλυση των δοκών «απείρου» μήκους. Αντίστοιχα, κρίθηκε σκόπιμο να αποφευχθούν αρχικά τα πολύ μικρά μήκη, καθώς στην περίπτωση αυτή οι δοκοί είναι εξαιρετικά δύσκαμπτες σε σχέση με το έδαφος με αποτέλεσμα να μην είναι σημαντική η παραμόρφωση τους. Έτσι, για τον προσδιορισμό του μήκους έγινε χρήση της σχέσης των Vlasov και Leont'ev (Σχέση 2.134), σύμφωνα με τους οποίους, οι τιμές της παραμέτρου λ που οριοθετούν τις δοκούς «μέσου» μήκους είναι: $0.86<\lambda<1.85$. Όπως γίνεται κατανοητό από την μελέτη της σχέσης αυτής, ο καθορισμός του μήκους της δοκού εξαρτάται και από τα ελαστικά χαρακτηριστικά του εδάφους θεμελίωσης. Επομένως η επιλογή του θα πρέπει να γίνει με τέτοιον τρόπο ώστε η τιμή του λ να βρίσκεται εντός των καθορισμένων ορίων για κάθε μια από τις κατηγορίες εδάφους του Πίνακα 5.2. Όμως από την εφαρμογή της σχέσης 2.134 για τις δεδομένες εδαφικές παραμέτρους, προκύπτει το συμπέρασμα ότι δεν μπορεί να επιλεγεί μια κοινή τιμή μήκους που να ικανοποιεί το κριτήριο $0.86<\lambda<1.85$ για όλες τις εξεταζόμενες κατηγορίες εδάφους. Έτσι για τις κατηγορίες «μαλακών» εδαφών Ε1 και Ε3, επελέγη η τιμή L=10m (για την τιμή αυτή λ=0.94 και λ=1.12 αντίστοιχα), ενώ για τα «σκληρά» εδάφη Ε4, Ε5 επελέγη η τιμή L=6m (για την τιμή αυτή λ=1.10 και λ=1.32 αντίστοιχα).

Οι κάναβοι που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση με τα επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία έχουν τα ίδια ακριβώς χαρακτηριστικά με αυτά που περιγράφηκαν αναλυτικά στην Παράγραφο 5.3.1.1 (Σχήμα 5.5). Όπως και στην περίπτωση των δοκών «απείρου» μήκους, η τιμή της κατακόρυφης φόρτισης δεν είναι ενιαία για όλες τις επιλύσεις, αλλά διαφορετική κατά περίπτωση. Η επιλογή έγινε με κριτήριο την απόδοση λογικών τιμών για την μέγιστη κατακόρυφη μετακίνηση.

Για τις επιλύσεις με το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov και τα προσομοιώματα του Kerr και του Pasternak (προσομοίωμα δυο παραμέτρων χωρίς την επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν) συντάχθηκαν ειδικοί αλγόριθμοι σε γλώσσα Fortran 90. Όσο αναφορά το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov συντάχθηκε ο επαναληπτικός αλγόριθμος **Fi**nite **Be**am on **Mo**dified **V**lasov Model του οποίου τα χαρακτηριστικά είναι όμοια με αυτά που δίνονται στο διάγραμμα ροής του σχήματος 5.4. Αντίστοιχα για τις περιπτώσεις των προσομοιωμάτων δυο και τριών παραμέτρων συντάχθηκαν στα πλαίσια της παρούσας διατριβής οι αλγόριθμοι **Fi**nite **Be**am on **Pa**sternak **M**odel και **Fi**nite **Be**am on **Ke**rr **M**odel, οι οποίοι έχουν την δυνατότητα να επιλύουν τα αντίστοιχα προβλήματα για κάθε δυνατή περίπτωση λύσης της κατά περίπτωση ισχύουσας διαφορικής εξίσωσης (Περιπτώσεις A_1 και B_1 για το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων, και Περιπτώσεις 3 και 5 για το προσομοίωμα των δυο παραμέτρων). Επίσης, παρέχουν τη δυνατότητα επιλογής της θεώρησης ή όχι του εδάφους θεμελίωσης εκατέρωθεν της δοκού, αλλά και της επίλυσης προβλημάτων στα οποία η φόρτιση αποτελείται από συνδυασμό μοναχικών φορτίων και ροπών,

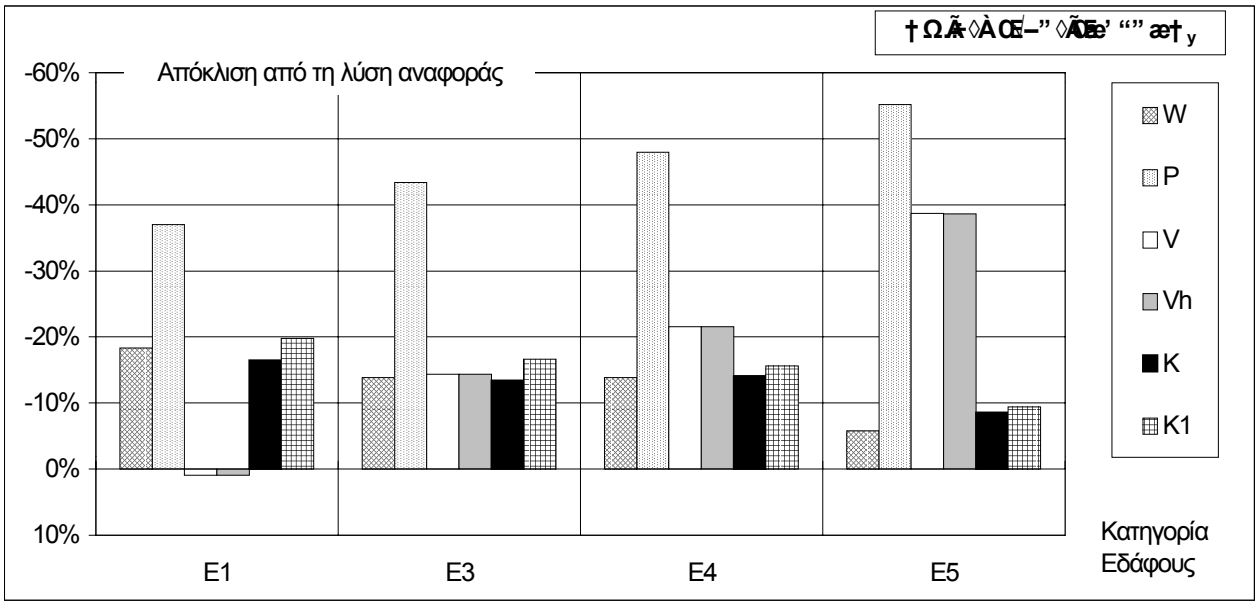
καθώς και τραπεζοειδών φορτίων σε τμήματα του ανοίγματος της δοκού. Θα πρέπει τέλος να τονιστεί ότι οι παραπάνω αλγόριθμοι αποτελούν προγραμματιστική υλοποίηση της μεθόδου των αρχικών παραμέτρων, και των απαιτούμενων για τη χρήση της μεθόδου αυτής μητρώων μεταφοράς.

Πέραν των επιλύσεων που περιγράφηκαν παραπάνω έγιναν και επιλύσεις με το προσομοίωμα του Vlasov με θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου, προκείμενου να γίνει μια αξιολόγηση της επιρροής των οριζοντίων μετακινήσεων και στην περίπτωση δοκών πεπερασμένου μήκους. Κατά τις επιλύσεις αυτές έγινε η παραδοχή, ότι η παράμετρος που διέπει τις κατακόρυφες μετακινήσεις στο εσωτερικό του υποβάθρου γ είναι ίση με την αντίστοιχη παράμετρο που διέπει τις οριζόντιες μετακινήσεις γ_h ($\gamma = \gamma_h$).

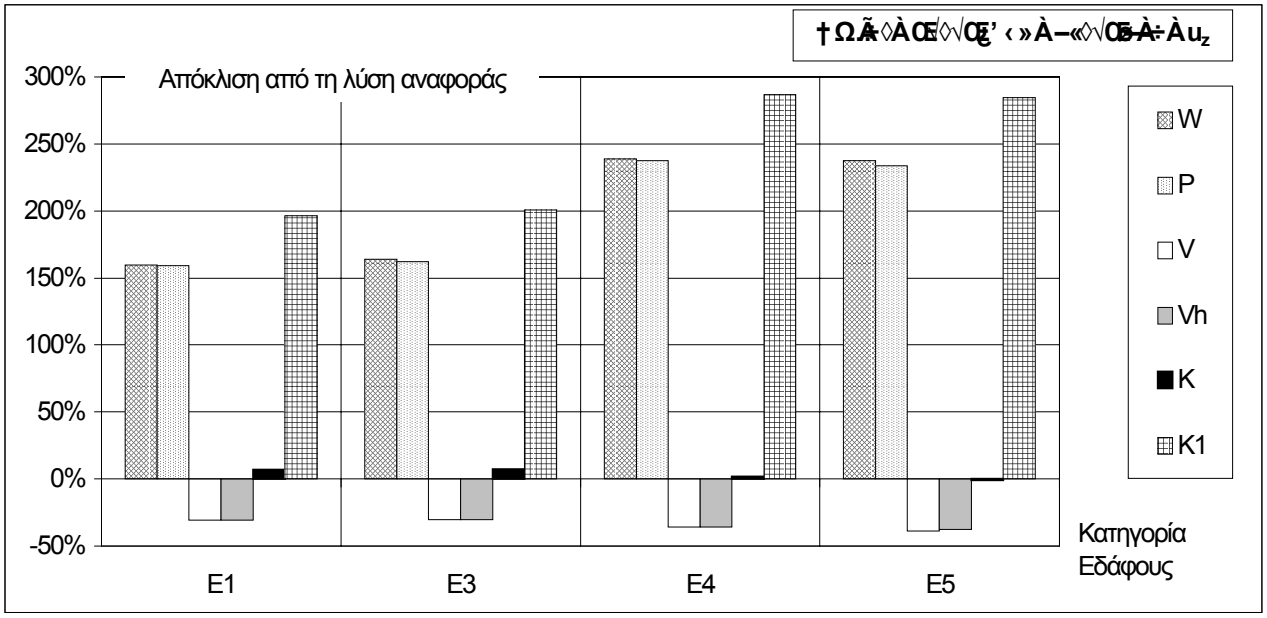
Όσον αφορά τις τιμές των παραμέτρων που απαιτούνται για τις επιλύσεις, ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία όπως και στην περίπτωση των δοκών «απείρου» μήκους. Δηλαδή προηγήθηκε η επίλυση με το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov από την οποία προέκυψαν οι τιμές των παραμέτρων k και G, και ακολούθησε παραμετρική διερεύνηση με στόχο την εξεύρεση του κατά περίπτωση βέλτιστου συντελεστή συσχέτισης των παραμέτρων k και c. Κατά την παραμετρική αυτή διερεύνηση ελέχθησαν σε πρώτο στάδιο οι τιμές του συντελεστή συσχέτισης n_{ck} ($n_{ck}=c/k$) για τις οποίες το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων αποδίδει τα βέλτιστα αποτελέσματα σε σχέση με το προσομοίωμα αναφοράς κατά τις αναλύσεις των δοκών «απείρου» μήκους, τόσο όσο ως προς τις ροπές όσο και προς τις κατακόρυφες μετακινήσεις (υπενθυμίζεται, ότι οι βέλτιστες τιμές για την περίπτωση των δοκών «απείρου» μήκους είναι 7 για τα «μαλακά», και 9 για τα «σκληρά» εδάφη). Σε δεύτερο στάδιο πραγματοποιήθηκε διερεύνηση των βέλτιστων συντελεστών n_{ck} για τις περιπτώσεις κατά τις οποίες οι παραπάνω τιμές εμφανίζονται να είναι ανεπαρκείς για τις δοκούς πεπερασμένου, και πιο συγκεκριμένα μέσου, μήκους. Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της διερεύνησης αυτής, κρίθηκε σκόπιμη η διενέργεια ενός επιπλέον κύκλου αναλύσεων με στόχο την διερεύνηση του βαθμού εξάρτησης των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης με το μήκος της δοκού L, και την τιμή του δείκτη σχετικής δυσκαμψίας εδάφους / δοκού λ.

Τέλος με τις τιμές που προέκυψαν από την εξεταζόμενη μεθοδολογία προσδιορισμού τιμών των εδαφικών παραμέτρων, πραγματοποιήθηκαν και οι προαναφερόμενες αναλύσεις με τα υπόλοιπα προσομοιώματα που παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.23, και ακολούθησαν οι απαιτούμενες συγκρίσεις με τα αποτελέσματα αναφοράς.

Έτσι, στα σχήματα 5.24 – 5.27 παρουσιάζονται οι συγκρίσεις των αποτελεσμάτων των προσομοιωμάτων που ελέχθησαν στα πλαίσια του παραδείγματος. Στα σχήματα αυτά, τα αποτελέσματα που αντιστοιχούν στο προσομοίωμα των τριών παραμέτρων προκύπτουν με χρήση των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης που προέκυψαν από τις αναλύσεις των δοκών «απείρου» μήκους. Στα σχήματα 5.28 – 5.31 δίνονται τα αποτελέσματα της διερεύνησης της δυνατότητας του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων όσον αφορά την ακόμα μεγαλύτερη προσέγγιση των αποτελεσμάτων αναφοράς, με χρήση διαφορετικών τιμών για τον συντελεστή συσχέτισης n_{ck}. Τέλος, στους Πίνακες 5.4α και 5.4β παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της διερεύνησης του βαθμού εξάρτησης των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης, με τον τύπο του εδάφους, το μήκος της δοκού L, και τον συντελεστή σχετικής δυσκαμψίας εδάφους / δοκού λ.

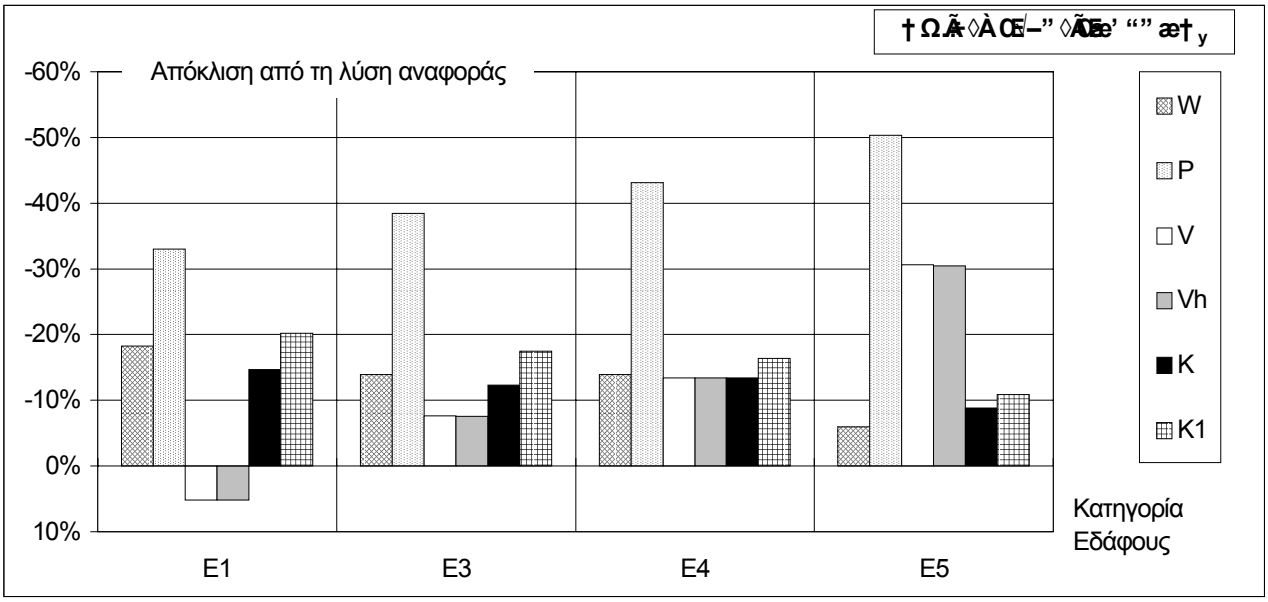


(α)

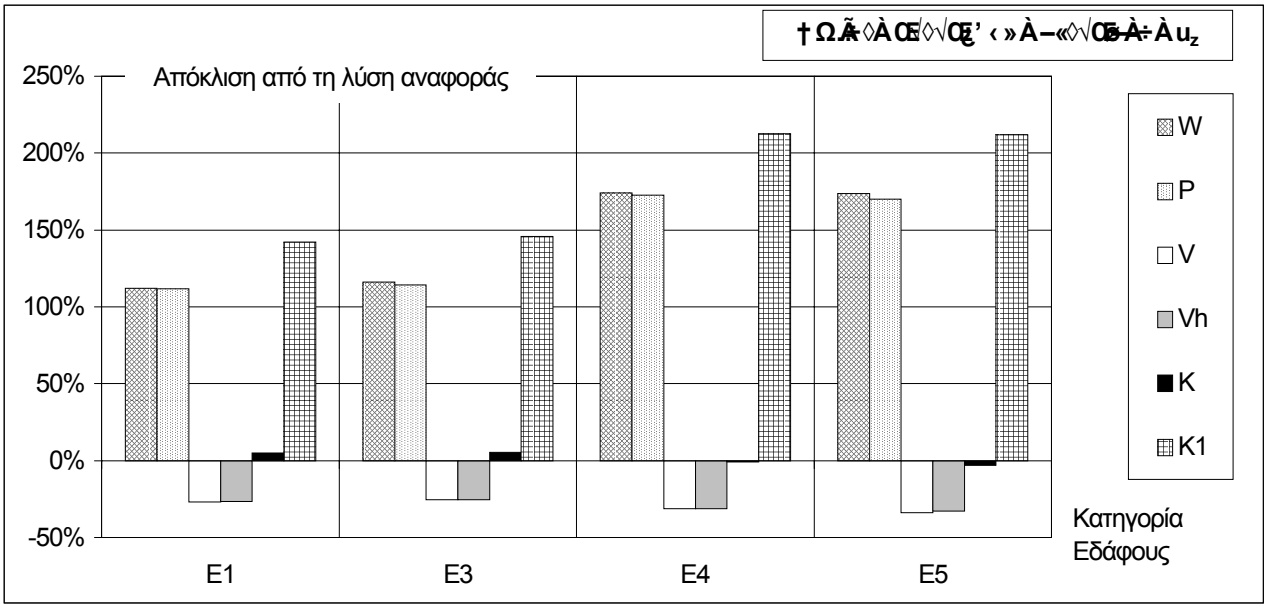


(β)

Σχήμα 5.24. Αποκλίσεις των μέγιστων καμπτικών ροπών M_y (α), και των μέγιστων κατακόρυφων μετακινήσεων u_z (β) των προσομοιωμάτων Winkler (W), Pasternak (P), Vlasov (V), Vlasov με θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου (Vh), Kerr (K) και Kerr χωρίς την θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού (K1), από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

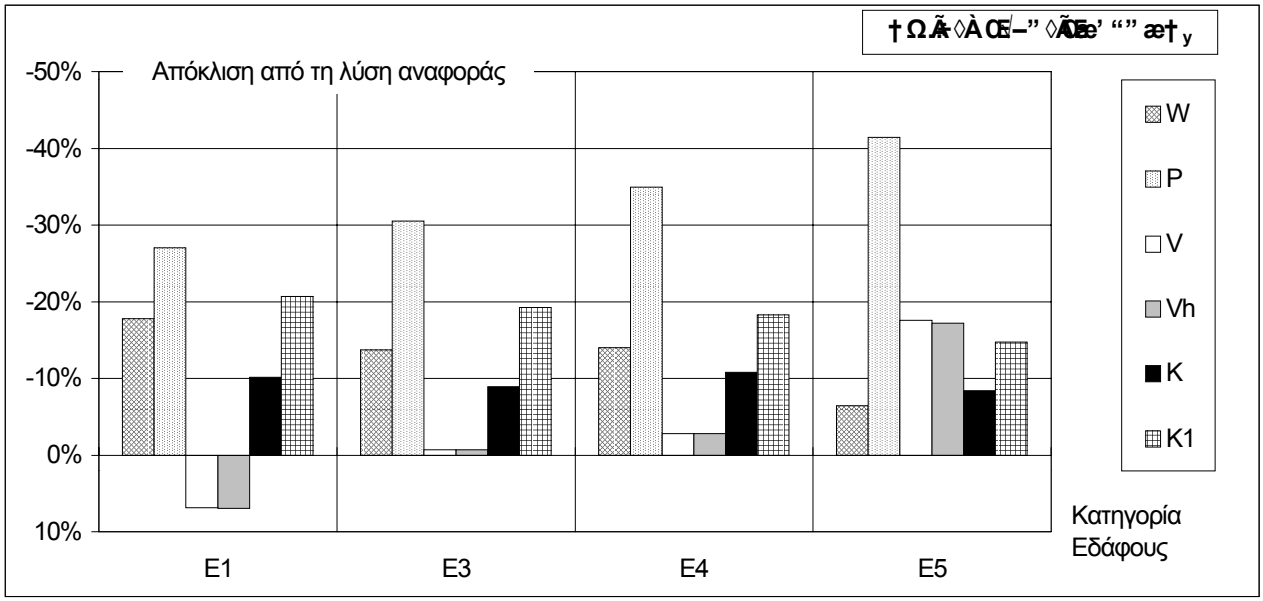


(α)

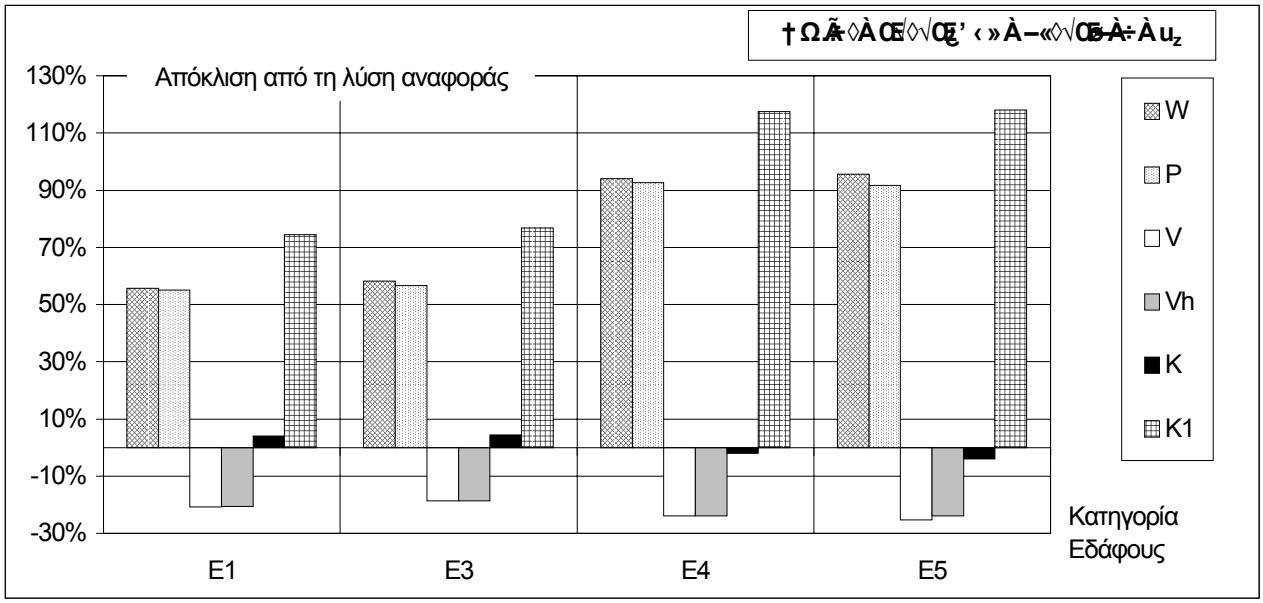


(β)

Σχήμα 5.25. Αποκλίσεις των μέγιστων καμπτικών ροπών M_y (α), και των μέγιστων κατακόρυφων μετακινήσεων u_z (β) των προσομοιωμάτων Winkler (W), Pasternak (P), Vlasov (V), Vlasov με θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου (Vh), Kerr (K) και Kerr χωρίς την θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού (K1), από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=40m.

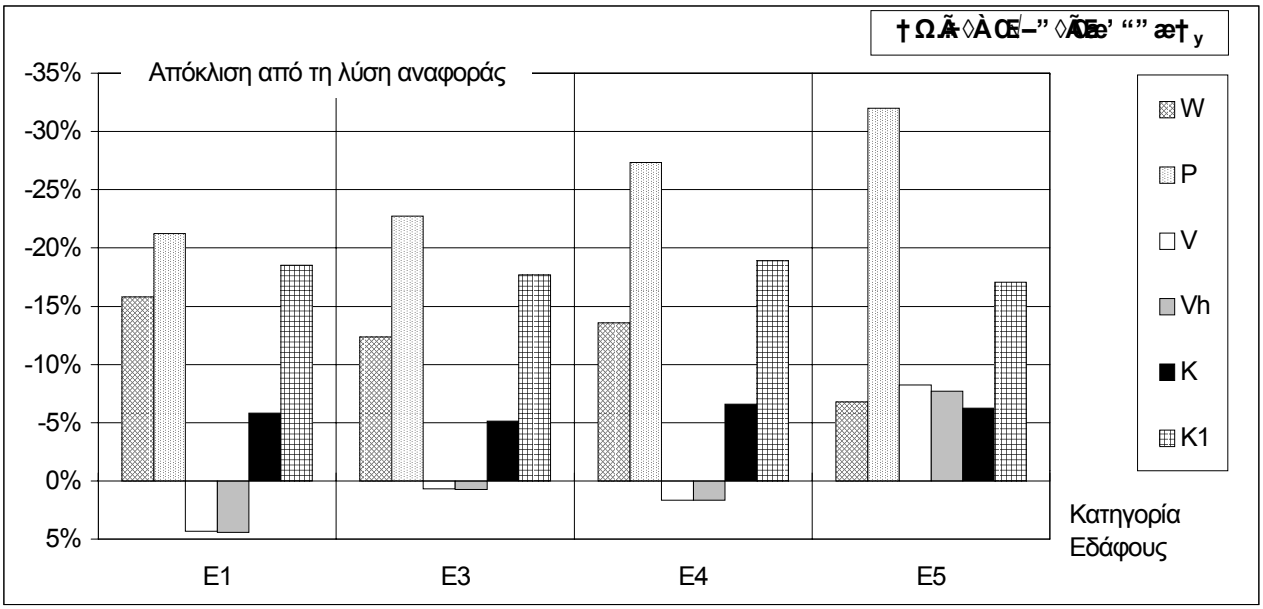


(α)

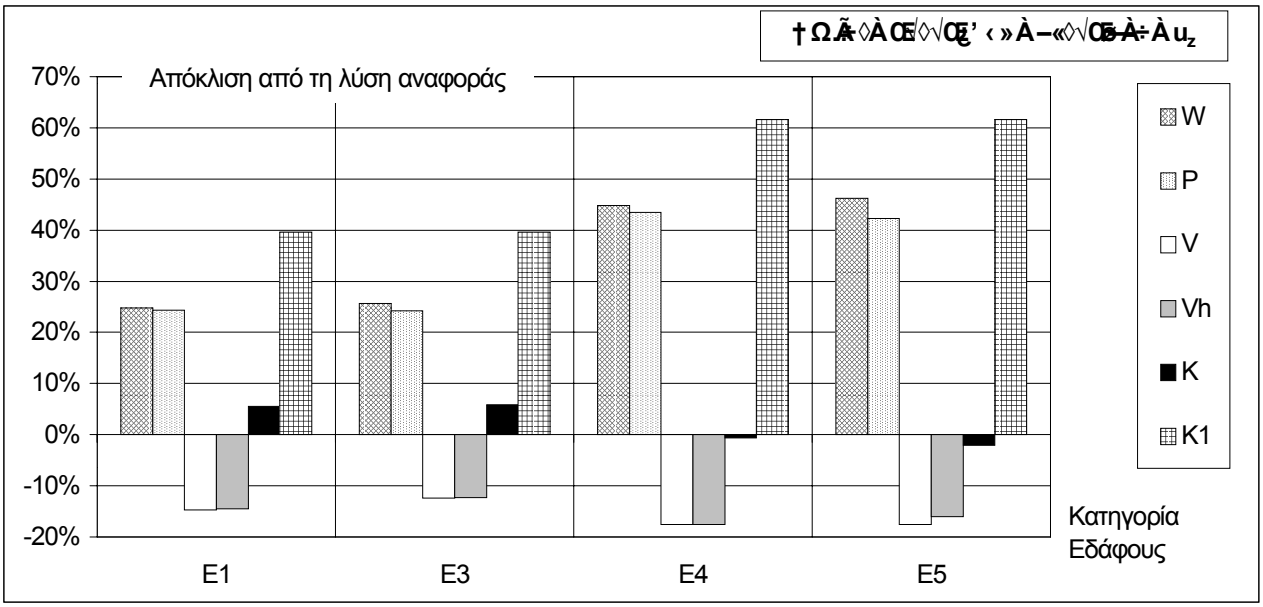


(β)

Σχήμα 5.26. Αποκλίσεις των μέγιστων καμπτικών ροπών M_y (α), και των μέγιστων κατακόρυφων μετακινήσεων u_z (β) των προσομοιωμάτων Winkler (W), Pasternak (P), Vlasov (V), Vlasov με θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου (Vh), Kerr (K) και Kerr χωρίς την θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού (K1), από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=20m.

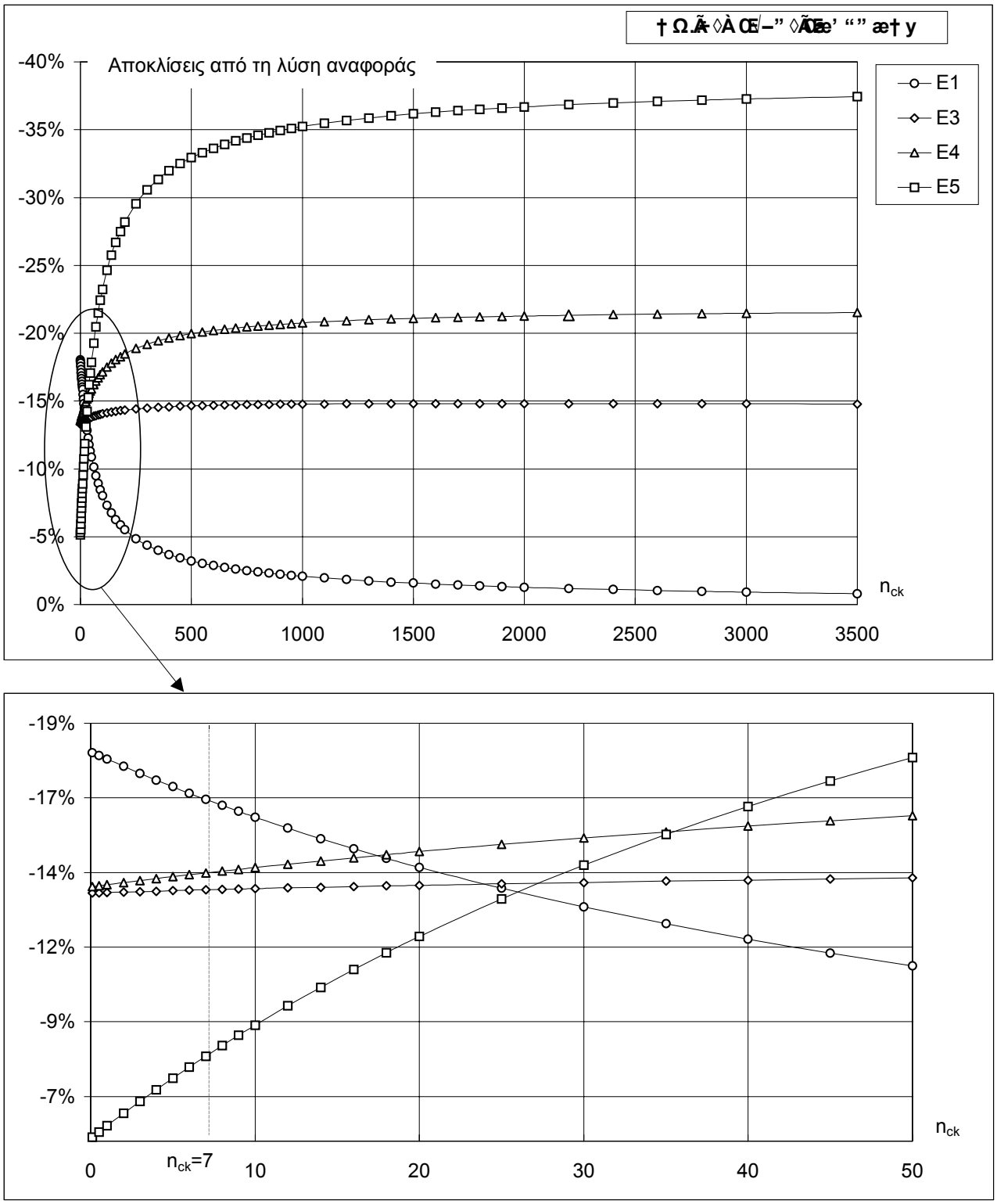


(α)

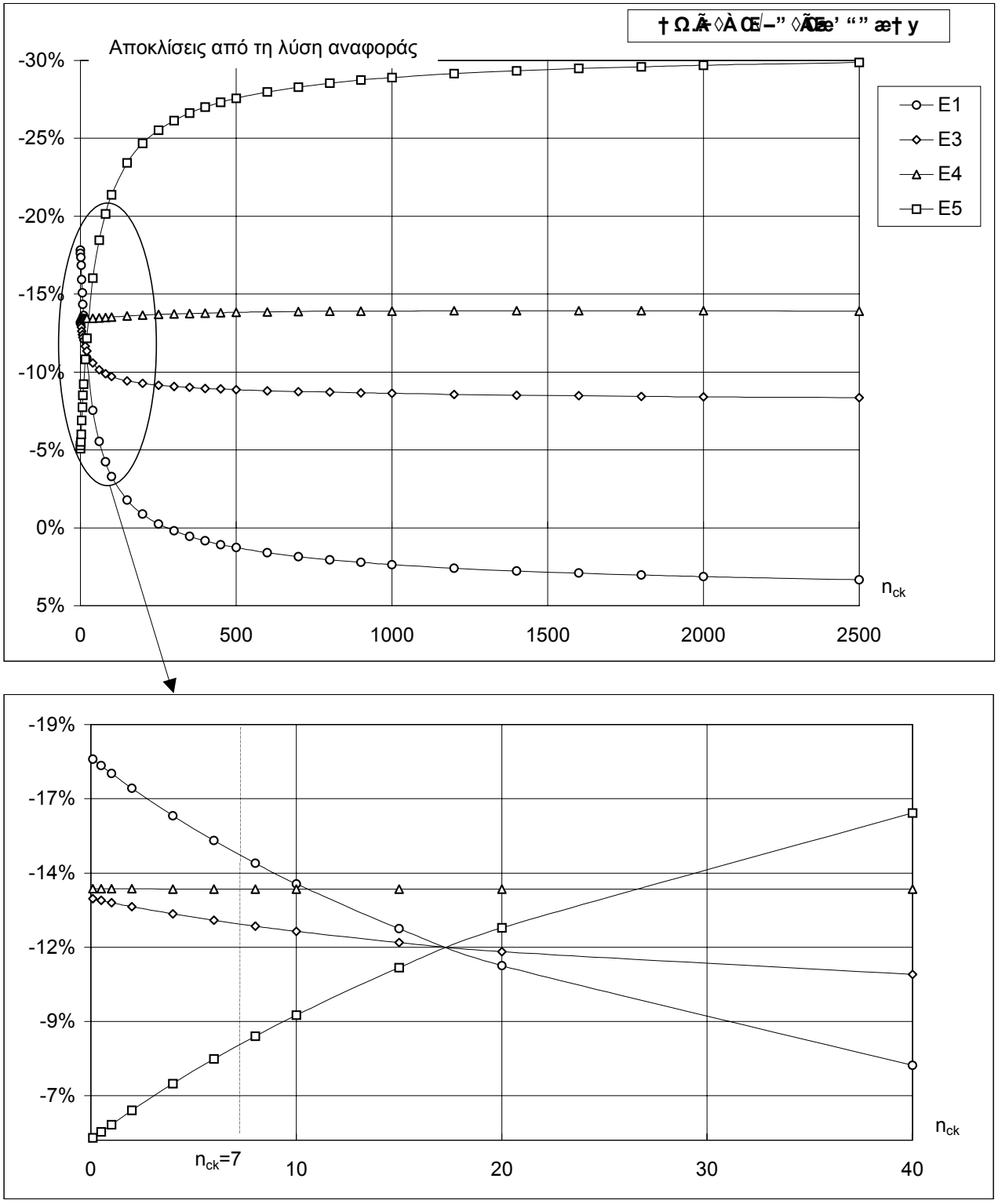


(β)

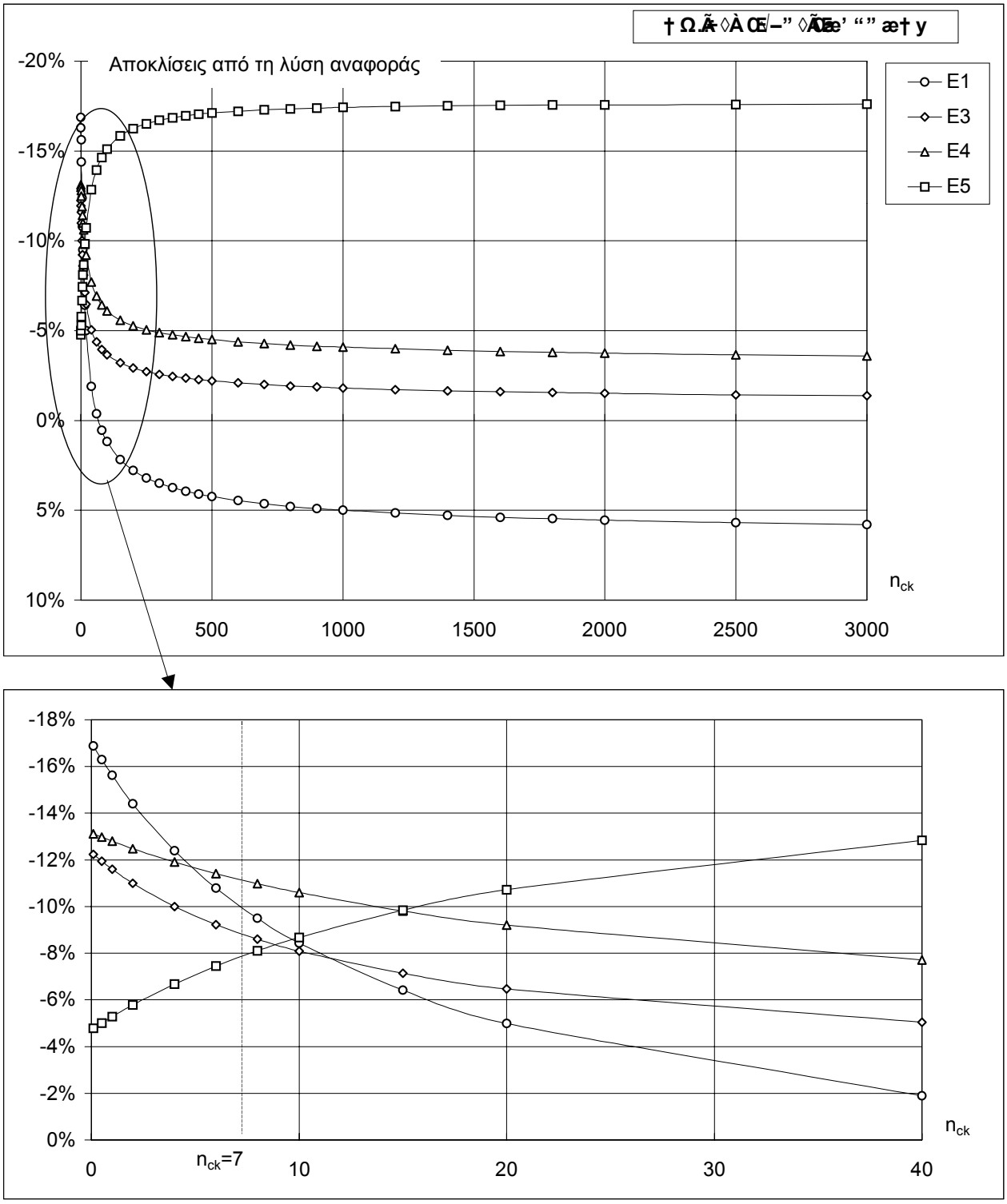
Σχήμα 5.27. Αποκλίσεις των μέγιστων καμπτικών ροπών M_y (α), και των μέγιστων κατακόρυφων μετακινήσεων u_z (β) των προσομοιωμάτων Winkler (W), Pasternak (P), Vlasov (V), Vlasov με θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου (Vh), Kerr (K) και Kerr χωρίς την θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού (K1), από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=10m.



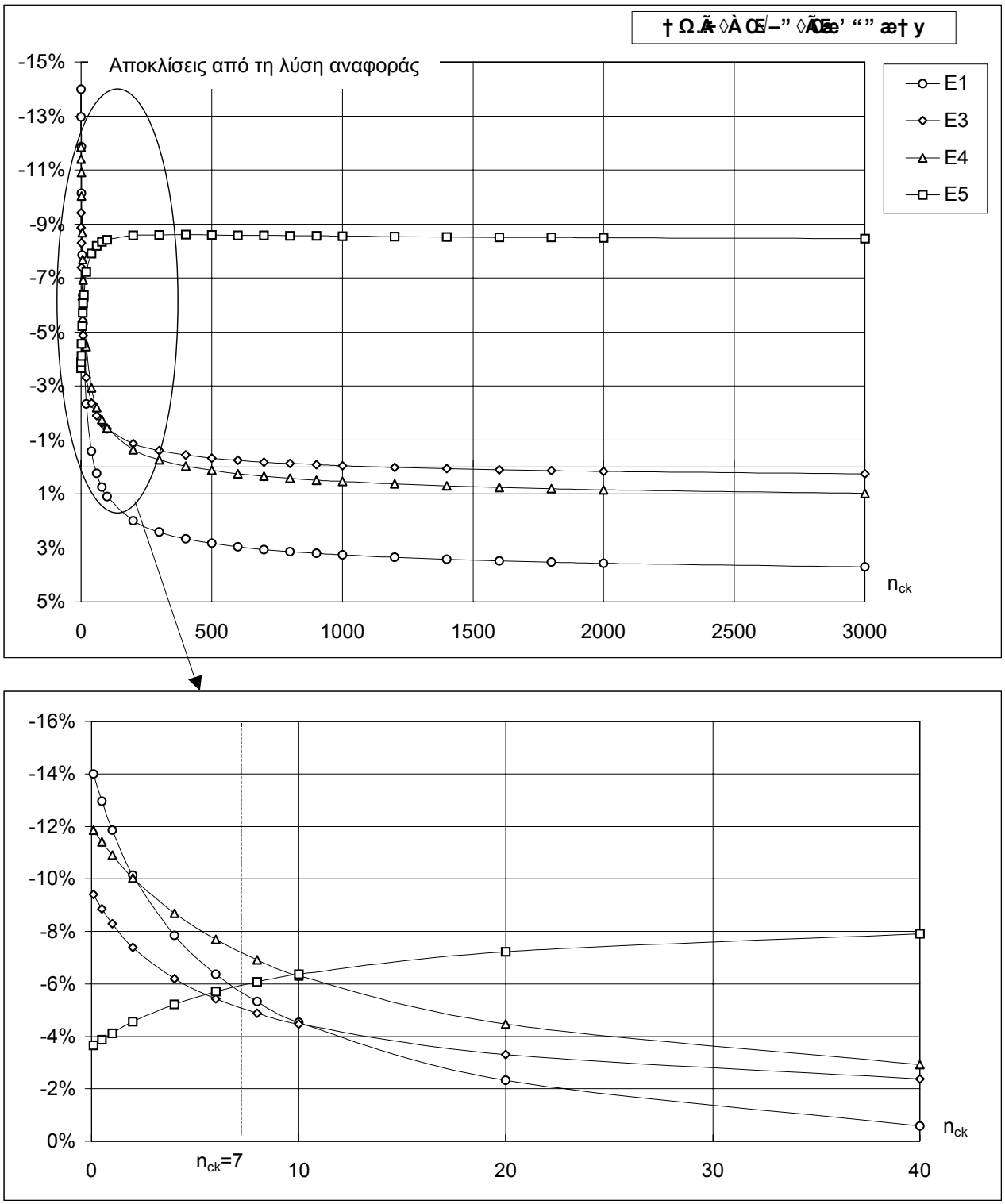
Σχήμα 5.28. Αποκλίσεις των μέγιστων καμπτικών ροπών M_y του προσομοιώματος τριών παραμέτρων του Kerr από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς, για διάφορες τιμές του συντελεστή συσχέτισης n_{ck}. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.



Σχήμα 5.29. Αποκλίσεις των μέγιστων καμπτικών ροπών M_y του προσομοιώματος τριών παραμέτρων του Kerr από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς, για διάφορες τιμές του συντελεστή συσχέτισης n_{ck}. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=40m.



Σχήμα 5.30. Αποκλίσεις των μέγιστων καμπτικών ροπών M_y του προσομοιώματος τριών παραμέτρων του Kerr από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς, για διάφορες τιμές του συντελεστή συσχέτισης n_{ck}. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=20m.



Σχήμα 5.31. Αποκλίσεις των μέγιστων καμπτικών ροπών M_y του προσομοιώματος τριών παραμέτρων του Kerr από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς, για διάφορες τιμές του συντελεστή συσχέτισης n_{ck}. Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=10m.

Από τα σχήματα 5.24 – 5.27 μπορούν να εξαχθούν τα παρακάτω συμπεράσματα σχετικά με την απόδοση των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων.

1. Όσον αφορά την προσέγγιση των κατακορύφων μετακινήσεων:
   - Είναι εμφανής η υπεροχή του προσομοιώματος του Kerr με τη θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού. Τόσο για τα «μαλακά» όσο και για τα «σκληρά» εδάφη, αλλά και για κάθε βάθος του ελαστικού υποστρώματος που εξετάστηκε, το εν λόγω προσομοίωμα αποδίδει μετακινήσεις που σε καμία περίπτωση δεν αποκλίνουν περισσότερο από το 6% από τις λύσεις αναφοράς. Οι αποδόσεις αυτές προκύπτουν για συντελεστή συσχέτισης n_{ck}=7 για τα «μαλακά» εδάφη και n_{ck}=8 μια τα «σκληρά». Ακόμα όμως και αν επιλεγεί η ενιαία τιμή n_{ck}=7 και για τις δυο κατηγορίες εδαφών, η απόκλιση από τις λύσεις αναφοράς δεν υπερβαίνει σε καμία περίπτωση το 10%. Το γεγονός αυτό επεκτείνει το συμπέρασμα ότι η τιμή n_{ck}=7 αποδίδει πολύ ικανοποιητικά – και σε μεγαλύτερο βαθμό από τα υπόλοιπα εξεταζόμενα προσομοιώματα – τις κατακόρυφες μετακινήσεις τόσο στην περίπτωση δοκών «απείρου» και μεγάλου μήκους όσο και στην περίπτωση δοκών μέσου μήκους υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση.
   - Τα προσομοιώματα των Winkler, Pasternak και Kerr χωρίς την επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού αποτυγχάνουν πλήρως στην προσέγγιση των κατακορύφων μετακινήσεων, καθώς αποδίδουν αποτελέσματα που αποκλίνουν από 40% έως 250%. Τα προσομοιώματα του Vlasov με και χωρίς την επιρροή των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου εμφανίζονται ισοδύναμα, και σε κάθε περίπτωση πολύ πιο αποτελεσματικά από τα τρία προαναφερόμενα. Ωστόσο, η απόδοση τους δεν είναι της εφάμιλλη με αυτήν του προσομοιώματος του Kerr, καθώς οι αποκλίσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή τους σε καμία περίπτωση δεν είναι μικρότερες του 10%. Μάλιστα αξίζει να σημειωθεί, ότι τα προσομοιώματα του Vlasov αποδίδουν γενικά μικρότερες μετακινήσεις από το προσομοίωμα αναφοράς όπως και στην περίπτωση των δοκών «απείρου» μήκους.
   - **Από τα προαναφερθέντα συμπεράσματα μπορεί να εξαχθεί η γενικότερης ισχύος παρατήρηση, ότι προκειμένου να επιτευχθεί ικανοποιητική σύγκλιση των τιμών των κατακορύφων μετακινήσεων προς τις αντίστοιχες τιμές αναφοράς, θα πρέπει σε κάθε περίπτωση να λαμβάνεται υπόψη η επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού. Κάτι τέτοιο είναι εφικτό με τα προσομοιώματα του Vlasov και του Kerr. Ωστόσο, η βελτιωμένη εικόνα που παρουσιάζει το προσομοίωμα του Kerr σε σχέση με το προσομοίωμα του Vlasov, θα μπορούσε να εξηγηθεί από τη δυνατότητα του πρώτου να λαμβάνει υπόψη του και τις επιπρόσθετες μετακινήσεις που αναπτύσσονται πολλές φορές εντός της φορτιζόμενης επιφάνειας του εδάφους (η παρατήρηση αυτή έχει επαληθευτεί και από την μελέτη πειραματικών δεδομένων: βλέπε Foppl (1909) και Soldini (1965), καθώς και Σελίδα 72 της παρούσης).**

2. Όσον αφορά την προσέγγιση των μεγίστων καμπτικών ροπών, τα αποτελέσματα δεν είναι τόσο ξεκάθαρα όπως συμβαίνει με την περίπτωση των κατακορύφων μετακινήσεων. Έτσι, τα συμπεράσματα που προέκυψαν θα συνοψιστούν αρχικά στον παρακάτω πίνακα και σε συνδυασμό με τα σχήματα 5.24 – 5.27 θα βοηθήσουν στην διατύπωση των συμπερασμάτων που θα παρουσιαστούν παρακάτω.

Πίνακας 5.3α. Συγκεντρωτικός πίνακας αξιολόγησης της απόδοσης των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων όσον αφορά την προσέγγιση των μέγιστων καμπτικών ροπών.

	Έδαφος E_1	**Έδαφος E_3**	**Έδαφος E_4**	**Έδαφος E_5**
H_S=60m	Vlasov: +0.9% Kerr: -16.45%	Kerr: -13.42% Vlasov: -14.37%	Winkler: -13.85% Kerr: -14.10%	Winkler: -5.76% Kerr: -8.55%
H_S=40m	Vlasov: +5.15% Kerr: -14.70%	Vlasov: +7.62% Kerr: -12.30%	Kerr: -13.45% Vlasov: -13.50%	Winkler: -6.0% Kerr: -8.77%
H_S=20m	Vlasov: +7.0% Kerr: -10.0%	Vlasov: -0.7% Kerr: -8.0%	Vlasov: -3.0% Kerr: -10.8%	Winkler: -7.0% Kerr: -8.40%
H_S=10m	Vlasov: +4.30% Kerr: -5.80%	Vlasov: +0.7% Kerr: -5.13%	Vlasov: +1.6% Kerr: -6.6%	Kerr: -6.0% Winkler: -7.0%

Στον Πίνακα 5.3α, παρουσιάζονται για κάθε μια από τις περιπτώσεις που αναλύθηκαν – δηλαδή για όλους τους συνδυασμούς βάθους H_S και κατηγορίας εδάφους – αφενός οι αποκλίσεις του προσομοιώματος που αποδίδει τα βέλτιστα αποτελέσματα, και αφετέρου οι αντίστοιχες αποκλίσεις του προσομοιώματος του Kerr. Οι τιμές των αποκλίσεων του προσομοιώματος του Kerr προκύπτουν με χρήση της τιμής n_{ck}=7 για τα «μαλακά» εδάφη E1, E3, και n_{ck}=9 για τα «σκληρά» εδάφη E4, E5.

Από τον Πίνακα 5.3α και τα Σχήματα 5.24 – 5.27 προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Τα προσομοιώματα των Vlasov και Kerr εμφανίζονται να αποδίδουν σε γενικές γραμμές τα πιο αξιόπιστα αποτελέσματα στην πλειοψηφία των περιπτώσεων που αντιμετωπίστηκαν.
- Η καλή απόδοση του προσομοιώματος του Vlasov παύει να υφίσταται στην περίπτωση της κατηγορίας εδάφους E5 το μέτρο ελαστικότητας του οποίου είναι το μεγαλύτερο από όλα τα υπόλοιπα εδάφη που εξετάστηκαν. Στην περίπτωση του εδάφους αυτού οι αποκλίσεις του εν λόγω προσομοιώματος είναι σημαντικές καθώς κυμαίνονται από 10% έως 40%.
- Στην περίπτωση της κατηγορίας εδάφους E5 το προσομοίωμα του Winkler αποδίδει τα καλύτερα αποτελέσματα. Ωστόσο και η απόδοση του προσομοιώματος του Kerr δεν υπολείπεται, καθώς οι διαφορές μεταξύ τους είναι ασήμαντες.
- Τα προσομοιώματα του Pasternak και του Kerr χωρίς την θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού, εμφανίζουν τις πιο φτωχές αποδόσεις σε σύγκριση με τα υπόλοιπα προσομοιώματα και επομένως κρίνονται ανεπαρκή για την επίλυση του παρόντος προβλήματος.

Κλείνοντας την αναφορά στα συμπεράσματα των επιλύσεων σχετικά με τις μέγιστες καμπτικές ροπές, θα πρέπει να τονιστεί ότι το προσομοίωμα του Kerr με τη θεώρηση του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού, εμφανίζει γενικά μια σταθερή απόδοση ανεξαρτήτως του τύπου εδάφους

και του βάθους του ελαστικού υποβάθρου, καθώς σε καμία από τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν δεν αποδίδει αποκλίσεις μεγαλύτερες του 15 – 17%. Η υπεροχή του προσομοιώματος του Kerr έναντι των υπολοίπων που ελέχθησαν, έγκειται στο γεγονός ότι δεν υπάρχουν κατηγορίες εδαφών στις οποίες να υστερεί σημαντικά, κάτι που συμβαίνει με όλα τα υπόλοιπα. Έτσι, επί παραδείγματι, το προσομοίωμα του Vlasov το οποίο εμφανίζει πάρα πολύ καλή συμπεριφορά για τις περιπτώσεις των εδαφών Ε1, Ε3, Ε4, εμφανίζει σημαντικές αποκλίσεις – έως και 40% – για την περίπτωση του εδάφους Ε5. Αντίστοιχα το προσομοίωμα του Winkler που εμφανίζεται πολύ αποδοτικό στην περίπτωση του εδάφους Ε5 δεν είναι εξίσου αποδοτικό στις υπόλοιπες κατηγορίες.

Όλα τα συμπεράσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω, όσον αφορά το προσομοίωμα του Kerr, προκύπτουν από την χρήση συγκεκριμένων συντελεστών συσχέτισης μεταξύ των παραμέτρων k και c (n_{ck}=7 για τα εδάφη Ε1, Ε3, και n_{ck}=9 για τα εδάφη Ε4, Ε5). Κάνοντας μια σύγκριση των προσεγγίσεων που επιτυγχάνονται με τους συντελεστές αυτούς στην περίπτωση της κάμψης δοκών «απείρου» μήκους με τις αντίστοιχες προσεγγίσεις κατά την περίπτωση της μελέτης της κάμψης δοκών μέσου μήκους, οι τελευταίες εμφανίζονται να είναι μικρές και αποδεκτές μεν, αλλά όχι ανάλογες των πρώτων. Το γεγονός αυτό οδήγησε στο προβληματισμό του αν υπάρχουν ή όχι κάποιες άλλες τιμές των συντελεστών συσχέτισης που να επιτυγχάνουν ακόμα μεγαλύτερη σύγκλιση προς τις λύσεις αναφοράς. Για το σκοπό αυτό έγινε ένας μεγάλος αριθμός παραμετρικών αναλύσεων που παρουσιάζονται στα Σχήματα 5.28 – 5.31. Οι αναλύσεις αυτές είναι ανάλογες αυτών που έγιναν για την περίπτωση των δοκών «απείρου» μήκους (Σχήματα 5.6 – 5.13), με τη διαφορά ότι το εύρος των τιμών του συντελεστή συσχέτισης που ελέγχθηκε στην παρούσα περίπτωση είναι πολύ μεγαλύτερο.

Από τα σχήματα 5.28 – 5.31 μπορούν να εξαχθούν κατ' αρχάς κάποια συμπεράσματα για την «αριθμητική» συμπεριφορά του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων, σε συνδυασμό με κάποια συμπεράσματα για τα όρια δυνατοτήτων της εξεταζόμενης μεθοδολογίας προσδιορισμού των παραμέτρων του προσομοιώματος. Τα συμπεράσματα αυτά είναι τα εξής:

- Η δυνατότητα της μεθοδολογίας προσδιορισμού των εδαφικών παραμέτρων στο υπολογισμό τιμών που οδηγούν στην βέλτιστη σύγκλιση των τιμών των καμπτικών ροπών προς τις τιμές αναφοράς, εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό τόσο από τις ελαστικές σταθερές του εδαφικού υλικού, όσο και από το βάθος του ελαστικού υποβάθρου.
- Στην περίπτωση του εδάφους Ε5 – το οποίο είναι και το πιο «σκληρό» από όσα μελετήθηκαν – η μεθοδολογία προσδιορισμού των εδαφικών παραμέτρων δεν έχει τη δυνατότητα υπολογισμού τιμών που οδηγούν σε πλήρη σύγκλιση στη λύση αναφοράς, ανεξαρτήτως του βάθους του ελαστικού υποβάθρου.
- Για τις υπόλοιπες κατηγορίες εδάφους υπάρχει δυνατότητα σύγκλισης προς την ακριβή λύση. Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό ότι όσο μικραίνει το βάθος του ελαστικού υποβάθρου τόσο αυξάνει ο αριθμός των τύπων εδάφους για τις οποίες υπάρχει δυνατότητα πλήρους σύγκλισης, ενώ ταυτόχρονα μειώνονται οι τιμές του συντελεστή συσχέτισης για τις οποίες επιτυγχάνεται η σύγκλιση αυτή. Οι παρατηρήσεις αυτές μπορούν να συνοψιστούν στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 5.3β. Έλεγχος της μεθοδολογίας προσδιορισμού των εδαφικών παραμέτρων, όσον αφορά τη σύγκλιση των τιμών των μεγίστων καμπτικών ροπών που προκύπτουν από το προσομοίωμα του Kerr προς τις τιμές αναφοράς, και οι αντίστοιχοι συντελεστές συσχέτισης όπου ορίζονται.

	Έδαφος E_1		**Έδαφος E_3**		**Έδαφος E_4**		**Έδαφος E_5**	
	Σύγκλιση	n_{ck}	Σύγκλιση	n_{ck}	Σύγκλιση	n_{ck}	Σύγκλιση	n_{ck}
H_S=60m	ΝΑΙ	$1.35*10^4$	ΟΧΙ	-	ΟΧΙ	-	ΟΧΙ	-
H_S=40m	ΝΑΙ	275	ΟΧΙ	-	ΟΧΙ	-	ΟΧΙ	-
H_S=20m	ΝΑΙ	70	ΟΧΙ	-	ΟΧΙ	-	ΟΧΙ	-
H_S=10m	ΝΑΙ	50	ΝΑΙ	1150	ΝΑΙ	410	ΟΧΙ	-

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει το συμπέρασμα ότι η μεθοδολογία προσδιορισμού των τιμών των εδαφικών παραμέτρων έχει τη δυνατότητα της μέγιστης δυνατής προσέγγισης στην λύση αναφοράς κατά κανόνα στην περίπτωση των «μαλακών» εδαφών για μεγάλες τιμές των συντελεστών n_{ck}. Ωστόσο, όσο μειώνεται το βάθος του ελαστικού υποβάθρου παρατηρείται σύγκλιση και για σκληρότερα εδάφη. Οι παρατηρήσεις αυτές δεν ακυρώνουν σε καμία περίπτωση τα θετικά συμπεράσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω, καθώς ακόμα και στις περιπτώσεις που είναι αδύνατη η μέγιστη προσέγγιση προς τις «ακριβείς» τιμές, η μεθοδολογία προσδιορισμού των εδαφικών παραμέτρων αποδίδει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα και για χαμηλές τιμές των συντελεστών συσχέτισης, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 5.3α.

Κλείνοντας την αναφορά στα συμπεράσματα των επιλύσεων των δοκών «μέσου» μήκους υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση θα πρέπει επισημανθούν τα εξής:

- **Το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων σε συνδυασμό με την χρησιμοποιούμενη μεθοδολογία προσδιορισμού των τιμών των παραμέτρων του, επιτυγχάνει πολύ σημαντική προσέγγιση των κατακορύφων μετακινήσεων για τιμές του συντελεστή συσχέτισης n_{ck}=7 για τα «μαλακά» εδάφη και n_{ck}=8 μια τα «σκληρά». Για τις τιμές αυτές οι αποκλίσεις δεν ξεπερνούν το 6%.**
- **Για τις καμπτικές ροπές οι αντίστοιχες αποκλίσεις για τους δεδομένους συντελεστές συσχέτισης είναι μεγαλύτερες. Ωστόσο, αν συγκριθούν με τις αποκλίσεις των άλλων προσομοιωμάτων, προκύπτει το συμπέρασμα ότι το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων παρουσιάζει μια σταθερή απόδοση για κάθε εξεταζόμενη περίπτωση και δεν εμφανίζει τις σημαντικές αποκλίσεις που κατά περίπτωση είναι πιθανό να εμφανίσουν τα υπόλοιπα προσομοιώματα.**

Τα παραπάνω συμπεράσματα προέκυψαν από την επίλυση δοκών οι οποίες έχουν τιμές σχετικής δυσκαμψίας λ περίπου ίσες ή λίγο μεγαλύτερες της μονάδας. Η ισχύς των συμπερασμάτων αυτών και για την περίπτωση δοκών με μικρότερες ή μεγαλύτερες τιμές του λ ελέγχεται παρακάτω.

Συσχετισμός των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης με το μήκος της δοκού L και το δείκτη της σχετικής δυσκαμψίας εδάφους / δοκού λ..

Τα αποτελέσματα των διερευνήσεων για τους δείκτες συσχέτισης n_{ck} που αποδίδουν τα βέλτιστα αποτελέσματα όσον αφορά τις καμπτικές ροπές, καθώς και το γεγονός ότι οι τιμές που αποδείχθηκαν βέλτιστες στην περίπτωση της μελέτης δοκών «απείρου» μήκους δεν έχουν την ίδια απόδοση και στην

περίπτωση των δοκών μέσου μήκους, οδήγησε στην διενέργεια περαιτέρω αναλύσεων με στόχο την αναζήτηση του βαθμού συσχέτισης των βέλτιστων συντελεστών n_{ck} με το μήκος της δοκού L και τον συντελεστή λ. Για τον σκοπό αυτό πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις για όλες τις κατηγορίες εδάφους (E1, E3, E4, E5) και για μήκη δοκών από 2 έως και 25 μέτρα, με βήμα αύξησης κατά κανόνα το ένα μέτρο, και όπου κρίθηκε σκόπιμο με μείωση του βήματος στο μισό μέτρο. Έτσι καλύφθηκε και η περίπτωση δοκών που με βάση την τιμή του συντελεστή λ κατατάσσονται στις πρακτικώς άκαμπτες δοκούς. Η διερεύνηση έγινε για βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60 μέτρα. Στις αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν εξαιρέθηκαν τα προσομοιώματα του Kerr χωρίς τη θεώρηση του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού, καθώς και το προσομοίωμα του Vlasov με θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου.

Στους Πίνακες 5.4α και 5.4β παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα των παραμετρικών διερευνήσεων για τις τέσσερις κατηγορίες εδάφους που εξετάστηκαν. Από τους πίνακες αυτούς προκύπτει το γενικό συμπέρασμα ότι το πεδίο τιμών των συντελεστών σχετικής δυσκαμψίας εδάφους / δοκού λ μπορεί να χωριστεί σε πέντε πεδία εντός των οποίων οι τιμές των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης n_{ck} παρουσιάζουν διαφορετικό τρόπο μεταβολής. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει και για τις τέσσερις κατηγορίες εδαφών που μελετήθηκαν. Ωστόσο ελαφρές διαφοροποιήσεις παρατηρούνται μεταξύ των εδαφών με χαμηλό μέτρο ελαστικότητας («μαλακά» εδάφη E1, E3), και των εδαφών με σχετικά μεγάλο μέτρο ελαστικότητας («σκληρά» εδάφη E4, E5).

Για τα «μαλακά» εδάφη E1 και E3 τα πεδία τιμών του συντελεστή λ δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Περιοχή	**Όρια**	**Παρατηρήσεις**
1	$\lambda \leq 0.6 - 0.65$	Σύγκλιση για τιμές του n_{ck} που παρουσιάζουν φθίνουσα πορεία
2	$0.6 - 0.65 \leq \lambda \leq 0.9 - 0.95$	Σύγκλιση για τιμές του n_{ck} που παρουσιάζουν αύξουσα πορεία
3	$0.9 - 0.95 \leq \lambda \leq 1.1 - 1.2$	Δεν επιτυγχάνεται σύγκλιση. Ωστόσο για τιμές του $n_{ck} \approx 10^4$ επιτυγχάνονται αποκλίσεις μικρότερες του 10%
4	$1.1 - 1.2 \leq \lambda \leq 1.65 - 1.7$	Δεν επιτυγχάνεται σύγκλιση. Ωστόσο για τιμές του $n_{ck} \approx 7$ επιτυγχάνονται αποκλίσεις μικρότερες του 10% - 15%
5	$\lambda \geq 1.65 - 1.7$	Επιτυγχάνεται σύγκλιση. Για τιμές του $n_{ck} \approx 7 - 9$ επιτυγχάνονται αποκλίσεις μικρότερες του 4%

Αντίστοιχα, για τα «σκληρά» εδάφη E4 και E5 τα πεδία τιμών του συντελεστή λ είναι τα εξής:

Περιοχή	**Όρια**	**Παρατηρήσεις**
1	$\lambda \leq 0.55 - 0.6$	Σύγκλιση για τιμές του n_{ck} που παρουσιάζουν φθίνουσα πορεία
2	$0.55 - 0.6 \leq \lambda \leq 0.7$	Σύγκλιση για τιμές του n_{ck} που παρουσιάζουν αύξουσα πορεία
3	$0.7 \leq \lambda \leq 0.9 - 0.95$	Δεν επιτυγχάνεται σύγκλιση. Ωστόσο για τιμές του $n_{ck} \approx 10^4$ επιτυγχάνονται αποκλίσεις μικρότερες του 15%
4	$0.9 - 0.95 \leq \lambda \leq 1.65 - 1.6$	Δεν επιτυγχάνεται σύγκλιση. Ωστόσο για τιμές του $n_{ck} \approx 9$ επιτυγχάνονται αποκλίσεις μικρότερες του 15%
5	$\lambda \geq 1.55 - 1.6$	Επιτυγχάνεται σύγκλιση. Για τιμές του $n_{ck} \approx 9 - 13$ επιτυγχάνονται αποκλίσεις μικρότερες του 4%

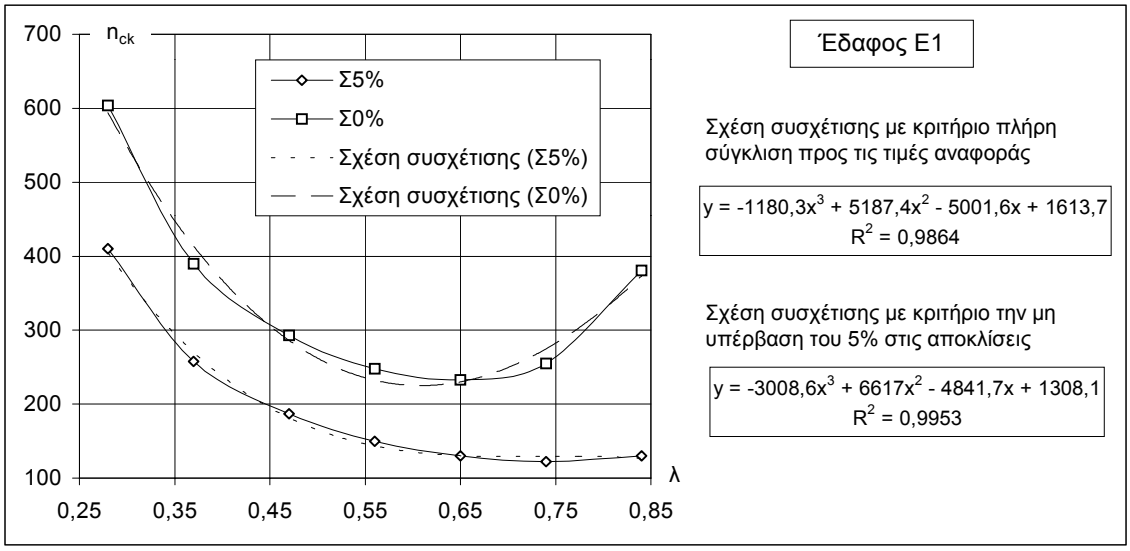
Πίνακας 5.4α Διερεύνηση των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης n_{ck} για διάφορες τιμές του συντελεστή σχετικής δυσκαμψίας εδάφους / δοκού λ. Περίπτωση «μαλακών» εδαφών (Εδάφη Ε1 και Ε3).

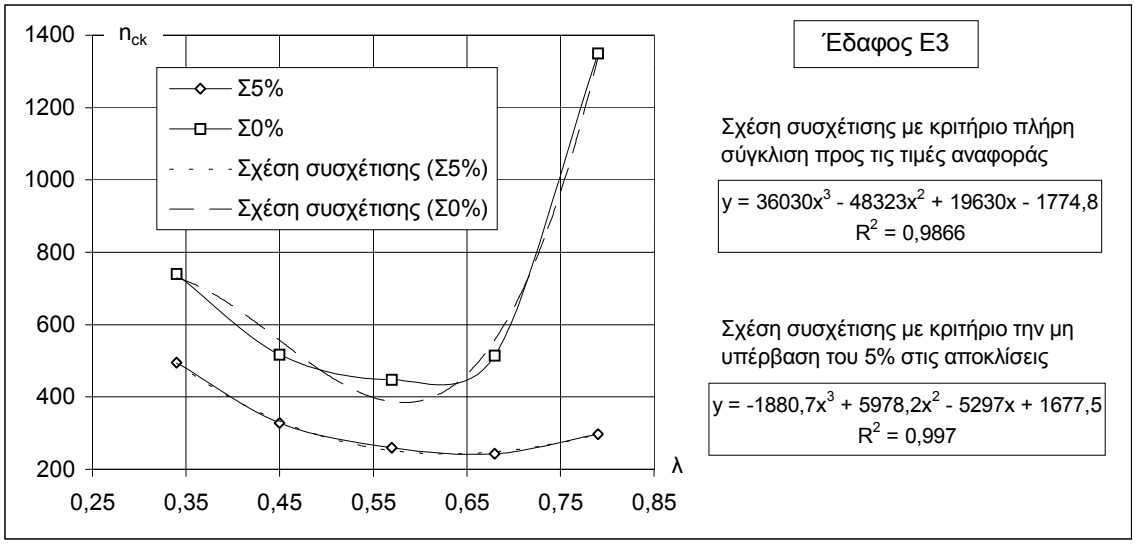
Άργιλος Μέσης Σκληρότητας (Ε1)								
Μήκος L	λ	FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	KERR	n_{ck}	Σύγκλιση
			Απόκλιση από FEM					
3	0,28	73,76	-23,74%	-25,71%	39,84%	0,00%	604	ΝΑΙ
4	0,37	97,36	-22,97%	-26,55%	35,50%	0,00%	390	ΝΑΙ
5	0,47	120,63	-22,30%	-27,88%	30,24%	-0,01%	293	ΝΑΙ
6	0,56	143,41	-21,59%	-29,50%	24,49%	0,03%	248	ΝΑΙ
7	0,65	165,53	-20,77%	-31,26%	18,58%	0,00%	233	ΝΑΙ
8	0,74	186,81	-19,82%	-33,03%	12,76%	0,00%	255	ΝΑΙ
9	0,84	207,14	-18,71%	-34,75%	7,17%	0,00%	381	ΝΑΙ
10	0,94	228,78	-18,32%	-37,02%	0,89%	0,00%	1,35E+04	ΝΑΙ
11	1,02	245,44	-16,37%	-38,06%	-3,22%	-3,74%	2,00E+04	ΟΧΙ
12	1,12	260,85	-14,33%	-38,99%	-7,01%	-7,30%	3,00E+04	ΟΧΙ
13	1,21	274,93	-12,16%	-39,78%	-10,42%	-10,65%	2,00E+04	ΟΧΙ
14	1,3	287,36	-9,78%	-40,36%	-13,35%	-9,59%	<7	ΟΧΙ
15	1,4	298,09	-7,18%	-40,73%	-15,83%	-7,97%	<7	ΟΧΙ
16	1,49	307,18	-4,37%	-40,91%	-17,90%	-6,43%	<7	ΟΧΙ
17	1,58	314,72	-1,39%	-40,90%	-19,59%	-4,98%	<7	ΟΧΙ
18	1,68	320,83	1,75%	-40,73%	-20,96%	-3,65%	<7	ΟΧΙ
19	1,77	325,72	4,97%	-40,44%	-22,06%	-2,48%	<7	ΝΑΙ
20	1,86	329,85	8,14%	-40,10%	-23,00%	-1,57%	<7	ΝΑΙ
21,5	2	333,04	13,34%	-39,20%	-23,76%	-0,14%	7	ΝΑΙ
23	2,14	334,76	18,38%	-38,18%	-24,21%	0,90%	7	ΝΑΙ
24,5	2,28	335,30	23,17%	-37,08%	-24,43%	1,61%	>7	ΝΑΙ
Χαλαρή Άμμος (Ε3)								
Μήκος L	λ	FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	KERR	n_{ck}	Σύγκλιση
			Απόκλιση από FEM					
3	0,34	122,81	-23,67%	-27,57%	35,56%	-0,04%	740	ΝΑΙ
4	0,45	161,69	-22,70%	-29,59%	28,37%	-0,01%	517	ΝΑΙ
5	0,57	199,54	-21,73%	-32,10%	20,26%	-0,01%	448	ΝΑΙ
6	0,68	235,91	-20,59%	-34,75%	12,07%	0,03%	515	ΝΑΙ
7	0,79	270,28	-19,19%	-37,26%	4,37%	-0,03%	1350	ΝΑΙ
8	0,9	302,18	-17,48%	-39,48%	-2,54%	-3,57%	1,00E+04	ΟΧΙ
9	1,02	331,29	-15,45%	-41,35%	-8,53%	-9,13%	1,00E+04	ΟΧΙ
10	1,13	360,48	-13,84%	-43,34%	-14,37%	-13,42%	<7	ΟΧΙ
11	1,24	381,34	-10,65%	-44,14%	-18,08%	-10,95%	<7	ΟΧΙ
12	1,36	399,09	-7,20%	-44,66%	-21,14%	-8,56%	<7	ΟΧΙ
13	1,47	413,85	-3,51%	-44,93%	-23,61%	-6,31%	<7	ΟΧΙ
14	1,58	425,49	0,49%	-44,93%	-25,52%	-4,18%	<7	ΟΧΙ
15	1,7	434,28	4,75%	-44,70%	-26,94%	-2,22%	<7	ΝΑΙ
16	1,81	440,60	9,19%	-44,27%	-27,96%	-0,47%	<7	ΝΑΙ
17	1,92	444,87	13,75%	-43,69%	-28,66%	-0,46%	8	ΝΑΙ
18	2,04	447,48	18,33%	-43,00%	-29,11%	0,53%	8	ΝΑΙ
19	2,15	448,81	22,85%	-42,23%	-29,36%	-0,43%	9	ΝΑΙ
20	2,26	449,10	27,25%	-41,40%	-29,46%	-0,03%	9	ΝΑΙ

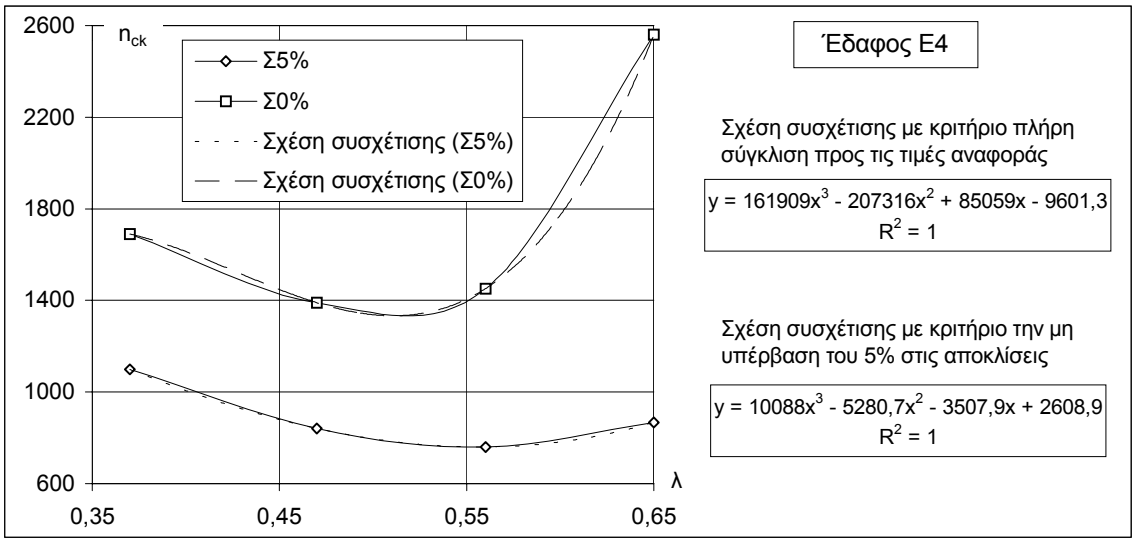
Πίνακας 5.4β Διερεύνηση των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης n_{ck} για διάφορες τιμές του συντελεστή σχετικής δυσκαμψίας εδάφους / δοκού λ. Περίπτωση «σκληρών» εδαφών (Εδάφη Ε4 και Ε5).

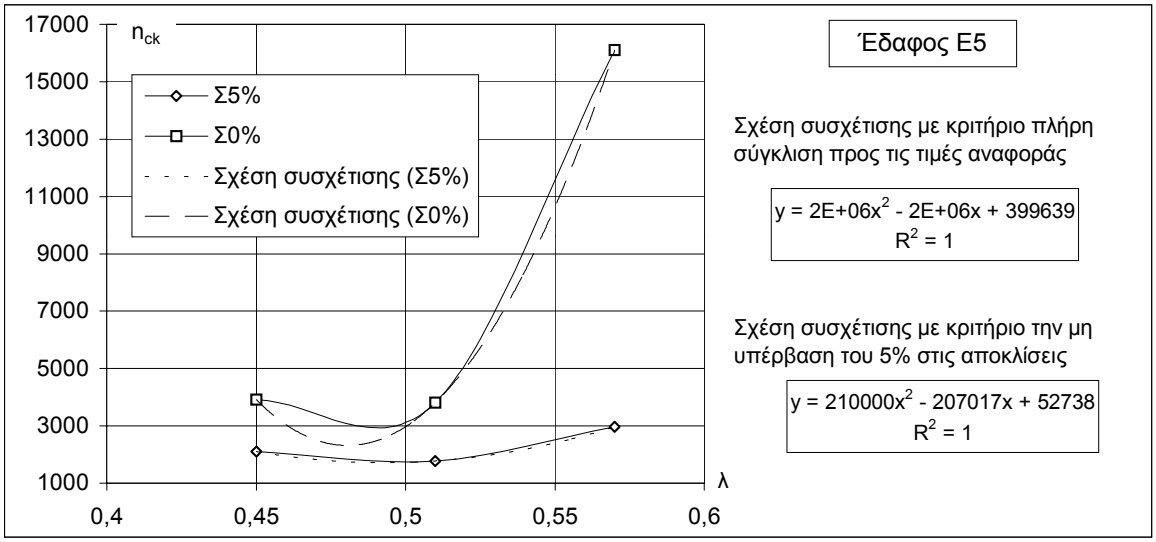
Πυκνή Άμμος (Ε4)								
Μήκος L	λ	FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	KERR	n_{ck}	Σύγκλιση
			Απόκλιση από FEM					
2	0,37	165,79	-24,61%	-30,91%	29,35%	0,01%	1690	ΝΑΙ
2,5	0,47	204,62	-23,65%	-33,20%	22,14%	0,01%	1390	ΝΑΙ
3	0,56	242,52	-22,71%	-35,79%	14,40%	0,00%	1451	ΝΑΙ
3,5	0,65	279,23	-21,69%	-38,42%	6,74%	-0,01%	2560	ΝΑΙ
4	0,74	314,42	-20,55%	-40,90%	-0,43%	-2,56%	1,00E+04	ΟΧΙ
4,5	0,84	347,75	-19,22%	-43,13%	-6,90%	-8,16%	1,00E+04	ΟΧΙ
5	0,93	378,9	-17,67%	-45,06%	-12,57%	-13,27%	1,00E+04	ΟΧΙ
6	1,12	433,66	-13,85%	-47,99%	-21,60%	-14,10%	9	ΟΧΙ
7	1,3	477,27	-8,96%	-49,77%	-27,95%	-10,56%	9	ΟΧΙ
8	1,49	509,57	-3,02%	-50,61%	-32,20%	-6,93%	9	ΟΧΙ
9	1,67	531,63	3,85%	-50,72%	-34,91%	-0,02%	5	ΝΑΙ
10	1,86	546,47	11,19%	-50,43%	-36,67%	0,33%	8	ΝΑΙ
11	2,05	552,21	19,52%	-49,54%	-37,35%	0,16%	10	ΝΑΙ
12	2,23	554,26	27,83%	-48,49%	-37,62%	-0,13%	11	ΝΑΙ
13	2,42	553,75	35,87%	-47,37%	-37,60%	0,37%	11	ΝΑΙ
14	2,61	551,82	43,35%	-46,23%	-37,41%	0,48%	11	ΝΑΙ
15	2,8	549,29	49,99%	-45,14%	-37,16%	0,35%	11	ΝΑΙ
Αμμοχάλικο (Ε5)								
Μήκος L	λ	FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	KERR	n_{ck}	Σύγκλιση
			Απόκλιση από FEM					
2	0,45	165,4	-24,43%	-36,84%	14,74%	0,00%	3920	ΝΑΙ
2,25	0,51	181,4	-22,49%	-37,75%	11,00%	0,00%	3815	ΝΑΙ
2,5	0,57	203,14	-23,10%	-40,71%	3,69%	0,00%	16100	ΝΑΙ
2,75	0,62	218,9	-21,51%	-41,91%	-0,41%	-2,78%	20000	ΟΧΙ
3	0,68	239,16	-21,64%	-44,32%	-6,43%	-8,60%	20000	ΟΧΙ
3,5	0,79	273,01	-19,94%	-47,43%	-15,10%	-15,80%	20000	ΟΧΙ
4	0,9	304,15	-17,92%	-49,97%	-22,24%	-17,90%	9	ΟΧΙ
5	1,13	356,74	-12,70%	-53,44%	-32,50%	-13,32%	9	ΟΧΙ
6	1,36	395,1	-5,76%	-55,18%	-38,73%	-7,85%	9	ΟΧΙ
7	1,58	419,84	2,85%	-55,68%	-42,27%	-0,37%	5<9	ΝΑΙ
8	1,81	433,47	12,81%	-55,37%	-44,09%	-0,93%	11>9	ΝΑΙ
9	2,03	439,27	23,63%	-54,56%	-44,85%	0,37%	12>9	ΝΑΙ
10	2,26	440,2	34,69%	-53,48%	-44,99%	0,01%	13>9	ΝΑΙ
11	2,49	438,32	45,45%	-52,30%	-44,77%	0,27%	13>9	ΝΑΙ
12	2,71	435,91	55,08%	-51,19%	-44,48%	-0,02%	13>9	ΝΑΙ
13	2,94	433,41	63,28%	-50,20%	-44,18%	-0,49%	13>9	ΝΑΙ

Μετά από ανάλυση μη γραμμικής παλινδρόμησης, προέκυψε το συμπέρασμα ότι οι ακολουθίες τιμών των βέλτιστων συντελεστών n_{ck} στις περιοχές τιμών 1 και 2 του συντελεστή λ, μπορούν να προσεγγιστούν με πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

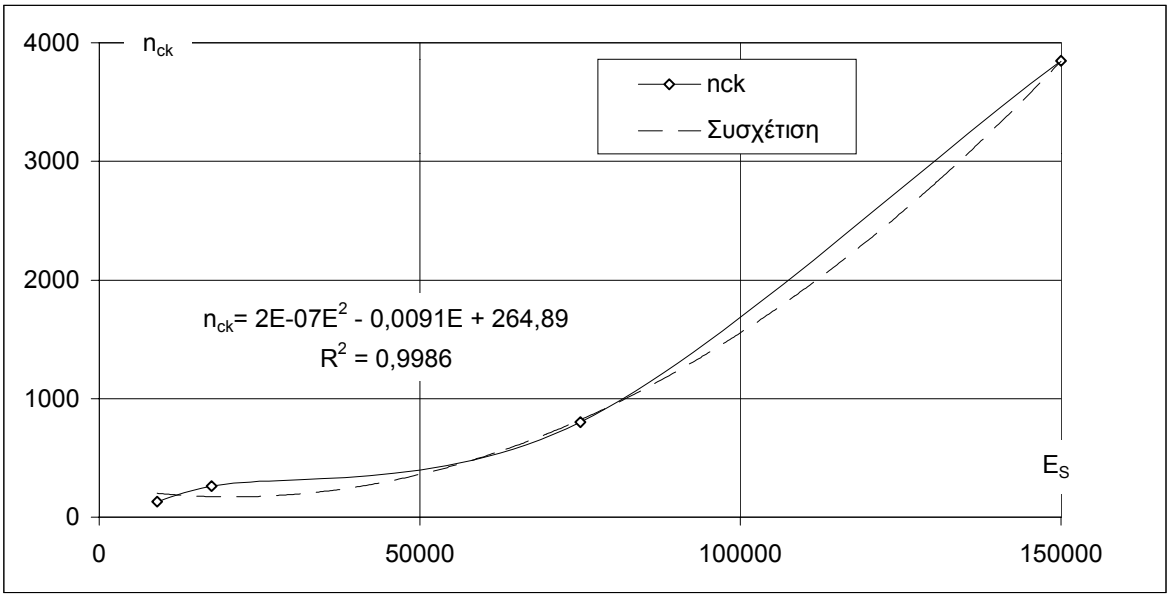








Από τα παραπάνω σχήματα εξάγεται το συμπέρασμα, ότι οι καμπύλες που σχεδιάστηκαν με κριτήριο την πλήρη σύγκλιση των τιμών των καμπτικών ροπών προς τις τιμές αναφοράς, παρουσιάζουν μια τάση για απότομη αύξηση καθώς η τιμή του λ τείνει προς την τιμή που οριοθετεί τις περιοχές 2 και 3. Αντίθετα, οι καμπύλες που σχεδιάστηκαν με κριτήριο την μη υπέρβαση του ±5% από τις τιμές αναφοράς, εμφανίζουν μια πιο ομαλή μεταβολή και μάλιστα στην περιοχή τιμών 2 ((0.6 – 0.9) για τα «μαλακά» εδάφη και (0.55 – 0.7) για τα «σκληρά») η μεταβολή τους είναι πολύ μικρή. Επομένως για τιμές του λ που ανήκουν στην περιοχή αυτή μπορούν να προταθούν ενιαίες, κατά περίπτωση εδάφους, τιμές για τον συντελεστή συσχέτισης με τις οποίες επιτυγχάνονται αποκλίσεις που δεν ξεπερνούν το ±6%. Οι τιμές αυτές κυμαίνονται μεταξύ των παρακάτω ορίων: Ε1→ n_{ck}≈ 125 – 130, Ε3→ n_{ck}≈ 265 – 270, Ε4→ n_{ck}≈ 790 – 800, Ε5→ n_{ck}≈ 3850 – 3660.
Από τη μελέτη των τιμών αυτών εξάγεται το συμπέρασμα, ότι η αύξηση του μέτρου ελαστικότητας του εδάφους συνεπάγεται την μονότονη αύξηση των τιμών των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης n_{ck}. Η συσχέτιση του μέτρου ελαστικότητας του εδάφους E_S με τους βέλτιστους συντελεστές συσχέτισης στην περιοχή τιμών 2 του συντελεστή λ απεικονίζεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Οι παραπάνω παρατηρήσεις επιβεβαιώνουν, και στην περίπτωση των δοκών πεπερασμένου μήκους, το συμπέρασμα που εξάχθηκε και κατά την μελέτη των δοκών «απείρου» μήκους, ότι στην περίπτωση των «σκληρών» εδαφών η άνω στρώση των ελατηρίων του μηχανικού προσομοιώματος των τριών παραμέτρων, θα πρέπει να αποτελείται από πιο δυστενή ελατήρια απ' ό,τι στην περίπτωση των «μαλακών» εδαφών.

Στην περιοχή τιμών 3 του συντελεστή λ, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων δεν επιτυγχάνει την πλήρη σύγκλιση προς την λύση αναφοράς. Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό, ότι προκειμένου να επιτευχθούν αποκλίσεις μικρότερες του 10 – 15% θα πρέπει να ληφθούν πολύ μεγάλες τιμές για τον συντελεστή συσχέτισης (της τάξης του 10^4). Στο σημείο αυτό αξίζει να γίνει και η παρατήρηση ότι οι αποκλίσεις του προσομοιώματος του Vlasov για τιμές του συντελεστή λ που ανήκουν στην περιοχή 3, είναι μικρότερες από τις αποκλίσεις του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων, και σε γενικές γραμμές οι βέλτιστες που μπορεί να αποδώσει το εν λόγω προσομοίωμα. Οι δυο παραπάνω παρατηρήσεις επιβεβαιώνουν το γεγονός ότι τα προσομοιώματα των δυο παραμέτρων, όπως το προσομοίωμα του Vlasov, αποτελούν οριακή περίπτωση του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων όταν $c=(n_{ck}k)\rightarrow\infty$.

Στις περιοχές τιμών 4 και 5 του συντελεστή λ παρατηρείται σύγκλιση του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων προς τη λύση αναφοράς, για τιμές του συντελεστή συσχέτισης ανάλογες των τιμών που επιτυγχάνουν τις βέλτιστες αποδόσεις του προσομοιώματος στην περίπτωση των δοκών «απείρου» μήκους (δηλαδή $n_{ck}=7$ για τα «μαλακά» εδάφη Ε1, Ε3, και $n_{ck}=9$ για τα «σκληρά» εδάφη Ε4, Ε5). Η σύγκλιση αυτή είναι μάλιστα ακόμα μεγαλύτερη στην περιοχή τιμών 5. Από τις παρατηρήσεις αυτές προκύπτει το πολύ σημαντικό συμπέρασμα ότι η συμπεριφορά των δοκών πεπερασμένου μήκους είναι πρακτικώς όμοια με την συμπεριφορά των δοκών «απείρου» μήκους για τιμές του $\lambda\geq 1.65 - 1.7$ για τα «μαλακά» εδάφη, και για $\lambda\geq 1.55 - 1.6$ για τα «σκληρά». Στο σημείο αυτό υπενθυμίζεται ότι το αντίστοιχο όριο για το προσομοίωμα των δυο παραμέτρων είναι σύμφωνα με τους Vlasov και Leont'ev η τιμή $\lambda=1.86$.

Κλείνοντας θα πρέπει να επισημανθεί συμπερασματικά, ότι υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των παραμέτρων n_{ck} και λ, ενώ μπορούν επιπλέον να διατυπωθούν και τα παρακάτω συμπεράσματα (Βλέπε Πίνακες 5.4α και 5.4β):

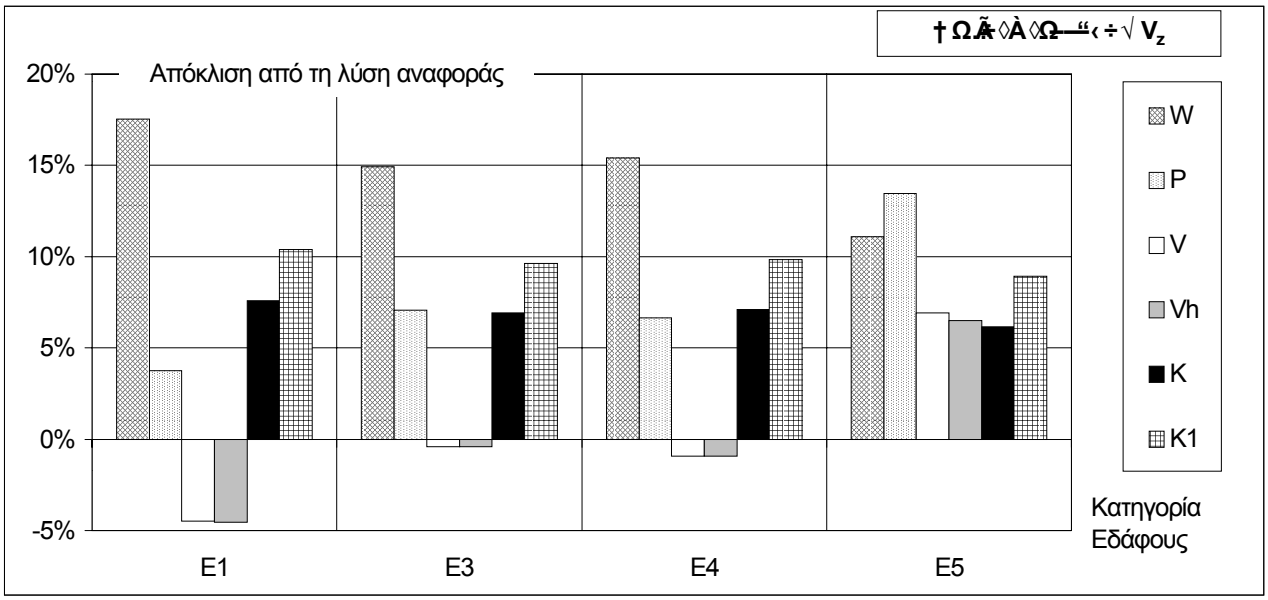
- Για μικρές τιμές του συντελεστή λ (Περιοχές 1 και 2), ο συσχετισμός του με τους βέλτιστους συντελεστές συσχέτισης n_{ck} μπορεί να προσεγγιστεί πολύ ικανοποιητικά με τη βοήθεια πολυωνυμικών συναρτήσεων βαθμού $n\geq 2$. Ειδικότερα στην περιοχή 2 μπορούν να οριστούν ενιαίες κατά περίπτωση εδάφους, τιμές για τους βέλτιστους συντελεστές συσχέτισης οι οποίες εξαρτώνται από το μέτρο ελαστικότητας του εδάφους. Στις περιοχές αυτές εμφανίζεται αρκετά αποδοτικό το προσομοίωμα του Winkler για τα «μαλακά» εδάφη Ε1, Ε3 (με αποκλίσεις της τάξης του 20%), και το προσομοίωμα του Vlasov για τα «σκληρά» εδάφη Ε4, Ε5 (με αποκλίσεις της τάξης του 15% – 20% στην περίπτωση του εδάφους Ε4, και 5% – 15% στην περίπτωση του εδάφους Ε5). Το προσομοίωμα του Pasternak εμφανίζεται να έχει μια σταθερή συμπεριφορά και για τις τέσσερις κατηγορίες εδάφους που εξετάστηκαν, με αποκλίσεις που κυμαίνονται μεταξύ του –25% και του –35%. Αποδίδει μάλιστα συστηματικά, μικρότερες τιμές από τις τιμές αναφοράς, όπως και το προσομοίωμα του Winkler. Αντίθετα το προσομοίωμα του Vlasov αποδίδει στην περίπτωση αυτή, μεγαλύτερες τιμές.

- Για μέσες τιμές του συντελεστή λ (περιοχή 3), τα προσομοιώματα του Vlasov και του Kerr εμφανίζονται ισοδύναμα. Οι βέλτιστοι συντελεστές συσχέτισης στην περίπτωση αυτή είναι πολύ μεγάλοι (της τάξης του 10^4). Το προσομοίωμα του Winkler εμφανίζεται ελαφρά βελτιωμένο σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση, χωρίς όμως να ξεπερνά τα δυο προαναφερόμενα. Τέλος το προσομοίωμα του Pasternak που και στην περίπτωση αυτή είναι υποδεέστερο των υπολοίπων, εμφανίζει μια συνεχή τάση αύξησης των αποκλίσεων.
- Για μεγάλες τιμές του λ (Περιοχές 4 και 5) οι βέλτιστοι συντελεστές συσχέτισης είναι οι ίδιοι με αυτούς που αντιστοιχούν σε δοκούς «απείρου» μήκους. Η παρατήρηση αυτή ισχύει κατά κύριο λόγο για την περιοχή τιμών 5. Όσον αφορά τα υπόλοιπα προσομοιώματα, το προσομοίωμα του Winkler παρουσιάζει την βέλτιστη του απόδοση στην περιοχή 4, όπου εμφανίζεται εφάμιλλο του προσομοιώματος του Kerr. Στην συγκεκριμένη περιοχή, τα προσομοιώματα των Vlasov και Pasternak υστερούν των δυο προαναφερομένων. Αντίθετα στην περιοχή 5, που αντιστοιχεί πρακτικά σε δοκούς «απείρου» μήκους, το προσομοίωμα του Winkler εμφανίζεται να υστερεί όλων των υπολοίπων στις περιπτώσεις των «σκληρών» εδαφών Ε4 και Ε5, στις οποίες είναι αποδοτικότερο το προσομοίωμα του Vlasov. Στις περιπτώσεις των «μαλακών» εδαφών Ε1 και Ε3, τα δυο αυτά προσομοιώματα αποδίδουν σε γενικές γραμμές ισοδύναμα αποτελέσματα, ενώ σε κάθε περίπτωση το προσομοίωμα του Pasternak εμφανίζεται υποδεέστερο όλων των υπολοίπων.

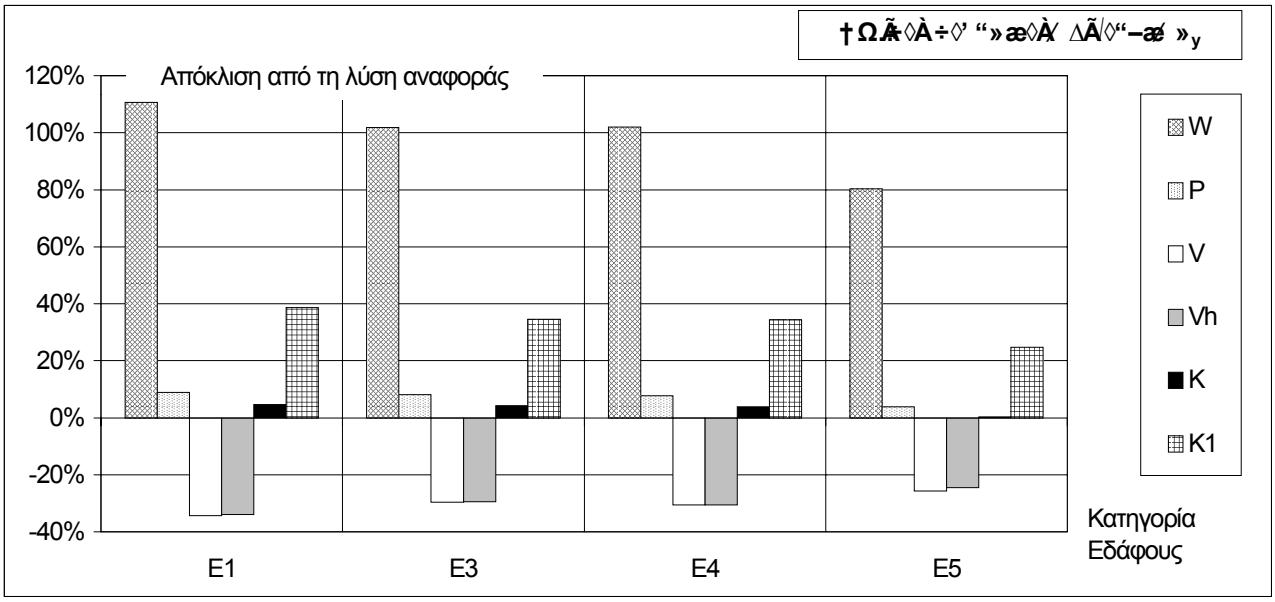
5.3.2.2. Παράδειγμα 2β: Δοκός υπό μοναχική ροπή

Πρόκειται, επίσης, για ένα απλό παράδειγμα η επίλυση του οποίου έγινε για τους λόγους που εκτέθηκαν στην εκφώνηση του παραδείγματος δοκού υπό μοναχική κατακόρυφη δύναμη που προηγήθηκε. Στο σχήμα 5.23 δίνονται όλα τα προσομοιώματα που εξετάστηκαν, ενώ το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε είναι ίδιο όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Η διαδικασία διενέργειας των αναλύσεων και το χρησιμοποιούμενο λογισμικό περιγράφηκε αναλυτικά στην παράγραφο 5.3.2.1, ενώ και τα υπόλοιπα δεδομένα όπως τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των δοκών και των κανάβων, είναι ίδια με τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση των δοκών πεπερασμένου μήκους υπό μοναχική κατακόρυφη δύναμη, και την επίλυση των δοκών «απείρου» μήκους υπό μοναχική ροπή αντίστοιχα.

Από τις αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν, αποδείχθηκε ότι το πάχος του ελαστικού υποβάθρου επηρεάζει ελάχιστα τα αποτελέσματα. Έτσι, θα δοθούν μόνον τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις αναλύσεις για πάχος υποβάθρου H_S=60m. Τα μεγέθη που ελέγχθηκαν είναι η μέγιστη τέμνουσα δύναμη της δοκού V_Z, και η μέγιστη γωνία στροφής της διατομής $\varphi_y = du_z/dx$. Στο σχήμα 5.32 παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα των συγκρίσεων των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων με το προσομοίωμα αναφοράς (προσομοίωμα επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων), ενώ στο σχήμα 5.33 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της διερεύνησης των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης για το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων. Ακολουθούν τα απαραίτητα σχόλια και συμπεράσματα.

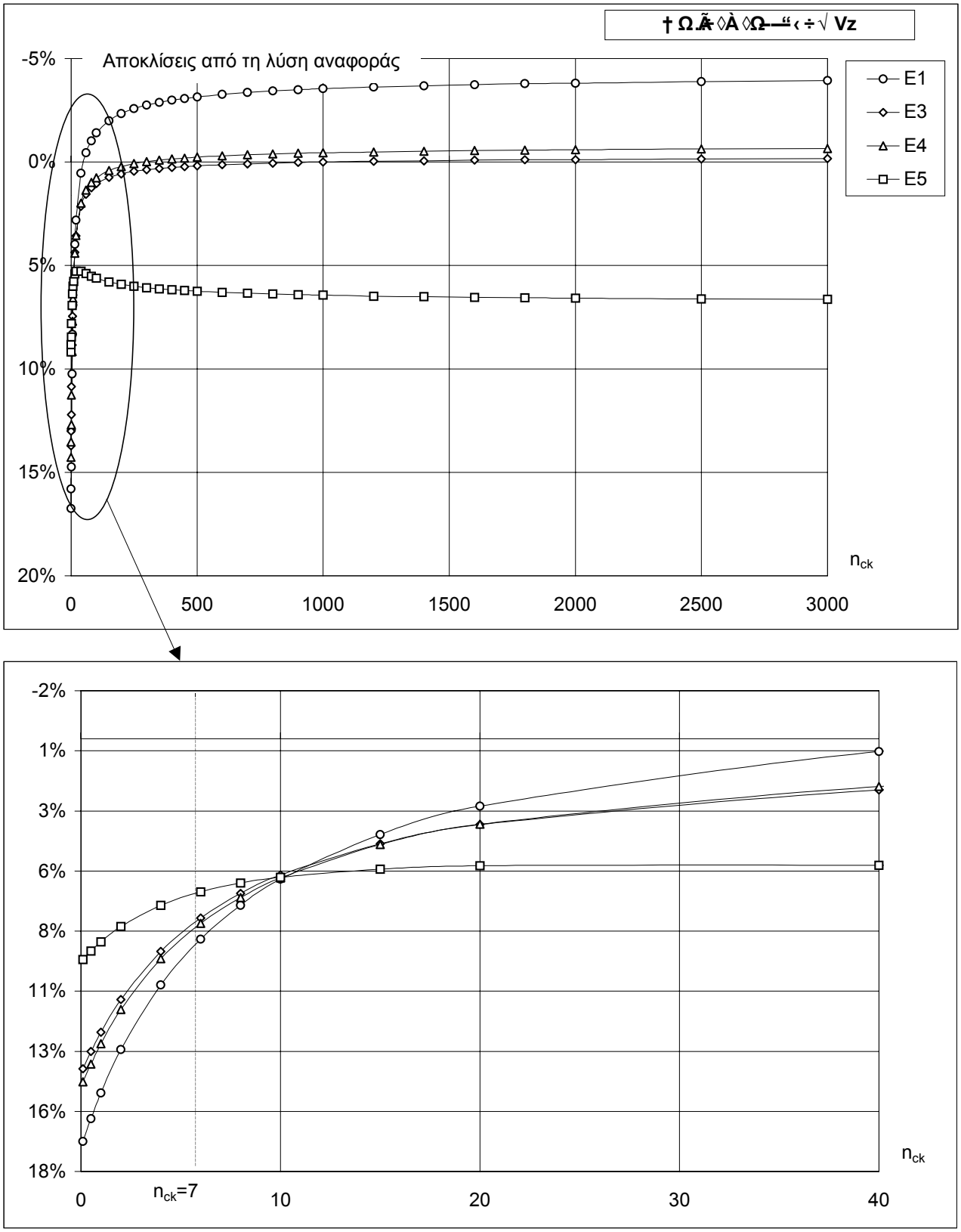


(α)



(β)

Σχήμα 5.32. Αποκλίσεις των μέγιστων τεμνουσών δυνάμεων V_z (α), και των μεγίστων στροφών της διατομής φ_y (β) των προσομοιωμάτων Winkler (W), Pasternak (P), Vlasov (V), Vlasov με θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου (Vh), Kerr (K) και Kerr χωρίς την θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού (K1), από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς. Δοκός υπό μοναχική ροπή. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.



Σχήμα 5.33. Αποκλίσεις των μέγιστων τεμνουσών δυνάμεων V_z του προσομοιώματος τριών παραμέτρων του Κερr από τα αντίστοιχα μεγέθη που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς, για διάφορες τιμές του συντελεστή συσχέτισης n_{ck}. Δοκός υπό μοναχική ροπή. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

Από το σχήμα 5.32 προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα.

1. Όσον αφορά την προσέγγιση της μέγιστης στροφής των διατομών:
   - Το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων με τη θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού αποδίδει τα καλύτερα αποτελέσματα από όλα τα υπόλοιπα προσομοιώματα, καθώς οι προκύπτουσες από την εφαρμογή του αποκλίσεις δεν ξεπερνούν για κανένα τύπο εδάφους το 3% όταν δοθεί στον συντελεστή συσχέτισης n_{ck} η τιμή 7.
   - Σε αντίθεση με την περίπτωση της μελέτης δοκού υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση, στην παρούσα περίπτωση το προσομοίωμα του Pasternak εμφανίζει τα αμέσως μετά το προσομοίωμα του Kerr καλύτερα αποτελέσματα. Έτσι οι προκύπτουσες από την εφαρμογή του αποκλίσεις δεν υπερβαίνουν το 9%.
   - Τα προσομοιώματα του Winkler και του Kerr χωρίς τη θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού εξακολουθούν να αποδίδουν μη αποδεκτά αποτελέσματα καθώς οι αποκλίσεις τους υπερβαίνουν σε κάθε περίπτωση το 80% και 20% αντίστοιχα.
   - Το προσομοίωμα του Vlasov και το αντίστοιχο προσομοίωμα με τη θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου, όπως και στην περίπτωση της φόρτισης με μοναχική κατακόρυφη δύναμη, αποδίδουν αποτελέσματα με αποκλίσεις της τάξεως του 30%. Μάλιστα εξακολουθούν να αποδεικνύονται πιο «δύσκαμπτα» καθώς αποδίδουν συστηματικά μικρότερες τιμές από τις τιμές αναφοράς. Πάντως σε κάθε περίπτωση παρουσιάζονται αποδοτικότερα του προσομοιώματος του Winkler.
2. Όσον αφορά την προσέγγιση της μέγιστης τέμνουσας δύναμης:
   - Το προσομοίωμα του Vlasov αποδίδει πολύ καλά αποτελέσματα, ειδικά για την περίπτωση των «μέσης σκληρότητας» εδαφών E_3, E_4 καθώς οι αντίστοιχες αποκλίσεις δεν υπερβαίνουν το 1%. Πολύ καλή είναι και η απόδοση του για τις κατηγορίες εδαφών E_1, E_5 όπου οι προκύπτουσες αποκλίσεις είναι της τάξης του 5% - 7%.
   - Το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων εξακολουθεί και την παρούσα περίπτωση φόρτισης να αποδίδει σταθερά αποτελέσματα που μπορούν να θεωρηθούν μάλιστα και πολύ ικανοποιητικά, καθώς δεν υπερβαίνουν σε καμία περίπτωση το 7%.
   - Το προσομοίωμα του Winkler αποδίδει τις μεγαλύτερες αποκλίσεις, οι οποίες όμως δεν μπορούν να θεωρηθούν σε καμία περίπτωση πολύ μεγάλες καθώς είναι της τάξης του 10 – 20%.
   - Τέλος, τα προσομοιώματα του Pasternak και του Kerr χωρίς την θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού μπορούν να θεωρηθούν στην περίπτωση αυτή «ισοδύναμα», καθώς αποδίδουν αποκλίσεις της ίδιας τάξης μεγέθους οι οποίες κυμαίνονται μεταξύ του 5% – 15%.

Όπως και στην περίπτωση της φόρτισης με μοναχικό κατακόρυφο φορτίο, πραγματοποιήθηκε μια σειρά παραμετρικών αναλύσεων με σκοπό τη διερεύνηση της ύπαρξης συντελεστών συσχέτισης που αποδίδουν καλύτερα αποτελέσματα από τον συντελεστή n_{ck}=7. Τα αποτελέσματα των αναλύσεων αυτών αποτυπώνονται στο σχήμα 5.33. Από την μελέτη του σχήματος αυτού προκύπτει το συμπέρασμα ότι όπως και στην περίπτωση της φόρτισης με μοναχικό κατακόρυφο φορτίο, η χρησιμοποιούμενη μεθοδολογία

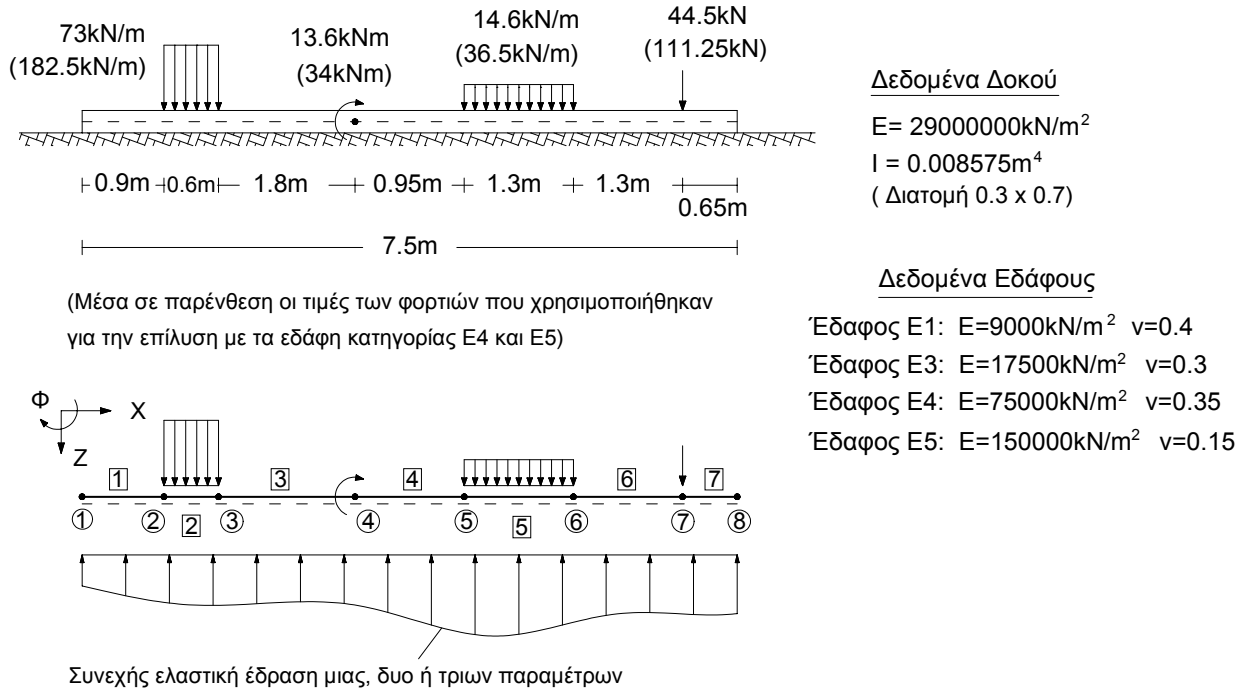
προσδιορισμού των εδαφικών παραμέτρων, αδυνατεί να οδηγήσει σε πλήρη σύγκλιση στην τιμή αναφοράς την μέγιστη τέμνουσα δύναμη V_z, κατά την περίπτωση της μελέτης του εδάφους E_5. Για τις υπόλοιπες κατηγορίες εδαφών που μελετήθηκαν, η μεθοδολογία μπορεί να οδηγήσει σε πλήρη σύγκλιση, για τις εξής τιμές του συντελεστή συσχέτισης: $E_1 \rightarrow n_{ck}=52$, $E_2 \rightarrow n_{ck}=1000$ και $E_4 \rightarrow n_{ck}=285$.

Κλείνοντας την αναφορά στα συμπεράσματα των επιλύσεων των δοκών «μέσου» μήκους υπό μοναχική ροπή, θα πρέπει να σημειωθούν τα εξής:

- **Το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων με τη θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού σε συνδυασμό με την χρησιμοποιούμενη μεθοδολογία προσδιορισμού των τριών παραμέτρων του, επιτυγχάνει πολύ σημαντική προσέγγιση των γωνιών στροφής των διατομών με τα αντίστοιχα αποτελέσματα αναφοράς για τιμή του συντελεστή συσχέτισης $n_{ck}=7$, όπως και στην περίπτωση της μελέτης των δοκών «απείρου» μήκους. Για την τιμή αυτή, οι αποκλίσεις του εν λόγω προσομοιώματος δεν ξεπερνούν σε καμία περίπτωση το 3%. Περαιτέρω αύξηση της τιμής του συντελεστή συσχέτισης οδηγεί σε ακόμα μεγαλύτερη προσέγγιση. Ωστόσο το κέρδος που επιτυγχάνεται από την αύξηση αυτή δεν είναι σημαντικό. Από τα υπόλοιπα προσομοιώματα, ιδιαίτερα ικανοποιητικό εμφανίζεται το προσομοίωμα του Pasternak, ενώ εντελώς απορριπτέο κρίνεται το προσομοίωμα του Winkler. Τέλος τα προσομοιώματα του Vlasov εμφανίζουν μια σχετικά ικανοποιητική απόδοση περίπου εφάμιλλη της απόδοσης του προσομοιώματος του Pasternak.**
- **Όσον αφορά τις μέγιστες τέμνουσες δυνάμεις, οι αποκλίσεις του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων για την τιμή $n_{ck}=7$ είναι επίσης μικρές – αν και λίγο μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες αποκλίσεις των γωνιών στροφής – καθώς δεν υπερβαίνουν σε καμία περίπτωση το 7%. Ιδιαίτερα ικανοποιητικά εμφανίζονται και τα προσομοιώματα των Vlasov και Pasternak. Πάντως σε γενικές γραμμές οι αποκλίσεις όλων των προσομοιωμάτων δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλες, καθώς δεν υπερβαίνουν το 15%.**

5.3.2.3. Παράδειγμα 2γ: Δοκός με σύνθετη φόρτιση

Πρόκειται για το παράδειγμα των Harr et al. (1969), το οποίο επιλύθηκε αρχικά με το προσομοίωμα του Vlasov αλλά και μεταγενέστερα τόσο με το προσομοίωμα του Winkler όσο και με μια σειρά προσομοιωμάτων δυο παραμέτρων με διάφορες παραλλαγές, από τους Chiwanga & Valsangkar (1988), και Razaqpur & Shah (1991), (βλέπε Παράγραφο 5.2.2, και Σχήμα 5.2α). Οι προαναφερόμενες επιλύσεις πραγματοποιήθηκαν με τιμές παραμέτρων που προκύπτουν από την εφαρμογή των σχέσεων του Vlasov λαμβάνοντας για την παράμετρο γ την τιμή 1.5, χωρίς να δοθεί κάποια συγκεκριμένη εξήγηση για την επιλογή αυτή. Επειδή στα πλαίσια της παρούσας διατριβής ακολουθείται – και ελέγχεται – μια διαφορετική διαδικασία προσδιορισμού των τιμών των εδαφικών παραμέτρων, δεν είναι δυνατή η άμεση σύγκριση με τα αποτελέσματα των επιλύσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω. Ωστόσο, η απόφαση για την επίλυση του συγκεκριμένου παραδείγματος ελήφθη διότι συνδυάζει τρεις διαφορετικούς τύπους φόρτισης, για δυο από τους οποίους – και ξεχωριστά για τον καθένα από αυτούς – πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις στα πλαίσια των δυο προηγούμενων παραδειγμάτων. Έτσι, εξετάζεται η συμπεριφορά των εδαφικών προσομοιωμάτων, αλλά και η αποτελεσματικότητα της χρησιμοποιούμενης μεθόδου προσδιορισμού των εδαφικών παραμέτρων και σε πιο σύνθετα συστήματα φόρτισης μεμονωμένων δοκών.



Σχήμα 5.34. Γεωμετρικά δεδομένα, δεδομένα φόρτισης και διακριτοποίησης της δοκού του παραδείγματος 2γ.

Τα δεδομένα του εδάφους θεμελίωσης είναι αυτά του Πίνακα 5.2 με εξαίρεση την κατηγορία εδάφους Ε2, η οποία δεν εξετάστηκε όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα των δοκών πεπερασμένου μήκους. Τα δεδομένα της δοκού δίνονται στο Σχήμα 5.34. Όπως φαίνεται από το σχήμα αυτό, οι τιμές των φορτιστικών αιτίων αυξήθηκαν σημαντικά για τις αναλύσεις με τις κατηγορίες εδαφών Ε4 και Ε5, επειδή οι αντίστοιχες τιμές που χρησιμοποιήθηκαν για τις αναλύσεις με τις κατηγορίες Ε1 και Ε3, προκαλούσαν πολύ μικρές μετακινήσεις.

Όσον αφορά τα βάθη του ελαστικού υποβάθρου, πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις μόνο για βάθος H_S=60 μέτρα, καθώς από τις αναλύσεις που προηγήθηκαν προέκυψε το συμπέρασμα, ότι τα αποτελέσματα δεν μεταβάλλονται σημαντικά με τη μείωση του βάθους. Έτσι, αποφασίστηκε να γίνουν αναλύσεις μόνον για το βάθος αυτό, που αντιστοιχεί πρακτικά σε υπόβαθρο «απείρου» βάθους. Λόγω του γεγονότος ότι η φόρτιση της δοκού δεν είναι ούτε συμμετρική ούτε και αντισυμμετρική, κρίθηκε απαραίτητη η διακριτοποίηση ολοκλήρου του συστήματος δοκού – ελαστικού υποβάθρου κατά την επίλυση με τα επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία. Οι κάναβοι που χρησιμοποιήθηκαν έχουν μήκος 150 μέτρα, έτσι ώστε να λαμβάνεται υπόψη κατά την ανάλυση σημαντική ποσότητα εδάφους εκατέρωθεν της δοκού. Κατά τα λοιπά, τα δεδομένα των κανάβων είναι όμοια με αυτά που περιγράφηκαν αναλυτικά στα προηγούμενα παραδείγματα, καθώς και στην παρούσα περίπτωση έγινε παραδοχή της ισχύος των συνθηκών επίπεδης έντασης.

Το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε είναι:

- Προσομοίωμα Επιφανειακών Πεπερασμένων Στοιχείων → Πρόγραμμα SAP2000
- Προσομοίωμα Winkler → Πρόγραμμα **B**eam on **E**lastic **F**oundation
- Προσομοιώματα δυο και τριών παραμέτρων και παραλλαγές τους → Αλγόριθμοι σε γλώσσα Fortran 90

Για την επίλυση με το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov χρησιμοποιήθηκε επαναληπτικός αλγόριθμος, η φιλοσοφία του οποίου είναι αυτή που περιγράφεται παραστατικά στο σχήμα 5.4. Ωστόσο, υπάρχει διαφορά με τους αλγορίθμους που χρησιμοποιήθηκαν για τις περιπτώσεις μελέτης των δοκών περασμένου μήκους με απλές φορτίσεις. Η διαφορά αυτή έγκειται στο ότι ο αλγόριθμος που συντάχθηκε για το παρόν παράδειγμα στηρίζεται στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και όχι στη μέθοδο των αρχικών παραμέτρων. Ο λόγος που οδήγησε στην επιλογή αυτή είναι ο εξής:

Για την εφαρμογή του τροποποιημένου προσομοιώματος του Vlasov απαιτείται η εκτέλεση μιας επαναληπτικής διαδικασίας σύγκλισης της τιμής της παραμέτρου γ μέσω της παρακάτω σχέσεως 5.2.

$$\gamma^2 = \frac{1-\nu_s}{2}\left[\frac{\int_0^{L_b}\left(\frac{du_z}{dx}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{k}{G}}\right)\left[u_z^2(0)+u_z^2(L_b)\right]}{\int_0^{L_b} u_z^2 dx + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{k}{G}}\right)\left[u_z^2(0)+u_z^2(L_b)\right]}\right] \tag{5.2}$$

(Όπου ν_s είναι ο λόγος του Poison του ελαστικού υποβάθρου, k και G είναι οι εδαφικές παράμετροι οι οποίες είναι συνάρτηση της παραμέτρου γ, και $u_z(0)$, $u_z(L_b)$ είναι οι κατακόρυφες μετακινήσεις των δυο άκρων της δοκού). Από την μελέτη της παραπάνω σχέσης γίνεται σαφές, ότι για την εκτέλεση του επαναληπτικού κύκλου απαιτείται ο υπολογισμός δυο ολοκληρωμάτων που αφορούν τις μετακινήσεις και τις στροφές των διατομών της δοκού σε όλο το εύρος της. Η διαδικασία υπολογισμού των ολοκληρωμάτων αυτών με τη μέθοδο των αρχικών παραμέτρων απαιτεί την ολοκλήρωση των στοιχείων του μητρώου μεταφοράς που είναι πιο χρονοβόρα από την αντίστοιχη διαδικασία με βάση την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Στα πλαίσια της τελευταίας, τα ολοκληρώματα αυτά διασπώνται σε επιμέρους ολοκληρώματα – που το κάθε ένα από αυτά αντιστοιχεί και σε ένα από τα στοιχεία στα οποία έχει διακριτοποιηθεί η δοκός – τα οποία τελικώς αθροίζονται για να δώσουν την συνολική τιμή. Η διαδικασία αυτή είναι και προγραμματιστικά απλούστερη.

Η δοκός διακριτοποιήθηκε με επτά (7) στοιχεία, οι κόμβοι των οποίων τοποθετήθηκαν στα σημεία εφαρμογής των μοναχικών δυνάμεων, καθώς και στα σημεία αρχής και τέλους των ομοιόμορφων φορτίων (Σχήμα 5.34).

Κατά τις επιλύσεις που πραγματοποιήθηκαν, αγνοήθηκε το προσομοίωμα του Vlasov με τη θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου, καθώς οι αναλύσεις των προηγούμενων παραδειγμάτων απέδειξαν την ελάχιστη διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων του από τα αντίστοιχα αποτελέσματα του κλασσικού προσομοιώματος του Vlasov.

Και στην παρούσα περίπτωση, για τον προσδιορισμό των τιμών των εδαφικών παραμέτρων ακολουθήθηκε η έως τώρα ακολουθούμενη διαδικασία. Έτσι, για το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων ελέγχθηκαν καταρχήν οι συντελεστές συσχέτισης n_{ck} = 7 – 9, οι οποίοι στα προηγούμενα παραδείγματα είχαν αποδώσει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα για τόσο για τα εντασιακά όσο και για τα παραμορφωσιακά μεγέθη.

Η διαδικασία της αξιολόγησης των αποτελεσμάτων των αναλύσεων που πραγματοποιήθηκαν, επικεντρώθηκε στην σύγκριση των τιμών της κατακόρυφης μετακίνησης, της καμπτικής ροπής και της τέμνουσας δύναμης στους οκτώ κόμβους με τους οποίους διακριτοποιήθηκε η δοκός (Σχήμα 5.34). Επειδή στην παρούσα περίπτωση δεν ελέγχονται τιμές μεγεθών σε μεμονωμένα σημεία, αλλά σε μια σειρά σημείων, τέθηκε το πρόβλημα της εξεύρεσης της βέλτιστης τιμής του συντελεστή συσχέτισης, καθώς από τις παραμετρικές αναλύσεις που έγιναν, προέκυψε το συμπέρασμα ότι η συνεχής αύξηση του συντελεστή n_{ck} δεν οδηγεί σε μια ομοιόμορφη σύγκλιση των τιμών των μεγεθών σε όλους του κόμβους, αλλά ξεχωριστά σε κάποιους από αυτούς. Για τον λόγο αυτό, εξετάστηκε η περίπτωση της εύρεσης μιας τιμής του n_{ck} για την οποία επιτυγχάνεται η κατά μέσον όρο βέλτιστη σύγκλιση προς τη λύση αναφοράς, των εξεταζόμενων μεγεθών όλων των κόμβων.

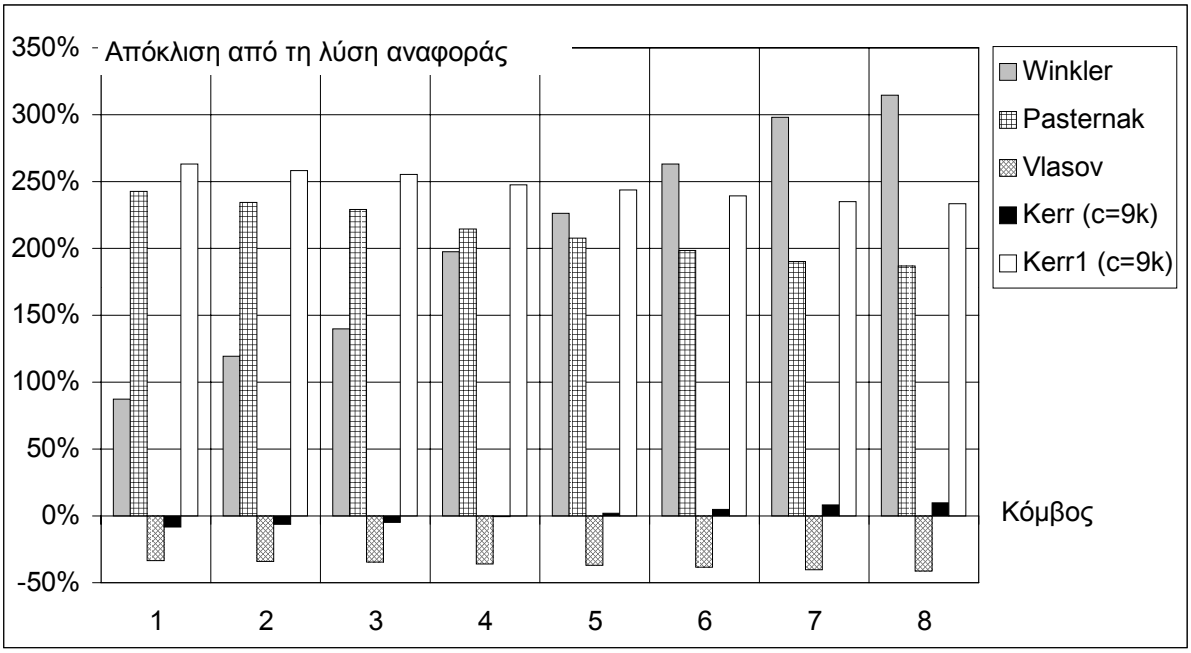
Θα πρέπει να τονιστεί προκαταρκτικά, ότι η ανάγκη για την διερεύνηση των βέλτιστων συντελεστών n_{ck} προέκυψε μόνον κατά την σύγκριση των εντασιακών μεγεθών, καθώς στην περίπτωση των συγκρίσεων των κατακορύφων μετακινήσεων, οι τιμές n_{ck} = 9 – 10 δίνουν και στην παρούσα περίπτωση τα βέλτιστα αποτελέσματα, όπως γίνεται σαφές από τα σχήματα 5.35 – 5.38, και όπως θα παρουσιαστεί αναλυτικά παρακάτω.

Αντίθετα για την επίτευξη της κατά μέσον όρο βέλτιστης σύγκλισης των εντασιακών μεγεθών αποδείχθηκε ότι οι τιμές n_{ck} = 9 – 10 δεν είναι επαρκείς. Έτσι, πραγματοποιήθηκαν παραμετρικές αναλύσεις, τα αποτελέσματα των οποίων δίνονται στα σχήματα 5.39 – 5.46.

Απόλυτες τιμές							
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=9k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	1	0,0679	0,1271	0,2328	0,0451	0,0622	0,2465
	2	0,0697	0,1528	0,2332	0,0459	0,0655	0,2499
	3	0,0709	0,1700	0,2334	0,0464	0,0676	0,2521
	4	0,0745	0,2215	0,2343	0,0476	0,0742	0,2588
	5	0,0764	0,2489	0,2349	0,0481	0,0778	0,2625
	6	0,0789	0,2865	0,2358	0,0485	0,0829	0,2678
	7	0,0815	0,3242	0,2368	0,0487	0,0880	0,2731
	8	0,0828	0,3431	0,2372	0,0487	0,0906	0,2758

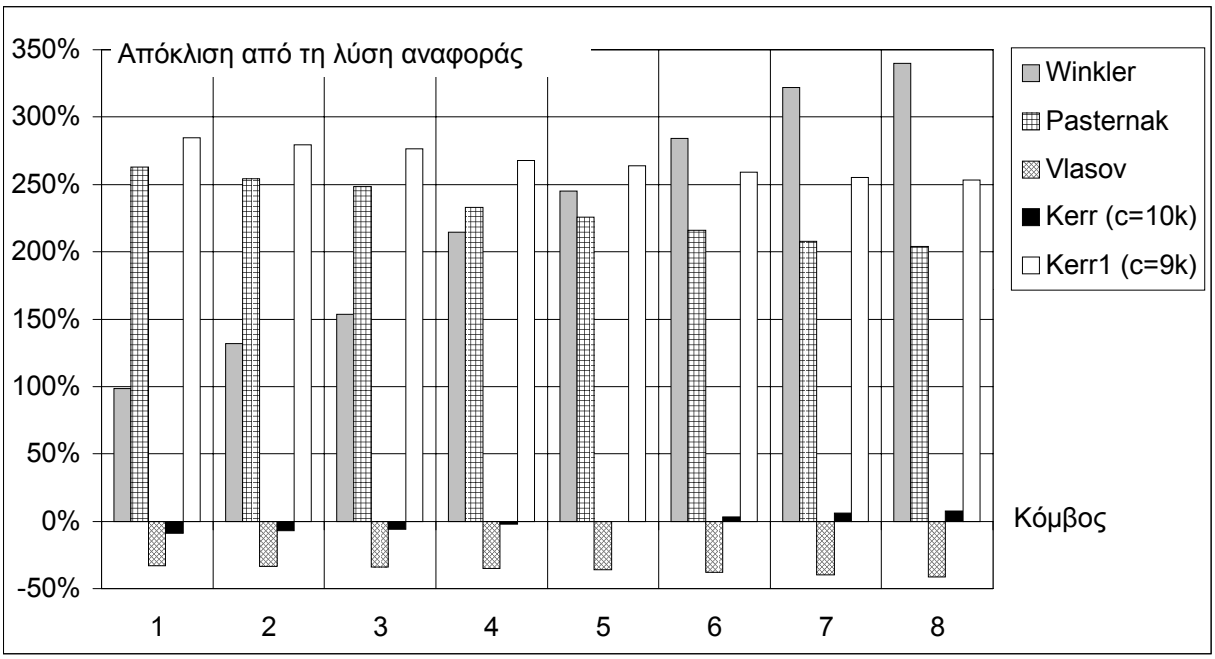
Αποκλίσεις						
Προσομοίωμα:		Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=9k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	1	87,23%	242,86%	-33,51%	-8,38%	263,09%
	2	119,26%	234,48%	-34,09%	-6,10%	258,43%
	3	139,76%	229,21%	-34,51%	-4,64%	255,53%
	4	197,57%	214,67%	-36,01%	-0,36%	247,64%
	5	226,00%	207,61%	-36,99%	1,88%	243,86%
	6	262,98%	198,71%	-38,52%	4,98%	239,26%
	7	297,87%	190,53%	-40,25%	8,04%	235,19%
	8	314,62%	186,69%	-41,15%	9,53%	233,33%

Απότελεσματα επίλυσης με το τροποποιημένο προσομοίωμα Vlasov	γ	k (kN/m^3)	G (kN/m)
	0,02998748	203,13	45452,21



Σχήμα 5.35. Τιμές των μετακινήσεων και οι αντίστοιχες αποκλίσεις που προκύπτουν από την χρήση των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς. Έδαφος Ε1 (Άργιλος μέσης σκληρότητας), Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

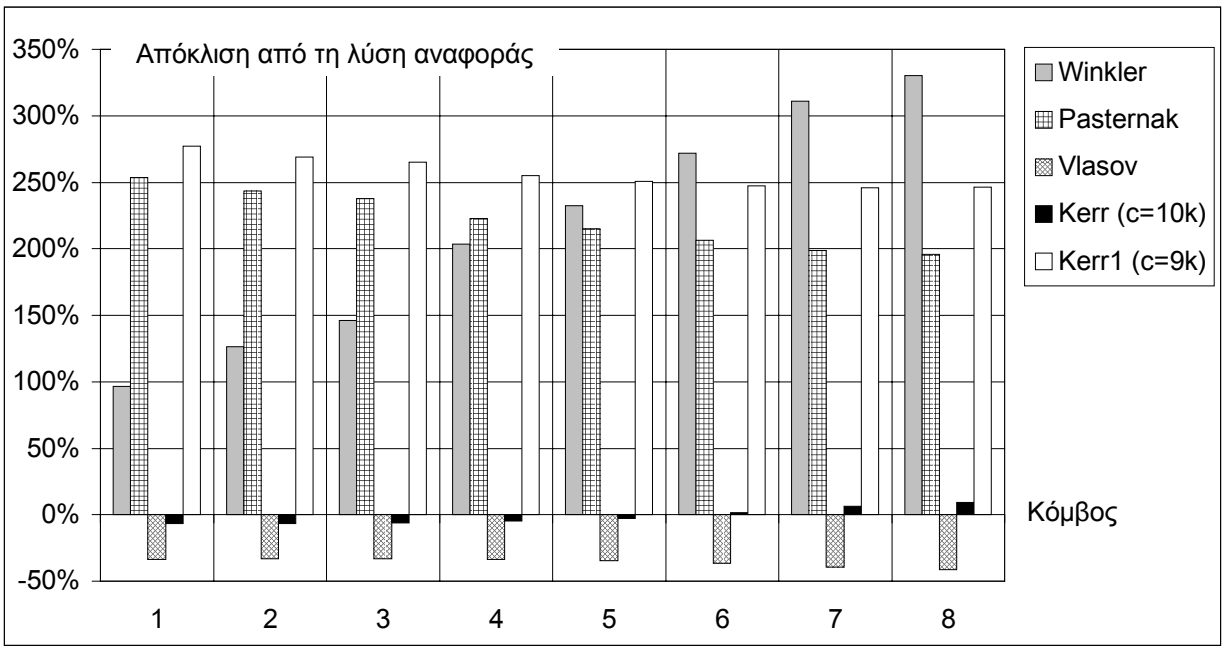
Απόλυτες τιμές							
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=10k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	1	0,0355	0,0704	0,1288	0,0237	0,0323	0,1365
	2	0,0364	0,0845	0,1290	0,0242	0,0339	0,1382
	3	0,0370	0,0939	0,1290	0,0245	0,0349	0,1394
	4	0,0389	0,1223	0,1294	0,0252	0,0380	0,1429
	5	0,0398	0,1374	0,1297	0,0254	0,0398	0,1449
	6	0,0412	0,1582	0,1302	0,0256	0,0424	0,1478
	7	0,0425	0,1792	0,1307	0,0255	0,0451	0,1508
	8	0,0431	0,1897	0,1310	0,0254	0,0465	0,1524
Αποκλίσεις							
Προσομοίωμα:			Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=10k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	1		98,41%	263,09%	-33,30%	-8,83%	284,82%
	2		132,06%	254,07%	-33,61%	-6,99%	279,58%
	3		153,58%	248,37%	-33,89%	-5,81%	276,29%
	4		214,66%	232,95%	-35,20%	-2,15%	267,73%
	5		244,87%	225,50%	-36,18%	-0,06%	263,73%
	6		284,36%	216,18%	-37,90%	3,00%	259,04%
	7		321,88%	207,70%	-39,96%	6,17%	255,10%
	8		340,06%	203,81%	-41,05%	7,77%	253,44%
Απότελεσματα επίλυσης με το τροποποιημένο προσομοίωμα Vlasov					γ	k (kN/m^3)	G (kN/m)
					0,03066015	367,71	93991,13



Σχήμα 5.36. Τιμές των μετακινήσεων και οι αντίστοιχες αποκλίσεις που προκύπτουν από την χρήση των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς. Έδαφος Ε3 (Χαλαρή άμμος), Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

Απόλυτες τιμές							
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=10k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	1	0,0205	0,0403	0,0725	0,0136	0,0191	0,0773
	2	0,0211	0,0478	0,0725	0,0141	0,0197	0,0779
	3	0,0215	0,0529	0,0725	0,0144	0,0201	0,0784
	4	0,0225	0,0683	0,0726	0,0149	0,0215	0,0799
	5	0,0231	0,0768	0,0728	0,0151	0,0225	0,0810
	6	0,0239	0,0888	0,0732	0,0151	0,0242	0,0830
	7	0,0246	0,1012	0,0736	0,0149	0,0262	0,0852
	8	0,0249	0,1074	0,0738	0,0147	0,0272	0,0863

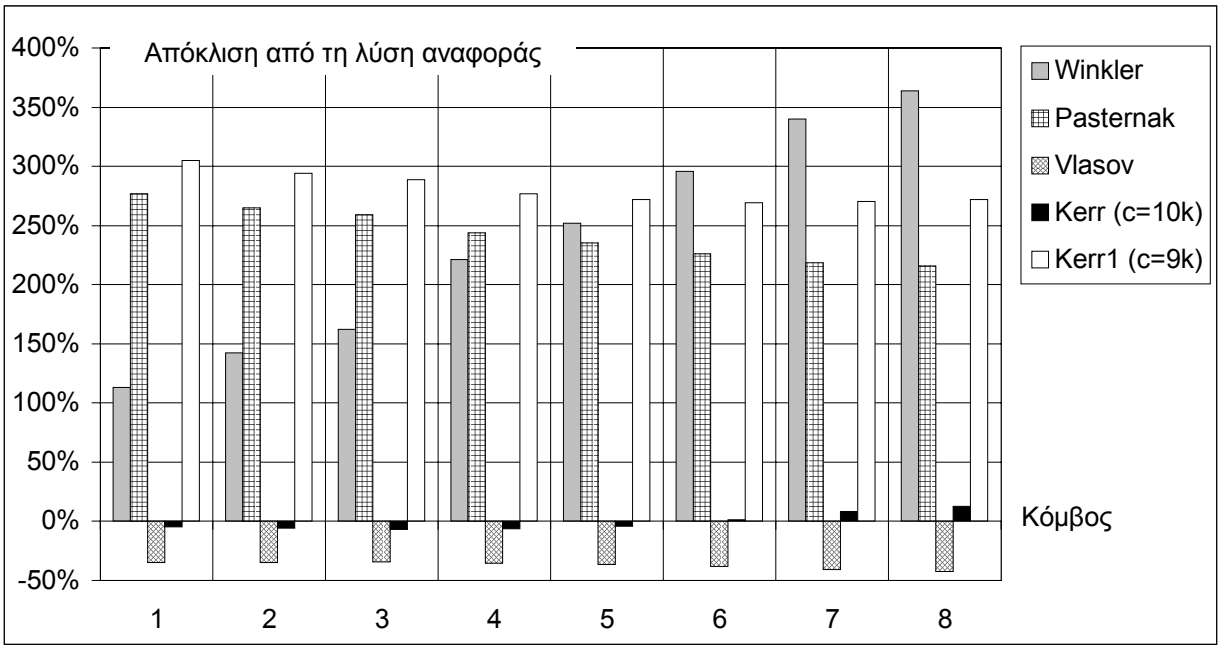
Αποκλίσεις						
Προσομοίωμα:		Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=10k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	1	96,45%	253,49%	-33,45%	-6,59%	277,08%
	2	126,61%	243,38%	-33,10%	-6,49%	269,24%
	3	146,25%	237,61%	-33,00%	-6,29%	265,00%
	4	203,40%	222,59%	-33,76%	-4,53%	255,07%
	5	232,36%	215,13%	-34,72%	-2,54%	250,86%
	6	271,73%	206,30%	-36,73%	1,42%	247,37%
	7	310,86%	198,91%	-39,49%	6,41%	246,11%
	8	330,44%	195,77%	-41,09%	9,05%	246,22%
Απότελεσματα επίλυσης με το τροποποιημένο προσομοίωμα				γ	k (kN/m^3)	G (kN/m)
Vlasov				0,030744795	1636,05	387286,48



Σχήμα 5.37. Τιμές των μετακινήσεων και οι αντίστοιχες αποκλίσεις που προκύπτουν από την χρήση των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς. Έδαφος Ε4 (Πυκνή άμμος), Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

Απόλυτες τιμές							
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=10k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	1	0,0105	0,0224	0,0396	0,0068	0,0101	0,0426
	2	0,0109	0,0263	0,0397	0,0071	0,0102	0,0428
	3	0,0110	0,0289	0,0396	0,0072	0,0103	0,0429
	4	0,0115	0,0370	0,0396	0,0075	0,0108	0,0435
	5	0,0119	0,0417	0,0398	0,0076	0,0114	0,0441
	6	0,0123	0,0484	0,0399	0,0076	0,0124	0,0452
	7	0,0126	0,0555	0,0401	0,0074	0,0137	0,0467
	8	0,0127	0,0591	0,0402	0,0073	0,0143	0,0474

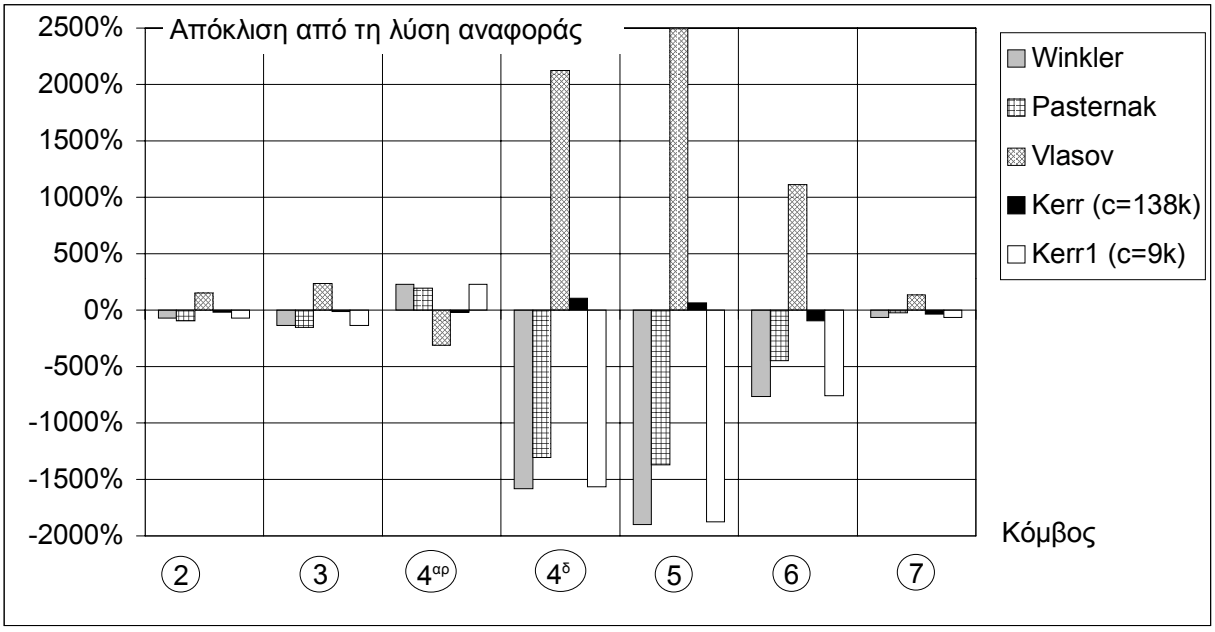
Αποκλίσεις						
	Προσομοίωμα:	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=10k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	1	113,02%	276,84%	-34,99%	-4,40%	305,18%
	2	142,46%	265,12%	-34,64%	-5,86%	294,09%
	3	162,09%	259,06%	-34,54%	-6,53%	288,60%
	4	221,22%	243,88%	-35,30%	-6,24%	276,85%
	5	251,84%	235,50%	-36,27%	-4,08%	271,91%
	6	295,50%	226,07%	-38,22%	1,30%	269,33%
	7	340,27%	218,36%	-40,98%	8,58%	270,22%
	8	363,69%	215,66%	-42,63%	12,61%	272,23%
Απότελεσματα επίλυσης με το τροποποιημένο προσομοίωμα Vlasov				γ	k (kN/m^3)	G (kN/m)
				0,032213727	2995,05	884537,92



Σχήμα 5.38. Τιμές των μετακινήσεων και οι αντίστοιχες αποκλίσεις που προκύπτουν από την χρήση των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς. Έδαφος Ε5 (Αμμοχάλικο), Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

Απόλυτες τιμές							
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=138k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	2	10,82	3,35	0,76	27,25	8,91	3,35
	3	10,15	-3,45	-5,48	34,12	9,01	-3,41
	4αρ	-11,86	-39,37	-34,58	25,10	-9,98	-39,07
	4δ	1,74	-25,77	-20,98	38,70	3,62	-25,47
	5	1,54	-27,74	-19,56	39,94	2,55	-27,34
	6	3,04	-20,29	-10,49	36,78	0,18	-19,96
	7	12,48	4,34	9,63	29,65	8,35	4,40
	8	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Αποκλίσεις						
Προσομοίωμα:		Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=138k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	2	-69,05%	-92,95%	151,89%	-17,64%	-69,05%
	3	-133,94%	-153,96%	236,14%	-11,22%	-133,59%
	4αρ	231,93%	191,56%	-311,65%	-15,88%	229,42%
	4δ	-1580,83%	-1305,71%	2124,25%	108,27%	-1563,72%
	5	-1901,06%	-1370,30%	2493,58%	65,66%	-1875,33%
	6	-767,27%	-445,16%	1109,86%	-94,09%	-756,64%
	7	-65,26%	-22,80%	137,61%	-33,07%	-64,72%
Απότελεσματα επίλυσης με το τροποποιημένο προσομοίωμα Vlasov				γ	k (kN/m^3)	G (kN/m)
				0,02998748	203,13	45452,21

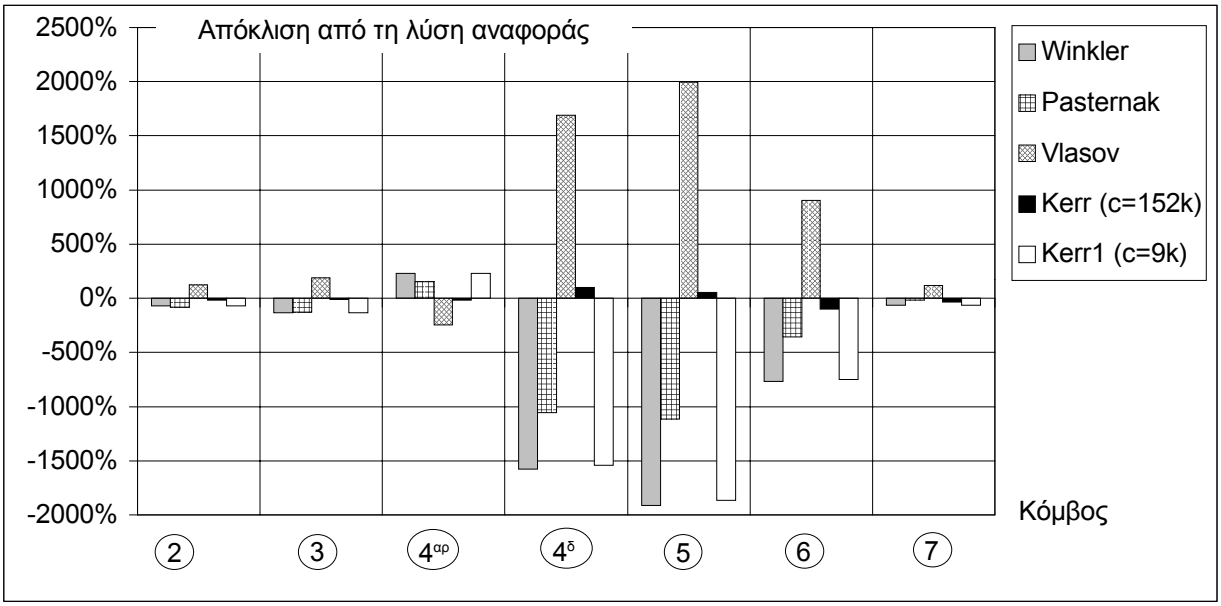


Σχήμα 5.39. Τιμές των καμπτικών ροπών και οι αντίστοιχες αποκλίσεις που προκύπτουν από την χρήση των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς. Έδαφος Ε1 (Άργιλος μέσης σκληρότητας), Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

Απόλυτες τιμές							
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=152k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	2	10,82	3,36	2,18	24,12	8,84	3,41
	3	10,14	-3,43	-3,05	29,31	8,89	-3,27
	4αρ	-11,86	-39,33	-30,19	17,56	-10,15	-38,75
	4δ	1,74	-25,73	-16,59	31,16	3,45	-25,15
	5	1,53	-27,70	-15,52	32,10	2,34	-27,03
	6	3,03	-20,26	-7,86	30,47	-0,02	-19,79
	7	12,49	4,34	10,40	27,09	8,29	4,43
	8	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

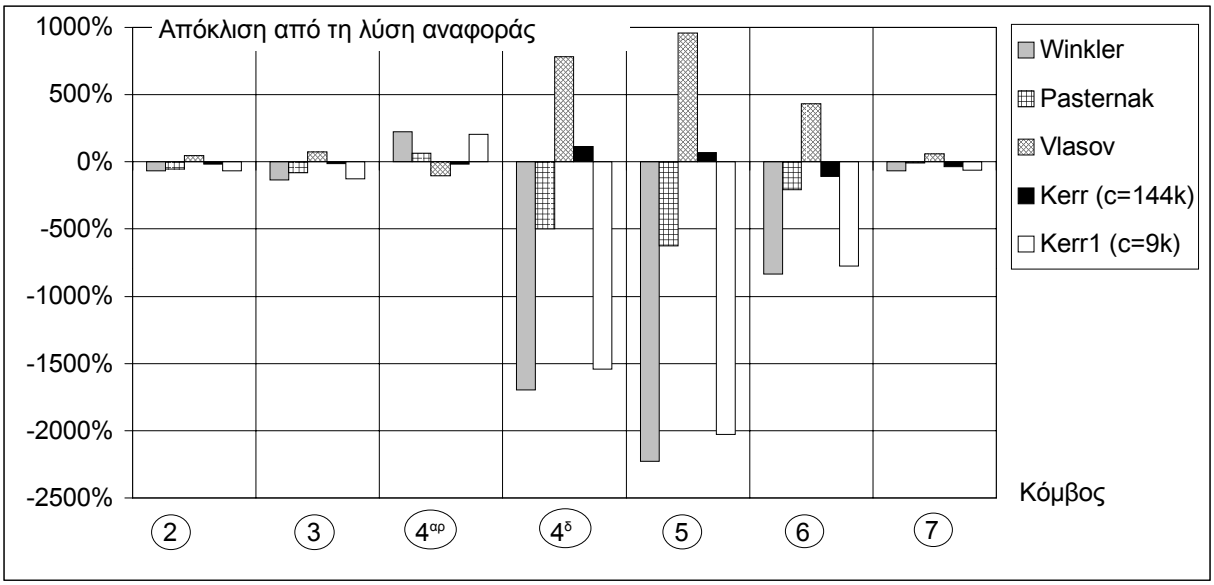
Αποκλίσεις						
Προσομοίωμα:		Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=152k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	2	-68,99%	-79,90%	122,93%	-18,29%	-68,49%
	3	-133,83%	-130,12%	189,07%	-12,30%	-132,28%
	4αρ	231,61%	154,59%	-248,02%	-14,46%	226,71%
	4δ	-1578,67%	-1053,68%	1690,53%	98,56%	-1545,29%
	5	-1910,39%	-1114,41%	1997,79%	52,71%	-1866,89%
	6	-768,74%	-359,30%	905,77%	-100,79%	-753,08%
	7	-65,26%	-16,73%	116,91%	-33,59%	-64,54%

Απότελεσματα επίλυσης με το τροποποιημένο προσομοίωμα Vlasov	γ	k (kN/m^3)	G (kN/m)
	0,03066015	367,71	93991,13



Σχήμα 5.40. Τιμές των καμπτικών ροπών και οι αντίστοιχες αποκλίσεις που προκύπτουν από την χρήση των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς. Έδαφος Ε3 (Χαλαρή άμμος), Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

Απόλυτες τιμές							
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=144k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	2	26,69	8,51	11,92	39,50	21,71	9,42
	3	24,91	-8,29	4,87	43,08	21,72	-6,03
	4αρ	-30,02	-97,60	-49,82	1,19	-25,40	-91,39
	4δ	3,98	-63,60	-15,82	35,19	8,60	-57,39
	5	3,22	-68,54	-16,88	34,05	5,50	-62,13
	6	6,84	-50,23	-7,31	36,31	-0,44	-46,18
	7	30,90	10,92	27,98	49,61	20,63	11,60
	8	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Αποκλίσεις							
Προσομοίωμα:			Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=144k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	2		-68,13%	-55,34%	47,99%	-18,67%	-64,70%
	3		-133,29%	-80,44%	72,95%	-12,81%	-124,20%
	4αρ		225,13%	65,95%	-103,98%	-15,38%	204,44%
	4δ		-1698,11%	-497,42%	784,28%	116,03%	-1542,00%
	5		-2228,42%	-624,12%	957,51%	70,80%	-2029,42%
	6		-834,37%	-206,84%	430,82%	-106,47%	-775,21%
	7		-64,67%	-9,46%	60,55%	-33,25%	-62,45%
Απότελεσματα επίλυσης με το τροποποιημένο προσομοίωμα Vlasov					γ	k (kN/m^3)	G (kN/m)
					0,030744795	1636,05	387286,48

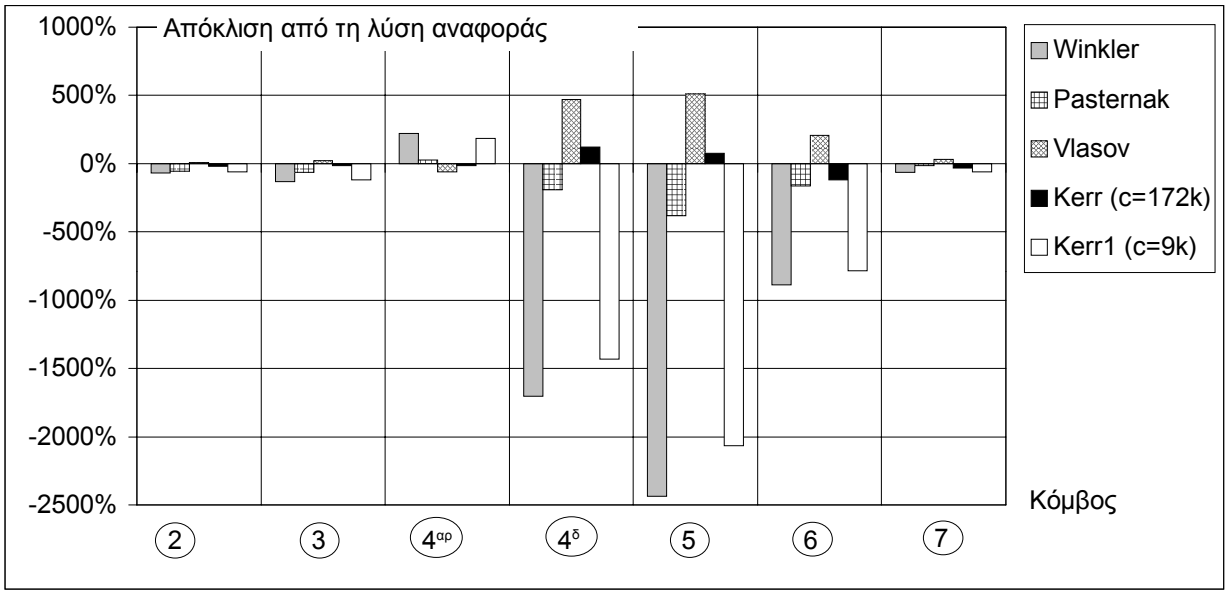


Σχήμα 5.41. Τιμές των καμπτικών ροπών και οι αντίστοιχες αποκλίσεις που προκύπτουν από την χρήση των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς. Έδαφος Ε4 (Πυκνή άμμος), Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

Απόλυτες τιμές							
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=172k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	2	26,41	8,63	12,37	28,89	21,09	10,29
	3	24,57	-8,00	8,29	29,71	20,97	-3,96
	4αρ	-30,08	-96,85	-37,50	-11,60	-25,26	-86,22
	4δ	3,92	-62,85	-3,50	22,40	8,74	-52,22
	5	2,90	-67,79	-8,14	17,75	5,10	-57,04
	6	6,31	-49,78	-4,04	19,50	-1,15	-43,17
	7	30,71	10,99	26,19	39,58	20,36	12,08
	8	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

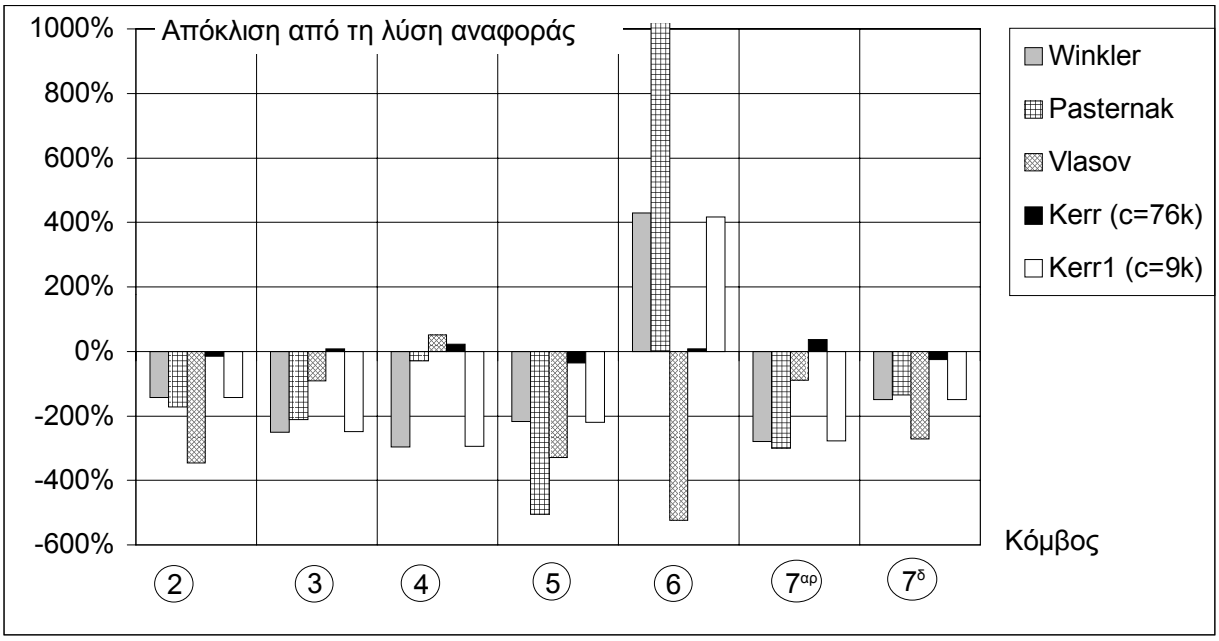
Αποκλίσεις						
Προσομοίωμα:		Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=172k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	2	-67,32%	-53,15%	9,41%	-20,16%	-61,03%
	3	-132,54%	-66,28%	20,93%	-14,65%	-116,11%
	4αρ	221,98%	24,68%	-61,44%	-16,02%	186,65%
	4δ	-1703,35%	-189,39%	471,42%	122,89%	-1432,24%
	5	-2437,47%	-380,65%	511,92%	75,83%	-2066,91%
	6	-888,96%	-164,02%	209,03%	-118,22%	-784,22%
	7	-64,22%	-14,73%	28,87%	-33,72%	-60,67%

Απότελεσματα επίλυσης με το τροποποιημένο προσομοίωμα Vlasov	γ	k (kN/m^3)	G (kN/m)
	0,032213727	2995,05	884537,92



Σχήμα 5.42. Τιμές των καμπτικών ροπών και οι αντίστοιχες αποκλίσεις που προκύπτουν από την χρήση των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς. Έδαφος Ε5 (Αμμοχάλικο), Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

Απόλυτες τιμές							
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=76k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	1	-5,87	0,00	0,00	41,15	0,00	0,00
	2	-17,76	7,68	12,78	43,65	-14,93	7,70
	3	20,14	-30,22	-22,49	1,54	21,56	-30,13
	4	4,44	-8,75	3,16	6,70	5,46	-8,60
	5	-4,14	4,87	16,73	9,47	-2,68	4,91
	6	1,34	7,09	16,40	-5,68	1,44	6,94
	7αρ	-17,49	31,28	35,11	-1,82	-24,09	31,10
	7δ	27,01	-13,22	-9,39	-46,32	20,41	-13,40
	8	11,83	0,00	0,00	-44,39	0,00	0,00
Αποκλίσεις							
Προσομοίωμα:			Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=76k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	2		-143,23%	-171,95%	-345,78%	-15,94%	-143,38%
	3		-250,05%	-211,68%	-92,36%	7,07%	-249,61%
	4		-297,07%	-28,93%	50,95%	22,94%	-293,73%
	5		-217,56%	-504,22%	-328,86%	-35,34%	-218,66%
	6		429,33%	1123,57%	-523,56%	7,12%	417,75%
	7αρ		-278,87%	-300,76%	-89,57%	37,71%	-277,84%
	7δ		-148,93%	-134,76%	-271,51%	-24,42%	-149,59%
Απότελεσματα επίλυσης με το τροποποιημένο προσομοίωμα Vlasov					γ	k (kN/m^3)	G (kN/m)
					0,02998748	203,13	45452,21

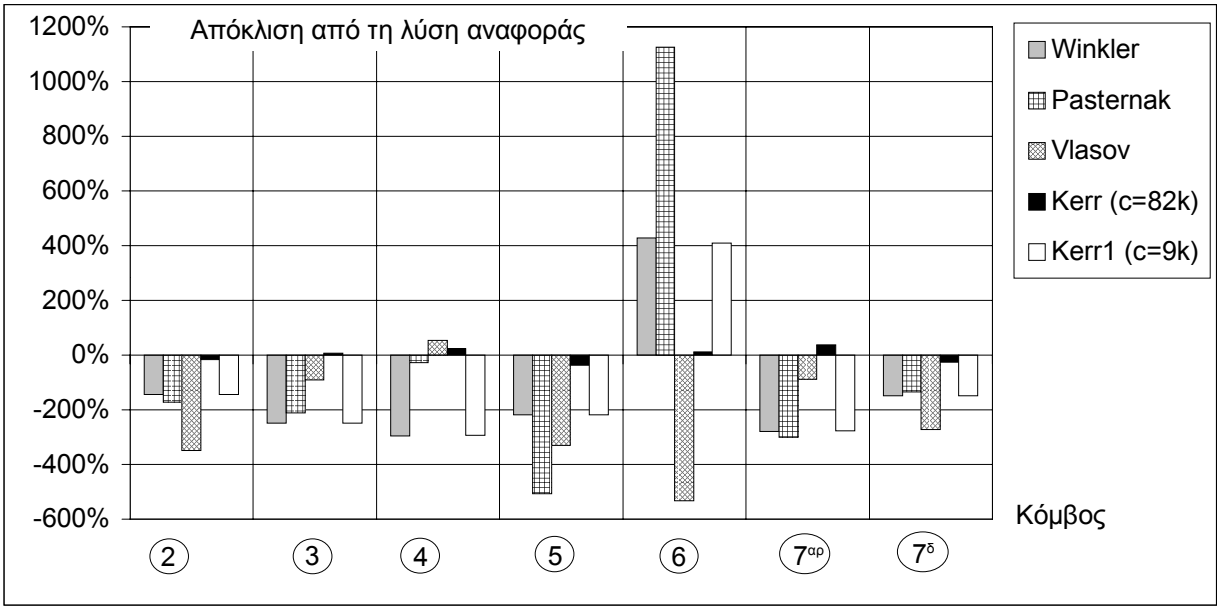


Σχήμα 5.43. Τιμές των τεμνουσών δυνάμεων και οι αντίστοιχες αποκλίσεις που προκύπτουν από την χρήση των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς. Έδαφος Ε1 (Άργιλος μέσης πυκνότητας), Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

Απόλυτες τιμές							
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=82k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	1	-5,91	0,00	0,00	41,74	0,00	0,00
	2	-17,75	7,69	12,80	44,11	-14,96	7,82
	3	20,14	-30,20	-22,47	1,93	21,49	-29,99
	4	4,46	-8,74	3,19	6,86	5,46	-8,57
	5	-4,13	4,86	16,76	9,51	-2,60	4,85
	6	1,34	7,08	16,41	-5,81	1,50	6,81
	7αρ	-17,51	31,27	35,12	-2,14	-24,12	31,03
	7δ	26,99	-13,23	-9,38	-46,64	20,38	-13,47
	8	11,92	0,00	0,00	-44,82	0,00	0,00

Αποκλίσεις						
Προσομοίωμα:		Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=82k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	2	-143,32%	-172,09%	-348,53%	-15,74%	-144,05%
	3	-249,97%	-211,55%	-90,44%	6,69%	-248,92%
	4	-296,07%	-28,56%	53,83%	22,41%	-292,14%
	5	-217,70%	-505,82%	-330,36%	-36,95%	-217,51%
	6	428,17%	1124,75%	-533,38%	12,17%	408,15%
	7αρ	-278,60%	-300,56%	-87,76%	37,73%	-277,21%
	7δ	-149,01%	-134,76%	-272,82%	-24,47%	-149,91%

Απότελεσματα επίλυσης με το τροποποιημένο προσομοίωμα Vlasov	γ	k (kN/m^3)	G (kN/m)
	0,03066015	367,71	93991,13

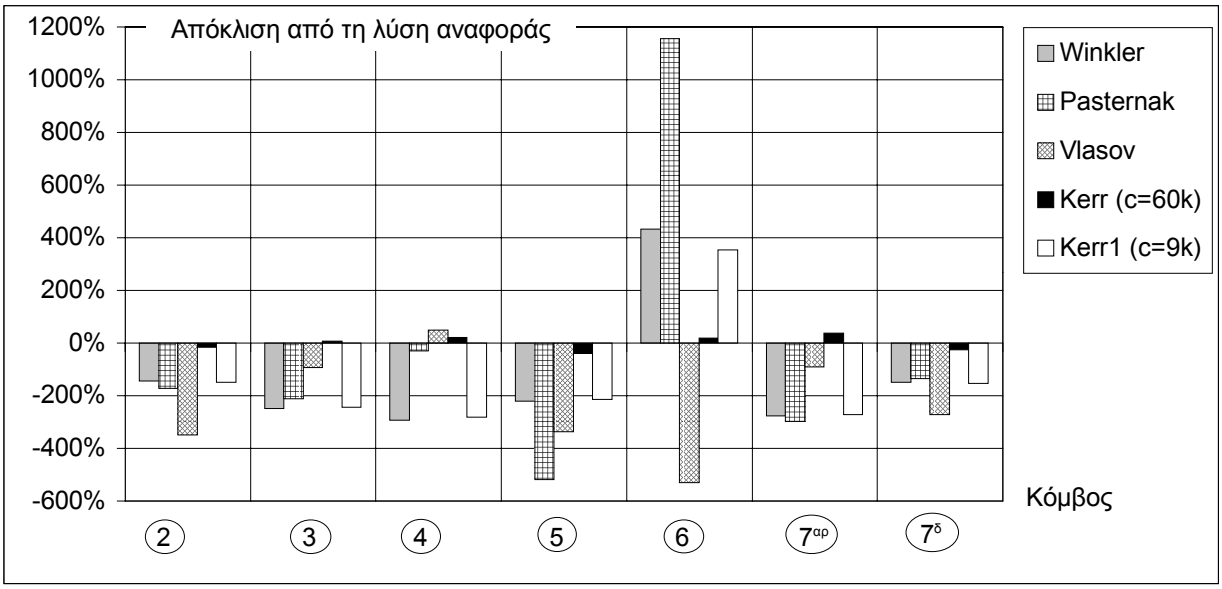


Σχήμα 5.44. Τιμές των τεμνουσών δυνάμεων και οι αντίστοιχες αποκλίσεις που προκύπτουν από την χρήση των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς. Έδαφος Ε3 (Χαλαρή άμμος), Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

Απόλυτες τιμές							
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=60k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	1	-14,45	0,00	0,00	103,02	0,00	0,00
	2	-44,06	19,46	32,02	109,15	-37,10	21,34
	3	50,36	-75,21	-56,14	3,85	53,55	-72,69
	4	11,33	-21,76	7,92	16,81	13,81	-20,64
	5	-10,01	12,04	41,81	23,80	-5,97	11,31
	6	3,26	17,40	40,92	-14,00	3,88	14,76
	7αρ	-44,28	77,99	87,74	-4,41	-61,01	76,07
	7δ	66,97	-33,26	-23,51	-115,66	50,24	-35,18
	8	29,31	0,00	0,00	-110,94	0,00	0,00

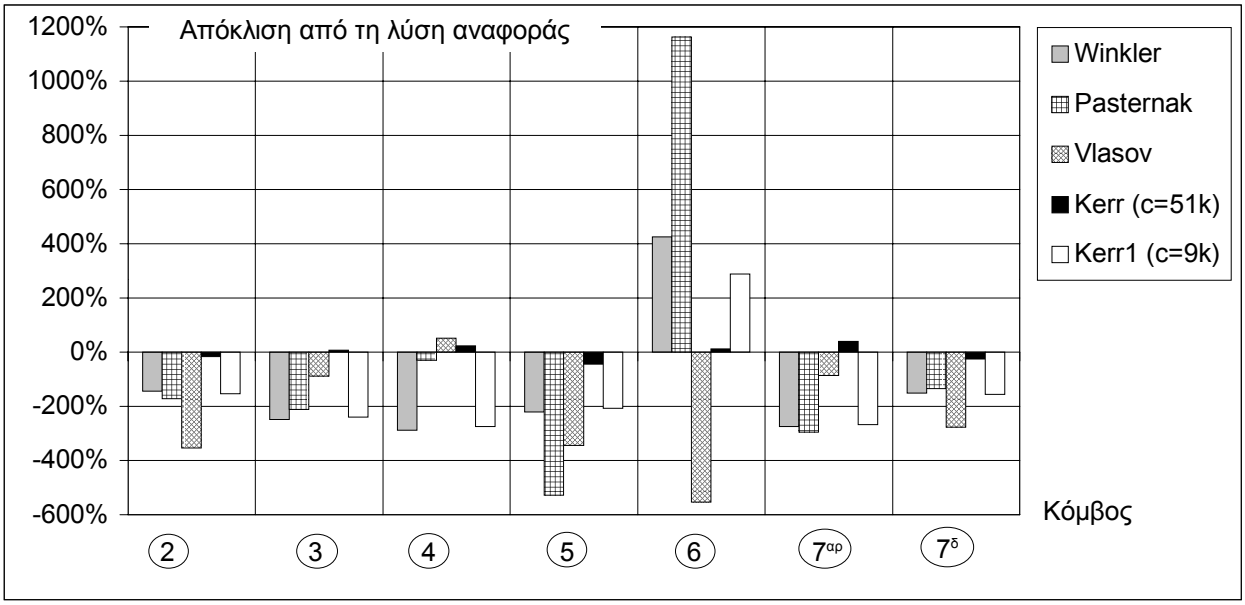
Αποκλίσεις						
Προσομοίωμα:		Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=60k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	2	-144,17%	-172,66%	-347,73%	-15,79%	-148,43%
	3	-249,35%	-211,47%	-92,35%	6,34%	-244,33%
	4	-292,07%	-30,14%	48,33%	21,91%	-282,21%
	5	-220,31%	-517,64%	-337,77%	-40,35%	-213,03%
	6	433,64%	1155,21%	-529,52%	19,04%	352,64%
	7αρ	-276,15%	-298,18%	-90,03%	37,81%	-271,82%
	7δ	-149,67%	-135,10%	-272,72%	-24,98%	-152,53%

Απότελεσματα επίλυσης με το τροποποιημένο προσομοίωμα Vlasov	γ	k (kN/m^3)	G (kN/m)
	0,030744795	1636,05	387286,48



Σχήμα 5.45. Τιμές των τεμνουσών δυνάμεων και οι αντίστοιχες αποκλίσεις που προκύπτουν από την χρήση των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς. Έδαφος Ε4 (Πυκνή άμμος), Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

Απόλυτες τιμές							
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=51k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	1	-14,45	0,00	0,00	105,60	0,00	0,00
	2	-43,77	19,71	32,06	111,24	-36,52	23,06
	3	50,26	-74,89	-56,06	5,60	53,77	-70,50
	4	11,52	-21,66	8,02	17,49	14,12	-19,97
	5	-9,80	11,93	41,91	23,90	-5,51	10,49
	6	3,25	17,08	41,00	-14,71	3,65	12,63
	7αρ	-44,75	77,79	87,78	-5,92	-62,10	74,72
	7δ	66,49	-33,46	-23,47	-117,17	49,15	-36,53
	8	29,52	0,00	0,00	-112,86	0,00	0,00
Αποκλίσεις							
Προσομοίωμα:			Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=51k)	Kerr1 (c=9k)
Κόμβος	2		-145,03%	-173,25%	-354,14%	-16,57%	-152,69%
	3		-249,01%	-211,55%	-88,85%	6,99%	-240,27%
	4		-287,98%	-30,37%	51,81%	22,55%	-273,35%
	5		-221,72%	-527,65%	-343,88%	-43,79%	-207,00%
	6		425,69%	1161,67%	-552,48%	12,16%	288,76%
	7αρ		-273,83%	-296,16%	-86,76%	38,76%	-266,96%
	7δ		-150,33%	-135,30%	-276,24%	-26,07%	-154,95%
Απότελεσματα επίλυσης με το τροποποιημένο προσομοίωμα Vlasov					γ	k (kN/m^3)	G (kN/m)
					0,032213727	2995,05	884537,92



Σχήμα 5.46. Τιμές των τεμνουσών δυνάμεων και οι αντίστοιχες αποκλίσεις που προκύπτουν από την χρήση των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς. Έδαφος Ε5 (Αμμοχάλικο), Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

Από τα σχήματα 5.35 – 5.38 εξάγεται το συμπέρασμα, ότι το προσομοίωμα τριών παραμέτρων του Kerr με τη θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού πλεονεκτεί σαφώς όλων των υπολοίπων προσομοιωμάτων όσον αφορά την προσέγγιση των κατακορύφων μετακινήσεων, εάν δοθούν στον συντελεστή συσχέτισης τιμές μεταξύ του 9 και 10. Πιο συγκεκριμένα, η τιμή n_{ck}=9 οδηγεί σε αποτελέσματα που δεν αποκλίνουν περισσότερο από ±10% σε κανέναν από τους κόμβους της δοκού στην περίπτωση της μελέτης του εδάφους Ε1. Αντίστοιχα, για όλες τις υπόλοιπες κατηγορίες εδάφους που εξετάστηκαν η βέλτιστη τιμή του συντελεστή συσχέτισης είναι η τιμή n_{ck}=10. Επομένως, η βασική παρατήρηση που μπορεί να γίνει όσον αφορά τις κατακόρυφες μετακινήσεις είναι, ότι και στην περίπτωση της μελέτης δοκών πεπερασμένου μήκους με σύνθετα συστήματα φόρτισης, το εύρος διακύμανσης των απαιτούμενων για τη βέλτιστη σύγκλιση των κατακορύφων μετακινήσεων συντελεστών συσχέτισης n_{ck}, είναι της ίδιας τάξης μεγέθους όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση φόρτισης με μοναχικές δυνάμεις ή ροπές. Υπενθυμίζεται ότι στις περιπτώσεις των μοναχικών φορτίσεων, οι τιμές που αποδίδουν τα βέλτιστα αποτελέσματα όσον αφορά την σύγκλιση των κατακορύφων μετακινήσεων είναι n_{ck}=7 για τα «μαλακά», και n_{ck}=8 για τα «σκληρά» εδάφη. Αν γίνονταν χρήση των τιμών αυτών και στην παρούσα περίπτωση, οι αποκλίσεις του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων θα έφταναν σε ορισμένους κόμβους έως και το 20% – 25%. Ωστόσο και με τις τιμές αυτές, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων πλεονεκτεί όλων των υπολοίπων σε κάθε περίπτωση, όπως γίνεται φανερό από την μελέτη των σχημάτων 5.35 – 5.38.

Όσον αφορά τα υπόλοιπα προσομοιώματα αξίζει να σημειωθεί, ότι το προσομοίωμα του Vlasov αποδίδει τα αμέσως πιο αποδεκτά αποτελέσματα, με μεγάλη ωστόσο διαφορά από το προσομοίωμα του Kerr (αποκλίσεις της τάξης του 30 – 40% για κάθε κατηγορία εδάφους). Μάλιστα και στην παρούσα περίπτωση, το προσομοίωμα του Vlasov αποδίδει συστηματικά μικρότερες τιμές μετακινήσεων από το προσομοίωμα αναφοράς. Τέλος, τα άλλα τρία προσομοιώματα που εξετάστηκαν (Pasternak, Winkler, και Kerr χωρίς την θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού) αποτυγχάνουν πλήρως στην απόδοση αποτελεσμάτων ανεκτής απόκλισης, καθώς οι αποκλίσεις τους υπερβαίνουν σε κάθε περίπτωση το 100%. Επομένως δεν έχει νόημα μια λεπτομερής καταγραφή των επιμέρους χαρακτηριστικών των επιδόσεών τους.

Από τα παραπάνω καθίσταται σαφής και στην παρούσα περίπτωση, η αναγκαιότητα της θεώρησης της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού προκειμένου να επιτευχθεί ικανοποιητική απόδοση των κατακορύφων μετακινήσεων, καθώς τα προσομοιώματα που διαπιστώθηκε ότι αστοχούν δεν έχουν τέτοια δυνατότητα. Πέραν τούτου όμως διαπιστώνεται και περαιτέρω βελτίωση των αποτελεσμάτων, εάν ληφθούν υπόψη οι επιπλέον τοπικές παραμορφώσεις ακριβώς κάτω από την φορτιζόμενη περιοχή του εδάφους, τις οποίες μόνον το προσομοίωμα του Kerr μπορεί να αποδώσει.

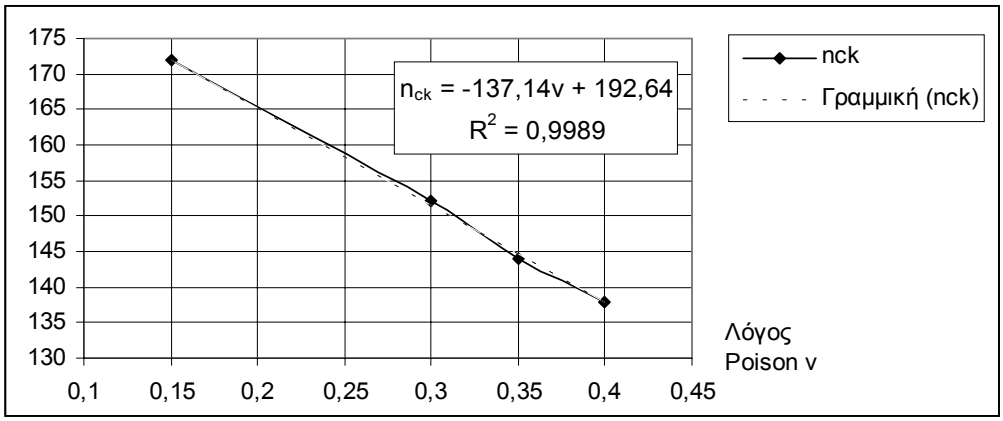
Όσον αφορά τις τιμές των καμπτικών ροπών, τα συμπεράσματα δεν είναι και τόσο ξεκάθαρα σχετικά με την σύγκλιση του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων προς τη λύση αναφοράς. Παρακάτω θα δοθούν αναλυτικά οι παρατηρήσεις που προέκυψαν από τις παραμετρικές αναλύσεις για κάθε προσομοίωμα ξεχωριστά. (Σκοπίμως, η παρουσίαση των συμπερασμάτων για το προσομοίωμα του Kerr με τη θεώρηση του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού θα παρουσιαστεί τελευταία, καθώς συνοδεύεται από τις παραμετρικές αναλύσεις προσδιορισμού των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης n_{ck} όπως τονίστηκε παραπάνω).

- Από τα Σχήματα 5.39 – 5.42 προκύπτει το συμπέρασμα, ότι τα προσομοιώματα του Winkler και του Kerr χωρίς τη θεώρηση του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού εμφανίζουν ισοδύναμα αποτελέσματα, τα οποία όμως κρίνονται απορριπτέα καθώς ειδικά στους κόμβους 4, 5, 6 οι αποκλίσεις αποδίδουν είναι άνω του 1500%. Αλλά και στους υπόλοιπους κόμβους η μικρότερη απόκλιση υπερβαίνει το 70%. Πέραν τούτου αξιοσημείωτο είναι και το γεγονός, ότι εκτός των υπερβολικά μεγάλων αποκλίσεων, παρατηρούνται και διαφορές προσήμου μεταξύ των αποτελεσμάτων των προσομοιωμάτων αυτών και των αποτελεσμάτων αναφοράς σε πολλούς από τους κόμβους που εξετάστηκαν.
- Το προσομοίωμα του Pasternak, το οποίο δεν λαμβάνει υπόψη την επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού, εμφανίζει ποιοτικά τα ίδια αποτελέσματα με τα δυο προηγούμενα προσομοιώματα, με λίγο μικρότερες αποκλίσεις οι οποίες όμως δεν παύουν να είναι σημαντικότατες (της τάξης του 1000 – 1300% στους κόμβους 4, 5, 6). Η εικόνα αυτή συναντάται στα «μαλακά» εδάφη Ε1 και Ε3. Στα «σκληρά» εδάφη Ε4 και Ε5 οι αποκλίσεις μειώνονται αισθητά χωρίς όμως να μπορούν να θεωρηθούν μικρές, καθώς ειδικά στους κόμβους 4, 5, 6 – που είναι και οι πιο δυσμενείς από πλευράς αποκλίσεων – κυμαίνονται μεταξύ του 150 και του 600%
- Το προσομοίωμα του Vlasov εμφανίζει την πιο δυσμενή συμπεριφορά από όλα τα υπόλοιπα προσομοιώματα που εξετάστηκαν στην περίπτωση μελέτης των «μαλακών» εδαφών Ε1 και Ε3. Αντίθετα στην περίπτωση μελέτης των «σκληρών» εδαφών Ε4 και Ε5, εμφανίζει μια πιο βελτιωμένη εικόνα από τα προσομοιώματα των Winkler και Kerr χωρίς την θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού. Ωστόσο, και στην περίπτωση αυτή, αν και η βελτίωση των αποτελεσμάτων του είναι πολύ σημαντική, υστερεί του προσομοιώματος του Pasternak καθώς αποδίδει μεγαλύτερες αποκλίσεις από το τελευταίο. Αξιοσημείωτο όμως είναι το γεγονός, ότι παρά τις κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερες αποκλίσεις που αποδίδει, το προσομοίωμα του Vlasov επιτυγχάνει ταύτιση των προσήμων των καμπτικών ροπών με τα πρόσημα των αποτελεσμάτων αναφοράς, σε όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις και σχεδόν σε όλους τους κόμβους της δοκού.
- Το προσομοίωμα του Kerr με τη θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού, έχει τη δυνατότητα μεγαλύτερης προσέγγισης στις τιμές αναφοράς από τα προαναφερόμενα προσομοιώματα, λόγω της ευελιξίας του στην επιλογή του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των παραμέτρων k και c. Το πρόβλημα επομένως – όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα – έγκειται στον προσδιορισμό του κατάλληλου συντελεστή συσχέτισης. Όπως φαίνεται και από τα σχήματα 5.39 – 5.42, υπάρχει για κάθε κατηγορία εδάφους μια συγκεκριμένη, και σε κάθε περίπτωση διαφορετική, τιμή του n_{ck} για την οποία τα αποτελέσματα του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων εμφανίζουν ικανοποιητική – συγκριτικά πάντα με τα υπόλοιπα προσομοιώματα – προσέγγιση στα αποτελέσματα αναφοράς. Συνοψίζοντας τα δεδομένα των σχημάτων 5.39 – 5.42, οι βέλτιστοι συντελεστές ανά κατηγορία εδάφους είναι:

  Ε1 → n_{ck}=138, Ε3 → n_{ck}=152, Ε4 → n_{ck}=144, Ε5 → n_{ck}=172.

  Όπως γίνεται κατανοητό, οι συντελεστές αυτοί εμφανίζουν μια διασπορά, όχι πάντως υπερβολικά μεγάλη, που δεν επιτρέπει εξαρχής την πρόταση μιας ενιαίας βέλτιστης τιμής για το συντελεστή n_{ck} ανεξάρτητης από την κατηγορία εδάφους που μελετάται.

Ωστόσο αξίζει να γίνει η παρατήρηση, ότι αν συνδυαστούν οι βέλτιστες τιμές του συντελεστή συσχέτισης n_{ck} με το λόγο του Poison ν κάθε μιας από τις κατηγορίες εδάφους που εξετάστηκαν, προκύπτει το συμπέρασμα ότι υπάρχει συσχέτιση μεταξύ τους, πως φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα.



Όπως φαίνεται η συσχέτιση αυτή είναι σχεδόν γραμμική. Βέβαια η παραπάνω παρατήρηση έχει εξαχθεί από μια συγκεκριμένη φορτιστική κατάσταση, και προκειμένου να ελεγχθεί η πιο γενική ισχύς της θα πρέπει να αποδειχθεί και για διαφορετικές φορτιστικές καταστάσεις. Ωστόσο, αν θα έπρεπε να προταθεί ένα συγκεκριμένο εύρος τιμών για τον συντελεστή συσχέτισης n_{ck} προκειμένου να επιτευχθεί μια ικανοποιητική σύγκλιση των τιμών των καμπτικών ροπών προς τις τιμές αναφοράς, θα μπορούσαν να προταθούν οι εξής τιμές:

Για τα «μαλακά» εδάφη Ε1 και Ε3: n_{ck}=140 – 145.

Για τα «σκληρά» εδάφη Ε4 και Ε5: n_{ck}=155 – 160.

Για τιμές του συντελεστή συσχέτισης που ανήκουν σ' αυτά τα πεδία τιμών, επιτυγχάνονται συγκλίσεις που δεν διαφέρουν πολύ από τις συγκλίσεις που επιτυγχάνονται με τους βέλτιστους συντελεστές που παρουσιάστηκαν πιο πάνω (Σχήματα 5.39 – 5.42).

Τέλος, όσον αφορά τις τέμνουσες δυνάμεις θα πρέπει να τονιστούν τα εξής (Σχήματα 5.43 – 5.46):

- Τα προσομοιώματα του Winkler και του Kerr χωρίς τη θεώρηση του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού, εξακολουθούν να είναι σχεδόν ισοδύναμης απόδοσης, όπως και στην περίπτωση του ελέγχου των καμπτικών ροπών. Ωστόσο στην παρούσα περίπτωση, οι αποκλίσεις τους είναι εμφανώς μικρότερες αλλά όχι και αποδεκτές, καθώς κυμαίνονται κατά κανόνα μεταξύ του 150% και 450%. Οι αποκλίσεις αυτές μειώνονται σε γενικές γραμμές στην περίπτωση των «σκληρών» εδαφών Ε4 και Ε5.
- Το προσομοίωμα του Pasternak, ενώ στην περίπτωση του ελέγχου των καμπτικών ροπών εμφανιζόταν ελαφρά πιο αποδοτικό από τα δυο προηγούμενα, στην περίπτωση του ελέγχου των τεμνουσών δυνάμεων εμφανίζεται σχεδόν ισοδύναμο με αυτά (εξαίρεση αποτελεί η τοπική έξαρση των αποκλίσεων που αποδίδει στους κόμβους 4^{δ} και 5).
- Το προσομοίωμα του Vlasov αποδίδει και αυτό σημαντικές αποκλίσεις, οι οποίες είναι όμως μικρότερες απ' ότι στην περίπτωση του ελέγχου των καμπτικών ροπών. Βέβαια, και στην παρούσα περίπτωση είναι σημαντικές καθώς με ελάχιστες εξαιρέσεις είναι αρκετά μεγαλύτερες του 80%. Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό

του προσομοιώματος του Vlasov – που το διαφοροποιεί από τα υπόλοιπα – είναι η απόδοση μη μηδενικών τιμών για τις τέμνουσες δυνάμεις στα άκρα της δοκού. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην προσθήκη μεταφορικών ελατηρίων στα άκρα της δοκού, μέσω των οποίων επιτυγχάνεται η θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν αυτής σύμφωνα με τις παραδοχές με τις οποίες καταστρώνονται οι βασικές εξισώσεις του προσομοιώματος.

– Όσον αφορά το προσομοίωμα του Kerr με θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν της δοκού, οι βέλτιστοι συντελεστές ανά κατηγορία εδάφους είναι:

  E1 → n_{ck}=76, E3 → n_{ck}=82, E4 → n_{ck}=60, E5 → n_{ck}=51.

  Βέβαια, θα πρέπει να τονιστεί ότι ακόμα και για τους συντελεστές αυτούς οι αποκλίσεις δεν είναι ιδιαίτερα μικρές, αλλά δεν υπερβαίνουν σε καμία περίπτωση και σε κανένα κόμβο το 45%, τη στιγμή που οι αποκλίσεις των άλλων προσομοιωμάτων είναι πολύ μεγαλύτερες. Επομένως, και στην περίπτωση του ελέγχου των τεμνουσών δυνάμεων, το προσομοίωμα του Kerr υπερτερεί σαφώς των υπολοίπων προσομοιωμάτων. Ωστόσο το πρόβλημα που τίθεται και εδώ είναι το εύρος διακύμανσης των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης n_{ck}. Από τις παραμετρικές αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν, αποδείχθηκε ότι δεν εμφανίζονται ιδιαίτερα μεγάλες διακυμάνσεις στις αποκλίσεις για τιμές του συντελεστή n_{ck}=75 – 80 για τα «μαλακά» εδάφη E1 και E3. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να προταθεί η τιμή n_{ck}=78 για τις περιπτώσεις των «μαλακών» εδαφών, ενώ η αντίστοιχη τιμή για τα «σκληρά» εδάφη είναι n_{ck}=55. Για τις τιμές αυτές και στις δυο περιπτώσεις – «μαλακών» και «σκληρών» εδαφών – οι αποκλίσεις δεν υπερβαίνουν σε καμία περίπτωση το 45%. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν επίσης, τα αποτελέσματα του ελέγχου των τιμών των τεμνουσών δυνάμεων όταν στους συντελεστές συσχέτισης δοθούν οι τιμές με τις οποίες αποδίδονται οι βέλτιστες αποκλίσεις των καμπτικών ροπών (δηλαδή οι τιμές n_{ck}=140 – 145 για τα «μαλακά» εδάφη E1 και E3, και n_{ck}=155 – 160 για τα «σκληρά» εδάφη E4 και E5). Ο έλεγχος αυτός για τα «μαλακά» εδάφη οδήγησε στο συμπέρασμα, ότι οι αποκλίσεις των τεμνουσών δυνάμεων στην περίπτωση που γίνεται χρήση των συντελεστών n_{ck}=140 – 145 δεν μεταβάλλονται σημαντικά, αν εξαιρεθούν οι αποκλίσεις στον κόμβο 6 οι οποίες αν και αυξάνονται υπερβολικά (π.χ. από το 7.12% στο 250% στην περίπτωση του εδάφους E1) ωστόσο παραμένουν μικρότερες από τις αποκλίσεις που αποδίδουν τα υπόλοιπα προσομοιώματα. Επιπλέον σε ορισμένους κόμβους, όπως οι κόμβοι 2 και 4, αποδίδονται μικρότερες αποκλίσεις (π.χ. από το –15.9% στο 2.5% στον κόμβο 2 κατά τη μελέτη του εδάφους E1). Η ίδια εικόνα διατηρείται και στην περίπτωση του αντίστοιχου ελέγχου για τα «σκληρά» εδάφη E4 και E5. Επομένως μπορεί να ειπωθεί συμπερασματικά, ότι είναι δυνατή η πρόταση συντελεστών συσχέτισης για τους οποίους επιτυγχάνονται ικανοποιητικές προσεγγίσεις των τιμών των καμπτικών ροπών και των τεμνουσών δυνάμεων. Δεν θα πρέπει βέβαια να παραβλέπονται και οι εξαιρέσεις κατά τις οποίες οι κοινοί συντελεστές συσχέτισης οδηγούν σε πολύ μεγαλύτερες αποκλίσεις από τις αντίστοιχες αποκλίσεις που αποδίδουν οι κατά περίπτωση βέλτιστοι συντελεστές. Ωστόσο οι εξαιρέσεις αυτές είναι λίγες και δεν μπορούν να ανατρέψουν την γενική εικόνα που περιγράφηκε προηγουμένως.

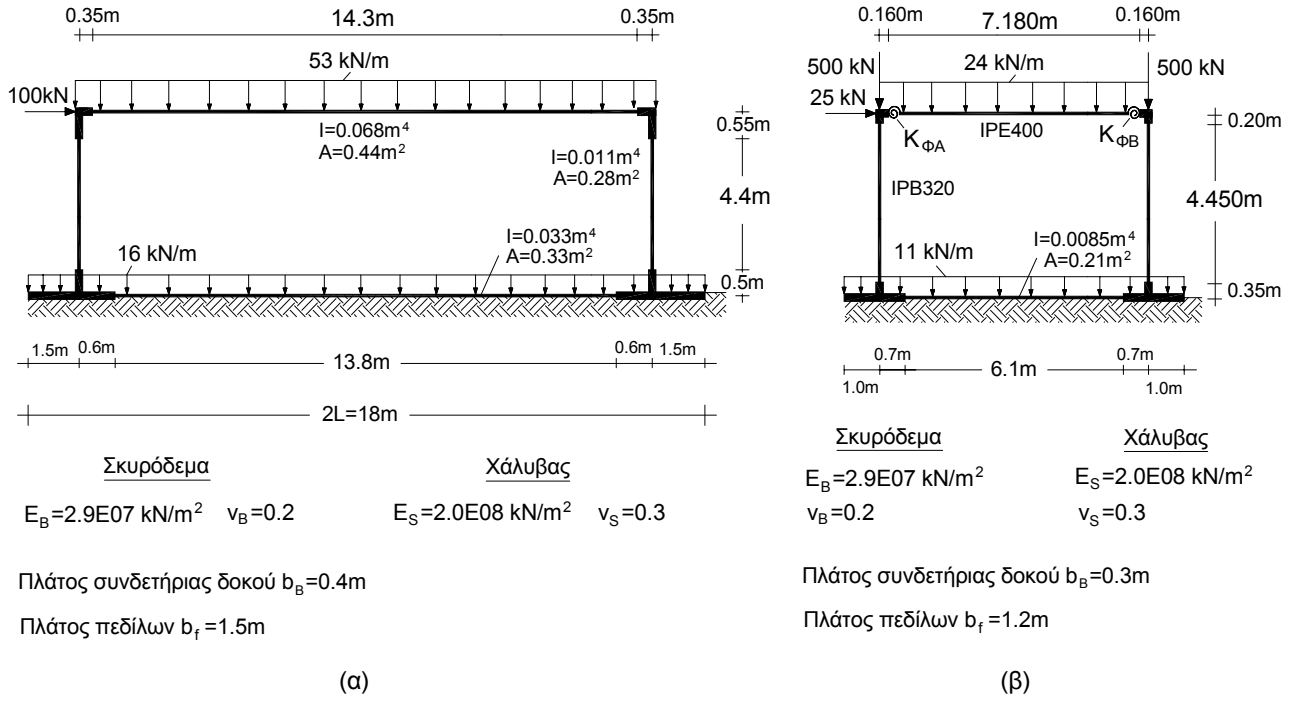
5.3.3. Παραδείγματα Ομάδας 3: Εφαρμογές του Προτεινόμενου Γενικευμένου στοιχείου

Με την τρίτη ομάδα παραδειγμάτων επιχειρείται η εφαρμογή του προτεινόμενου στην παρούσα διατριβή γενικευμένου στοιχείου, στην προσομοίωση δομικών στοιχείων θεμελίωσης, αλλά και δομικών στοιχείων ανωδομής με ημιάκαμπτες συνδέσεις. Παράλληλα διερευνάται η εφαρμοσιμότητα του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων σε πιο σύνθετα συστήματα φορέων θεμελίωσης.

5.3.3.1. Παράδειγμα 3α: Απλό Πλαίσιο στα πλαίσια της θεωρίας α' και β' τάξης

Το πρώτο παράδειγμα της ομάδας συνίσταται στην επίλυση των δυο επιπέδων πλαισίων του Σχήματος 5.47. Οι επιλύσεις πραγματοποιήθηκαν κυρίως στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης, ενώ έγινε και μια επίλυση του φορέα του Σχήματος 5.47β στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης. Πιο συγκεκριμένα έγιναν οι παρακάτω αναλύσεις:

1. Ανάλυση του πλαισίου οπλισμένου σκυροδέματος του Σχήματος 5.47α στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης (Επίλυση 3.α1).
2. Ανάλυση του μικτού πλαισίου του Σχήματος 5.47β στα πλαίσια της θεωρίας α' και β' τάξης (Επίλυση 3.α2).
3. Ανάλυση του πλαισίου οπλισμένου σκυροδέματος του Σχήματος 5.47α στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης χωρίς οριζόντια φόρτιση (Επίλυση 3.α3).



Σχήμα 5.47. (α) Επίπεδο πλαίσιο οπλισμένου σκυροδέματος, (β) Επίπεδο μεταλλικό πλαίσιο με φορέα θεμελίωσης από οπλισμένο σκυρόδεμα.

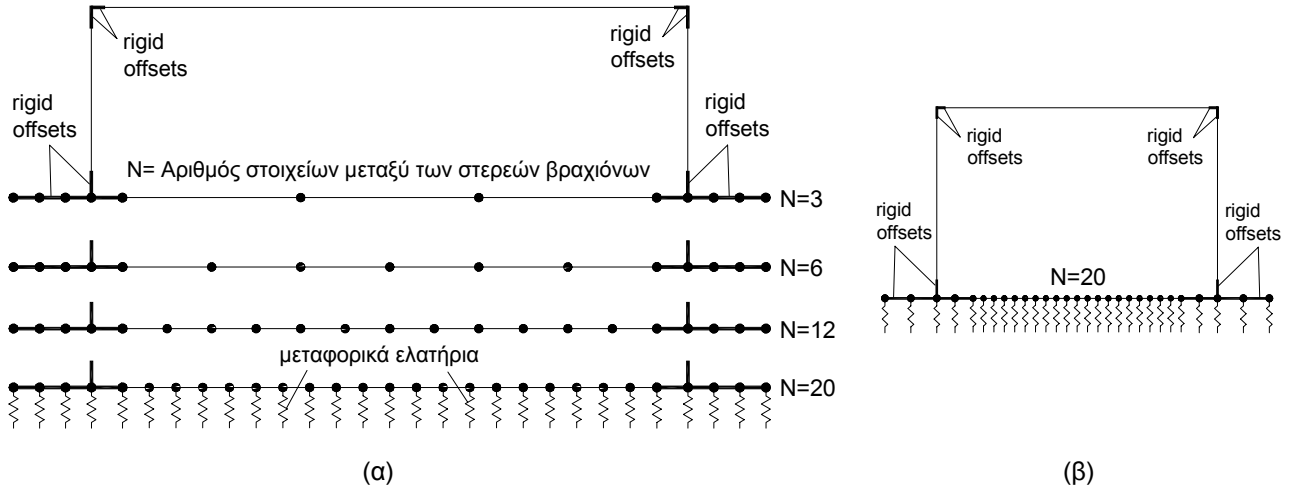
Για την διενέργεια των αναλύσεων συντάχθηκαν αλγόριθμοι σε γλώσσες προγραμματισμού QBASIC και FORTAN 90, ενώ για τις συγκρίσεις των αποτελεσμάτων με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις αντίστοιχες συμβατικές αναλύσεις, έγινε χρήση του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων SAP2000.

Επίλυση 3.α1

Η Επίλυση 3.α1 αποσκοπεί στην σύγκριση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την επίλυση του πλαισίου οπλισμένου σκυροδέματος του Σχήματος 5.47α αφενός με το προτεινόμενο στοιχείο, και αφετέρου από τις αντίστοιχες επιλύσεις με συμβατικά στοιχεία δοκού και συμβατικές τεχνικές προσομοίωσης. Ως εδαφικό προσομοίωμα χρησιμοποιείται αποκλειστικά το προσομοίωμα του Winkler καθώς είναι το μοναδικό εδαφικό μηχανικό προσομοίωμα που μπορεί να μοντελοποιηθεί με τα διαθέσιμα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων (εξαιρούνται φυσικά τα προσομοιώματα των πεπερασμένων στοιχείων).

Προκειμένου να εκπληρωθούν οι σκοποί της επίλυσης, οι αναλύσεις πραγματοποιήθηκαν τόσο με χρήση του νέου στοιχείου (κατά την οποία απαιτείται ένα μόνον στοιχείο για την προσομοίωση της συνδετήριας δοκού) όσο και με τέσσερα διαφορετικά συμβατικά μοντέλα του φορέα θεμελίωσης που διαφέρουν μεταξύ τους ως προς την πυκνότητα διακριτοποίησης της συνδετήριας δοκού. Πιο συγκεκριμένα, η συνδετήρια δοκός διακριτοποιήθηκε διαδοχικά με N=3, 6, 12, 20 συνήθη στοιχεία όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.48.

Στόχος της επίλυσης αυτής είναι να καταδείξει αφενός την ευκολία με την οποία το νέο στοιχείο επιτυγχάνει τη σωστή προσομοίωση δοκών επί ελαστικού υποβάθρου και αφετέρου το γεγονός ότι για να επιτευχθεί ακρίβεια αποτελεσμάτων ιδίου επιπέδου απαιτείται η χρήση μεγάλου αριθμού συμβατικών στοιχείων.

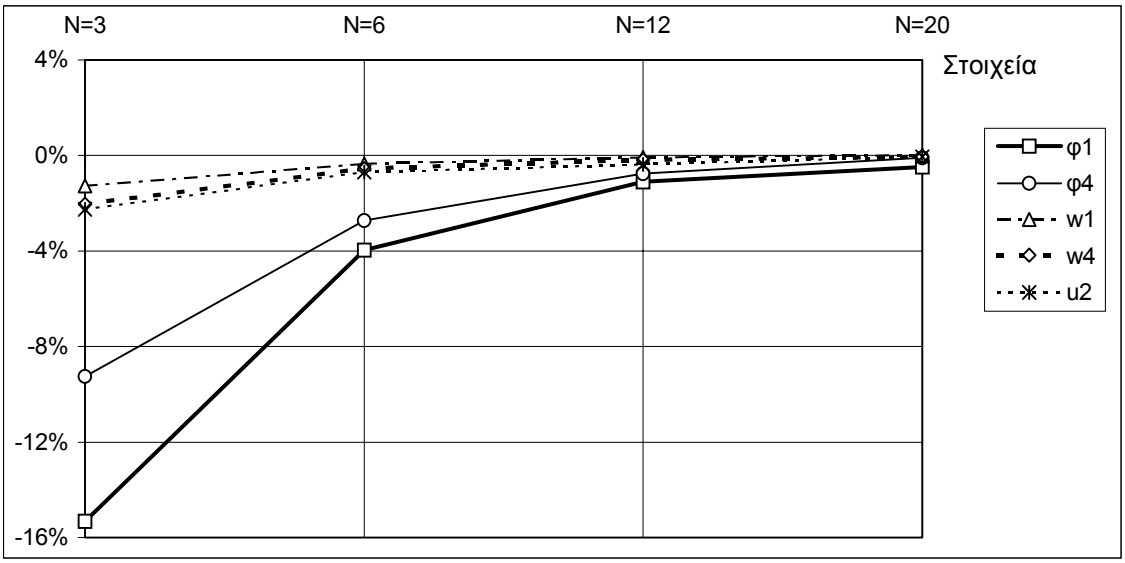


Σχήμα 5.48. Τα τέσσερα συμβατικά προσομοιώματα του φορέα θεμελίωσης των πλαισίων του παραδείγματος 3α.

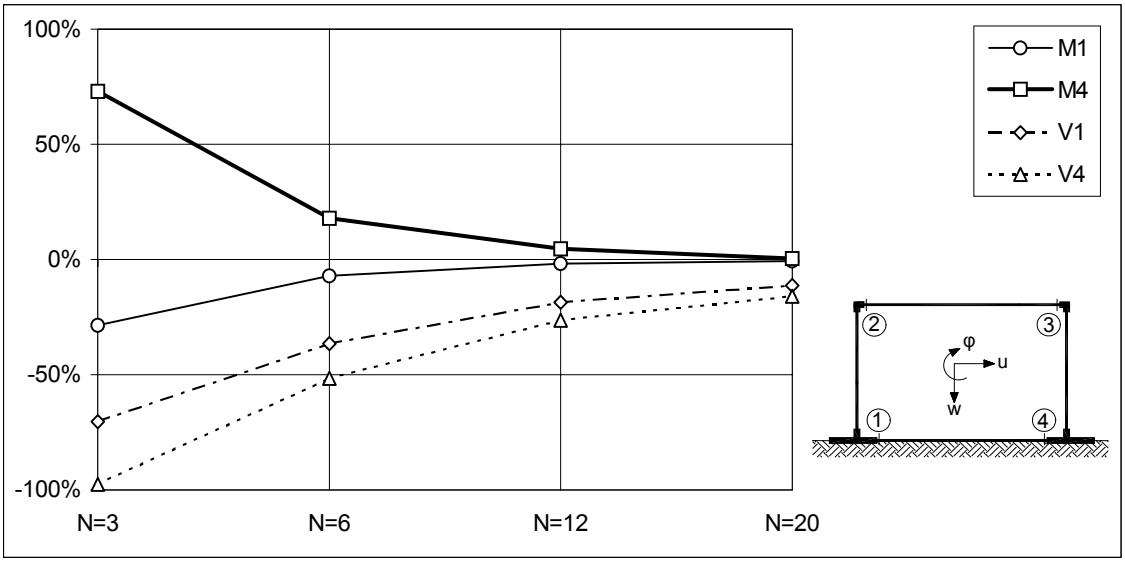
Οι αναλύσεις πραγματοποιήθηκαν με τιμή του δείκτη εδάφους K=6628kN/m^3. Η τιμή αυτή προέκυψε από τους πίνακες του Terzaghi (1955), οι οποίοι έχουν συνταχθεί με βάση πειραματικά δεδομένα. Πιο συγκεκριμένα ο προσδιορισμός της τιμής αυτής έγινε ως εξής:

Ξεκινώντας με την υπόθεση ότι το έδαφος θεμελίωσης αποτελείται από χαλαρή άμμο (N<10), από τους πίνακες του Terzaghi προκύπτει ότι το εύρος διακύμανσης του δείκτη εδάφους είναι: K_{S1}=6400 – 19200kN/m^3. Επιλέγοντας μια μέση τιμή K_{S1}=12800kN/m^3 θα πρέπει εν συνεχεία να ακολουθήσουν οι απαραίτητες διορθώσεις λόγω διαστάσεων των δομικών στοιχείων της θεμελίωσης (Σχέση 2.113) και λόγω του σχήματος τους (Σχέση 2.115). Από την εκτέλεση της διαδικασίας των διορθώσεων της αρχικής τιμής K_{S1}=12800kN/m^3 με βάση τις διαστάσεις της συνδετήριας δοκού (L=13.8m, b=0.4m) προκύπτει η τιμή που

χρησιμοποιήθηκε στους υπολογισμούς. (Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι μια πιο λεπτομερής διαδικασία υπολογισμού του δείκτη εδάφους θα απαιτούσε την ξεχωριστή διαδικασία διόρθωσης της αρχικής τιμής K_{S1}=12800kN/m^3 για τα πέδιλα, καθώς οι γεωμετρικές τους διαστάσεις αλλά και το σχήμα τους είναι διαφορετικά από τα αντίστοιχα στοιχεία της συνδετήριας δοκού. Ωστόσο στα πλαίσια της παρούσης ανάλυσης μια τέτοια διαφοροποίηση κρίθηκε ως μη έχουσα ιδιαίτερη αξία υπό το πρίσμα βέβαια των σκοπών της).



(α)



(β)

Σχήμα 5.49 (α) αποκλίσεις των τιμών των μετακινήσεων των κόμβων του πλαισίου που προκύπτουν από την επίλυση με τα συμβατικά προσομοιώματα, από τις τιμές που προκύπτουν από την επίλυση αναφοράς με το προτεινόμενο νέο στοιχείο, (β) αντίστοιχες αποκλίσεις των εντατικών μεγεθών του φορέα θεμελίωσης.

Στα διαγράμματα του σχήματος 5.49 δίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων. Από τα διαγράμματα αυτά προκύπτει ότι τα προσομοιώματα με N=3 και N=6 κλασσικά στοιχεία δοκού κρίνονται ως εντελώς απορριπτέα, καθώς οι μέγιστες αποκλίσεις τους όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη της δοκού θεμελίωσης

κυμαίνονται από 29 – 97% και 8 – 51% αντίστοιχα. Ακόμα και το προσομοίωμα με N=12 στοιχεία αν και εμφανίζεται να είναι αισθητά πιο βελτιωμένο σε σχέση με τα δυο προηγούμενα, εμφανίζει και αυτό αποκλίσεις της τάξης 5% στις καμπτικές ροπές και 25% στις τέμνουσες. Τέλος, το προσομοίωμα με N=20 εμφανίζεται ως το πιο αποδεκτό καθώς οι αποκλίσεις του δεν υπερβαίνουν το 1% στις καμπτικές ροπές, και το 15% στις τέμνουσες δυνάμεις. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι πραγματοποιήθηκε μια επιπλέον ανάλυση με N=30 στοιχεία προκειμένου να διερευνηθεί εάν υπάρχουν σοβαρά περιθώρια περαιτέρω βελτίωσης των αποτελεσμάτων του προσομοιώματος με N=20 στοιχεία. Από την επίλυση αυτή προέκυψε ότι η περαιτέρω σύγκλιση όσον αφορά τις τέμνουσες δυνάμεις (που αποτελούν την «αχίλλειο πτέρνα» των συμβατικών προσομοιωμάτων) δεν είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς η μείωση της απόκλισης που επιτυγχάνεται δεν υπερβαίνει το 20%. Επομένως, ο αριθμός των 20 στοιχείων είναι (για το συγκεκριμένο παράδειγμα βέβαια) ο ελάχιστος απαιτούμενος για την ικανοποιητική προσέγγιση της ακριβούς λύσης με το προτεινόμενο στοιχείο. Αν ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι οι πιο σύνθετοι φορείς θεμελίωσης αποτελούνται από περισσότερες δοκούς θεμελίωσης, προκύπτει το συμπέρασμα ότι ο συνολικός αριθμός των στοιχείων που απαιτούνται για μια αξιόπιστη ανάλυση είναι αρκετά μεγάλος.

Επίλυση 3.α2

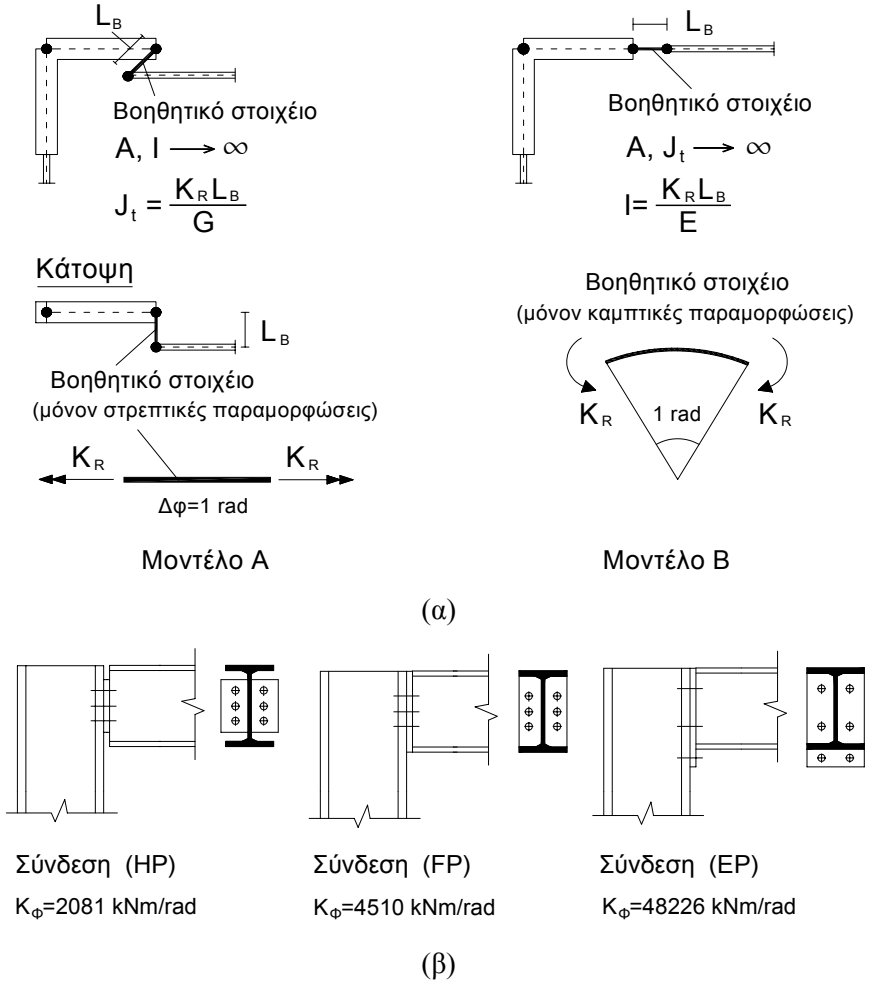
Η Επίλυση 3.α2 αποσκοπεί στην σύγκριση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την επίλυση του μικτού πλαισίου του Σχήματος 5.47β. Οι αναλύσεις πραγματοποιήθηκαν τόσο στα πλαίσια της θεωρίας α' όσο και στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης, προκειμένου να ελεγχθεί η ικανότητα του νέου στοιχείου και στους δυο τύπους αναλύσεων. Όπως και στην προηγούμενη επίλυση έτσι και στην παρούσα, οι αναλύσεις έγιναν με χρήση του προσομοιώματος του Winkler, καθώς κύριος στόχος είναι απόδειξη της ευκολίας με την οποία επιτυγχάνεται η αξιόπιστη προσομοίωση των κόμβων στους οποίους συντρέχουν στοιχεία με ημιάκαμπτες συνδέσεις. Στη συγκεκριμένη επίλυση γίνεται χρήση δυο υποπεριπτώσεων του γενικευμένου στοιχείου: η πρώτη αφορά το στοιχείο με ημιάκαμπτες συνδέσεις και απολύτως στερεούς βραχίονες χωρίς όμως συνεχή ελαστική έδραση για την προσομοίωση του μεταλλικού ζυγώματος του πλαισίου, ενώ η δεύτερη αφορά το στοιχείο με συνεχή ελαστική έδραση τύπου Winkler και απολύτως στερεούς βραχίονες χωρίς όμως ημιάκαμπτες συνδέσεις, για την προσομοίωση της δοκού θεμελίωσης. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση με το νέο στοιχείο συγκρίθηκαν με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από την επίλυση, με το SAP2000, μοντέλων στα οποία τόσο η προσομοίωση των ημιακάμπτων συνδέσεων όσο και η προσομοίωση της δοκού θεμελίωσης πραγματοποιούνται με συμβατικές τεχνικές προσομοίωσης που θα παρουσιαστούν παρακάτω. Για την προσομοίωση της δοκού θεμελίωσης χρησιμοποιήθηκαν 20 συμβατικά στοιχεία δοκού αξιοποιώντας έτσι τα αποτελέσματα της προηγούμενης ανάλυσης, προκειμένου να αποκλειστεί η πιθανότητα να προκύψουν σοβαρές αποκλίσεις προερχόμενες από την προσομοίωση της δοκού θεμελίωσης. Επομένως, είναι βέβαιο ότι οι όποιες σοβαρές αποκλίσεις που ενδέχεται να προκύψουν θα οφείλονται κατά κύριο λόγο στο τρόπο με τον οποίο προσομοιώνονται οι κόμβοι του ζυγώματος.

Για την τιμή του δείκτη εδάφους κατά την ανάλυση στα πλαίσια τη θεωρίας α' τάξης χρησιμοποιήθηκε η τιμή K=1366.8kN/m^3. Η τιμή αυτή προέκυψε από την εφαρμογή της σχέσης του Biot (1937) για συνθήκες επίπεδης έντασης όπως παρουσιάζεται παρακάτω:

$$K = 0.710\left(\frac{E_S}{b_B}\right)\left[\frac{E_S b_B^4}{16EI}\right]^{1/3} \Rightarrow K = 0.710\left(\frac{17500}{0.3}\right)\left[\frac{17500*0.3^4}{16*\left(2.9*10^7\right)*0.0085}\right]^{1/3} \Rightarrow K = 1366.8\text{kN/m}^3$$

Για την τιμή του μέτρου ελαστικότητας του εδάφους χρησιμοποιήθηκε η τιμή E_S=17500kN/m^2 που αντιστοιχεί σε έδαφος θεμελίωσης που συνίσταται από χαλαρή άμμο (Bowles (1988)).

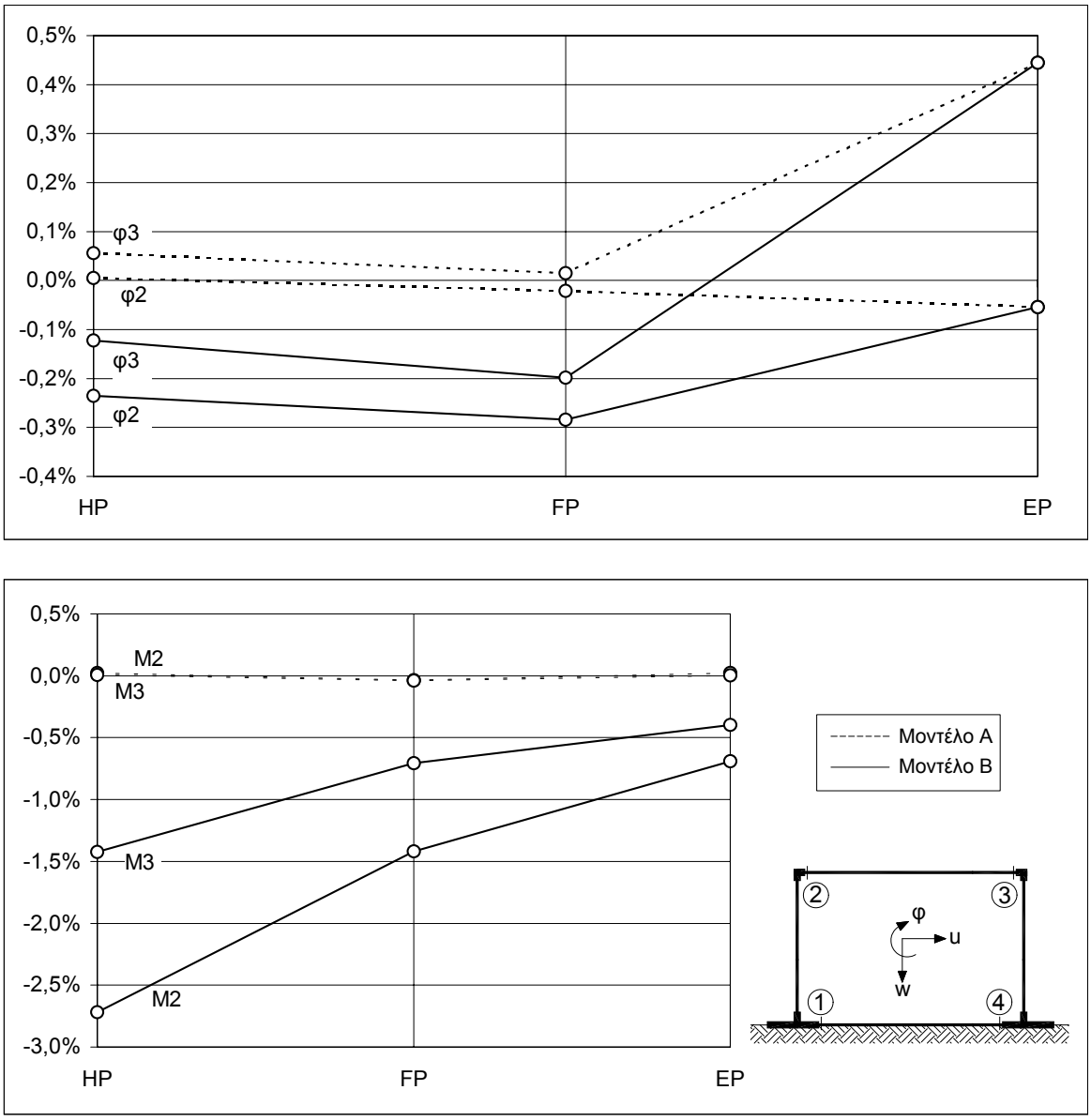
Όσον αφορά την προσομοίωση των κόμβων του μεταλλικού ζυγώματος, θα πρέπει να τονιστεί ότι καθώς δεν υπάρχει διαθέσιμο πρόγραμμα το οποίο να έχει ενσωματωμένο πεπερασμένο στοιχείο δοκού που να συνδυάζει την δυνατότητα ταυτόχρονης προσομοίωσης ημιάκαμπτων συνδέσεων και απολύτως στερεών βραχιόνων, προκύπτει η ανάγκη προσομοίωσης των κόμβων με συνδυασμούς συμβατικών στοιχείων όπως παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 5.50α).



Σχήμα 5.50. (α) οι δυο διαφορετικοί τρόποι συμβατικής προσομοίωσης των ημιάκαμπτων συνδέσεων, με τη χρήση πρόσθετων βοηθητικών στοιχείων, (β) οι τρεις διαφορετικοί τύποι συνδέσεων μεταλλικών στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν.

Για τις τιμές των στροφικών ελατηρίων μέσω των οποίων επιτυγχάνεται η προσομοίωση των ημιάκαμπτων συνδέσεων έγινε χρήση τιμών που αντιστοιχούν σε τρεις διαφορετικούς τύπους συνδέσεων, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.50β (Πηγή: Council on tall buildings and urban habitat, (1993)).

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.51, οι συμβατικές προσομοιώσεις των ημιάκαμπτων συνδέσεων επιτυγχάνουν πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα συγκρινόμενες με την προσομοίωση με το νέο στοιχείο. Ωστόσο, η υπεροχή του νέου στοιχείου έγκειται στην απλότητα του αλλά και στο γεγονός ότι η επίλυση με αυτό απαιτεί τη χρήση μόνο τεσσάρων στοιχείων έναντι των 35 που απαιτεί η επίλυση με συμβατικές τεχνικές προσομοίωσης. Πέραν τούτου, δεν πρέπει να λησμονείται ότι για την ακριβή προσέγγιση της τιμής της σταθεράς των στροφικών ελατηρίων με τις τεχνικές προσομοίωσης που δίνονται στο Σχήμα 5.50β απαιτείται πολύ μεγάλη προσοχή στην επιλογή τόσο του μήκους όσο και των γεωμετρικών στοιχείων της διατομής των πρόσθετων βοηθητικών στοιχείων που χρησιμοποιούνται.



Σχήμα 5.51. Οι αποκλίσεις των τιμών των στροφών και των καμπτικών ροπών των κόμβων 2 και 3 όπως προκύπτουν από την επίλυση με τις συμβατικές τεχνικές προσομοίωσης σε σχέση με την επίλυση με το νέο στοιχείο.

Ένα ακόμα συμπέρασμα που προκύπτει από την μελέτη των παραπάνω διαγραμμάτων είναι ότι οι ούτως ή άλλως μικρές αποκλίσεις των καμπτικών ροπών μειώνονται όσο αυξάνονται οι τιμές των σταθερών των στροφικών ελατηρίων. Η παρατήρηση αυτή εξηγείται εάν ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι η αύξηση της δυσκαμψίας των ελατηρίων μειώνει τις πρόσθετες μετακινήσεις (γόνατα ελαστικής γραμμής στα σημεία όπου υπάρχουν τα στροφικά ελατήρια) που προκαλούν οι ημιάκαμπτες συνδέσεις. Οι πρόσθετες αυτές μετακινήσεις είναι η αιτία της διαφοροποίησης των τιμών των καμπτικών ροπών που προκύπτουν από τις δυο κατηγορίες επιλύσεων (της ακριβούς με το νέο στοιχείο και της προσεγγιστικής με τις συμβατικές τεχνικές προσομοίωσης).

Όπως τονίστηκε και στη αρχή της αναφοράς στην επίλυση 3.α2, η ανάλυση του πλαισίου του Σχήματος 5.47β πραγματοποιήθηκε και στα πλαίσια τη θεωρίας β' τάξης λαμβάνοντας έτσι υπόψη και την επιρροή των παραμορφώσεων στις τιμές των εντατικών μεγεθών, όπως κρίνεται πολλές φορές σκόπιμο κατά την ανάλυση των μεταλλικών φορέων. Η επίλυση πραγματοποιήθηκε με την ίδια τιμή για τον δείκτη εδάφους και για τους ίδιους τύπους ημιακάπτων συνδέσεων. Το βασικό συμπέρασμα των αναλύσεων αυτών είναι ότι οι αποκλίσεις τόσο των στροφών όσο και των ροπών δεν αλλάζουν σχεδόν καθόλου από τις αντίστοιχες αποκλίσεις που προκύπτουν από τις αναλύσεις στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης. Επομένως για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων αρκεί η μελέτη του Σχήματος 5.51.

Επίλυση 3.α3

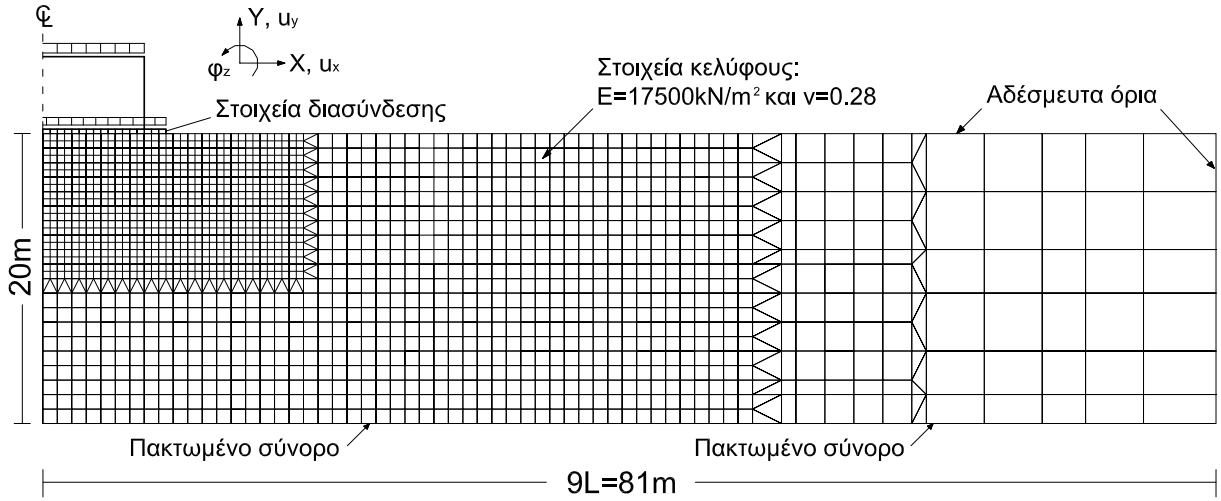
Κατά την Επίλυση 3.α3 αναλύθηκε και πάλι το πλαίσιο του Σχήματος 5.47α αγνοώντας όμως την οριζόντια φόρτιση. Η ανάλυση αυτή έχει δυο στόχους:

- Να αποδείξει την αδυναμία του προσομοιώματος του Winkler να αποδώσει σωστά τα μεγέθη έντασης και μετακίνησης του πλαισίου, και
- Να ελέγξει την αξιοπιστία των προσομοιωμάτων των δυο και των τριών παραμέτρων και των παραλλαγών τους κατά την ανάλυση επιπέδων πλαισίων, συγκρίνοντας τα εξαγόμενα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από την επίλυση με τα προσομοιώματα επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων που στα πλαίσια των αναλύσεων του παραδείγματος θεωρούνται ως προσομοιώματα αναφοράς.

Για την εκπλήρωση των στόχων του παρόντος παραδείγματος θεωρήθηκαν οι κατηγορίες εδάφους Ε2 και Ε4 του Πίνακα 5.2, ενώ όσον αφορά τα βάθη του ελαστικού υποβάθρου θεωρήθηκαν οι τιμές H_S=20, 40 και 60 μέτρα. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι κατά τις αναλύσεις για την κατηγορία εδάφους Ε2, οι αναγραφόμενες επί του σχήματος 5.47α τιμές φόρτισης μειώθηκαν κατά 60% προκειμένου να μειωθούν σε ρεαλιστικά πλαίσια οι κατακόρυφες μετακινήσεις. Παράλληλα για τις επιλύσεις αυτές, θεωρήθηκε ότι το πλάτος της πεδιλοδοκού είναι ίσο με 0.5m (έναντι του 0.4m που δίνεται στο σχήμα 5.47α), και ως εκ τούτου η διατομή της είναι (0.5x1.0) και όχι (0.4x1.0). Για όλες τις επιλύσεις έγινε η παραδοχή ότι ισχύουν συνθήκες επίπεδης έντασης.

Πραγματοποιήθηκαν όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, αναλύσεις με τα παρακάτω προσομοιώματα:

α. Προσομοίωμα επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων. Κατά την επίλυση με το προσομοίωμα αυτό, το έδαφος θεμελίωσης προσομοιώθηκε με κάναβους επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων (Σχήμα 5.52), τα χαρακτηριστικά των οποίων είναι κοινά με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν και στις αναλύσεις των προηγούμενων παραδειγμάτων. Ειδικά για το παρόν παράδειγμα αποφασίστηκε να γίνει και ένας έλεγχος της επάρκειας του χρησιμοποιούμενου κανάβου, έτσι ώστε τα αποτελέσματα του ελέγχου αυτού να αξιοποιηθούν και στο επόμενο παράδειγμα το οποίο αφορά επίσης ανάλυση επιπέδων πλαισίων.



Σχήμα 5.52. Ενδεικτικός κάναβος πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν κατά τις επιλύσεις με το προσομοίωμα των επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων.

Έτσι προκειμένου να ελεγχθεί η επάρκεια της διακριτοποίησης κατά την κατακόρυφη διεύθυνση, πραγματοποιήθηκαν και αναλύσεις με κάναβο αποτελούμενο από διπλάσιο αριθμό στοιχείων κατά τη διεύθυνση αυτή. Οι συγκρίσεις των αποτελεσμάτων απέδειξαν ότι ο κάναβος του σχήματος 5.52 είναι επαρκής καθώς δεν παρατηρήθηκαν διαφορές. Ακολουθώντας τις συστάσεις του Liao (1995), η συνολική οριζόντια διάσταση του κανάβου τέθηκε ίση με 2x(9L), όπου 2L είναι το συνολικό μήκος της δοκού θεμελίωσης. Έτσι για L=9m η απαιτούμενη οριζόντια διάσταση του κανάβου είναι 162m. Η διακριτοποίηση στην οριζόντια διεύθυνση προσδιορίστηκε εμπειρικά μετά από δοκιμαστικές επιλύσεις. Η απόδοση της τελικώς χρησιμοποιούμενης οριζόντιας διακριτοποίησης επαληθεύτηκε με έλεγχο των οριζοντίων μετακινήσεων στο κατά την οριζόντια διεύθυνση αδέσμευτο δεξιό κατακόρυφο όριο του κανάβου. Οι μετακινήσεις αυτές στο συγκεκριμένο σύνορο προέκυψαν πρακτικά ίσες με το μηδέν, κάτι που σημαίνει πως περαιτέρω αύξηση της οριζόντιας διάκριτοποίησης του κανάβου του σχήματος 5.52 δεν έχει καμία επιρροή στα αποτελέσματα. Η δοκός θεμελίωσης διακριτοποιήθηκε με 30 συμβατικά στοιχεία δοκού. Η σύνδεση των στοιχείων αυτών με τα στοιχεία κελύφους υλοποιήθηκε μέσω κατακορύφων στοιχείων ράβδου, ικανών στην μεταβίβαση μόνον κατακορύφων δυνάμεων, όπως αναλυτικά παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 5.3.1.1.

β. Τροποποιημένο προσομοίωμα Vlasov: Κατά την επίλυση με το προσομοίωμα αυτό, έγινε χρήση του προτεινόμενου γενικευμένου στοιχείου και συντάχθηκε ο κατάλληλος επαναληπτικός αλγόριθμος σε

γλώσσα Fortran 90, με γενικά χαρακτηριστικά που δίνονται στο διάγραμμα ροής του σχήματος 5.4. Από την επίλυση αυτή προκύπτουν ως γνωστό, και οι τιμές των εδαφικών παραμέτρων που είναι απαραίτητες για τις επιλύσεις και με τα υπόλοιπα μηχανικά προσομοιώματα.

γ. Προσομοίωμα Pasternak: Κατά την επίλυση με το προσομοίωμα του Pasternak, έγινε χρήση των τιμών των παραμέτρων που προέκυψαν από την ανάλυση με το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov. Ωστόσο, κατά την επίλυση αυτή αγνοήθηκε η επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν του πλαισίου, με στόχο την διερεύνηση και αυτής της παραμέτρου.

δ. Προσομοίωμα Winkler: Κατά την επίλυση αυτή, έγινε χρήση του νέου στοιχείου με έδραση επί ελαστικού υποβάθρου μιας παραμέτρου.

ε. Προσομοίωμα Kerr **με** και **χωρίς** την θεώρηση του εδάφους εκατέρωθεν του πλαισίου: Κατά την επίλυση αυτή, **γίνεται για πρώτη φορά** επίλυση επιπέδου πλαισίου εδραζόμενου επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων, και ταυτόχρονα για πρώτη φορά χρήση του προτεινόμενου νέου γενικευμένου πεπερασμένου στοιχείου δοκού εδραζόμενου επί ελαστικού υποβάθρου περιγραφόμενου με τη βοήθεια του συγκεκριμένου προσομοιώματος.

Τα μεγέθη που συγκρίθηκαν προκείμενου να αξιολογηθούν οι επιδόσεις των εξεταζομένων μηχανικών προσομοιωμάτων σε σχέση με το προσομοίωμα αναφοράς είναι τα εξής:

- Κατακόρυφες μετακινήσεις των δυο στύλων,
- Στροφή του κόμβου στύλου – δοκού θεμελίωσης,
- Καμπτικές ροπές στην κεφαλή και στον πόδα των στύλων,
- Καμπτικές ροπές και τέμνουσες δυνάμεις στα άκρα της δοκού θεμελίωσης,
- Καμπτικές ροπές στα άκρα του ζυγώματος.

Και στα πλαίσια του παρόντος παραδείγματος, ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία υπολογισμών. Δηλαδή προηγήθηκαν οι αναλύσεις με το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov, έτσι ώστε να προκύψουν οι απαραίτητες τιμές των εδαφικών παραμέτρων, και ακολούθησαν οι αναλύσεις με τα υπόλοιπα προσομοιώματα καθώς και οι σχετικές συγκρίσεις με τα αποτελέσματα του προσομοιώματος αναφοράς. Τέλος, πραγματοποιήθηκαν και οι παραμετρικές αναλύσεις προσδιορισμού των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης των παραμέτρων k και c του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων, προκειμένου να διερευνηθεί η δυνατότητα της μέγιστης δυνατής σύγκλισης των αποτελεσμάτων του εν λόγω προσομοιώματος με τα αποτελέσματα αναφοράς.

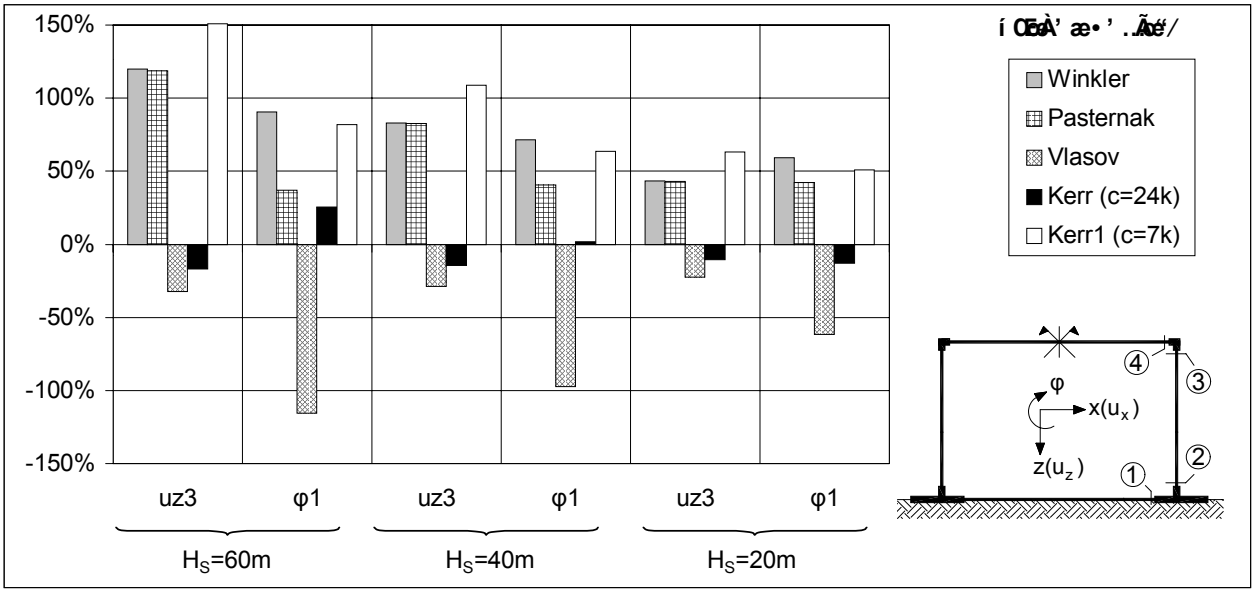
Έτσι στους παρακάτω πίνακες και σχήματα δίνονται καταρχήν τα αποτελέσματα των συγκρίσεων που αφορούν τα εξεταζόμενα μεγέθη μετακίνησης του πλαισίου (Πίνακες 5.5 και 5.6, και Σχήματα 5.53 – 5.56), και ακολουθούν τα αποτελέσματα που αφορούν τα εξεταζόμενα μεγέθη έντασης (Πίνακες 5.8 – 5.10, και Σχήματα 5.57 – 5.62). Παρεμβάλλονται τα σχετικά σχόλια και συμπεράσματα.

Πίνακας 5.5. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από τη λύση αναφοράς, των προς εξέταση προσομοιωμάτων όσον αφορά την κατακόρυφη μετακίνηση του αριστερού στύλου του πλαισίου, και την στροφή του κόμβου στύλου – δοκού θεμελίωσης. Περίπτωση Σκληρής Αργίλου.

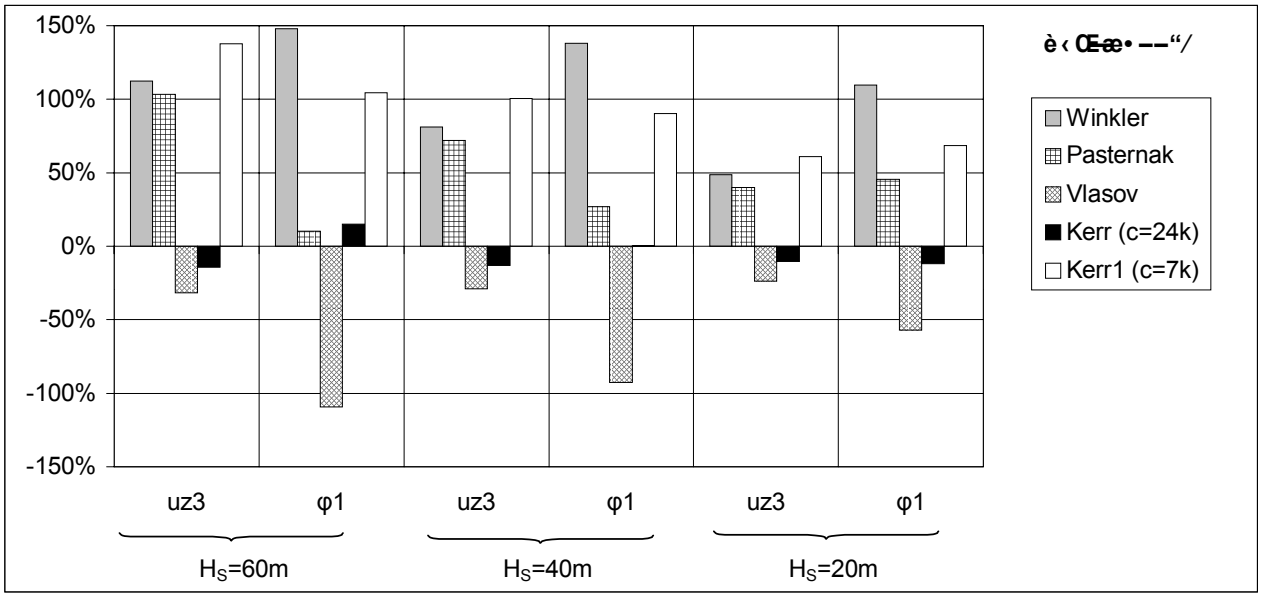
		Απόλυτες τιμές					
		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=24k)	Kerr1 (c=7k)
H_s=60m	u_{z3}	0,082	0,181	0,180	0,056	0,068	0,206
	φ_1	-0,0005	-0,0010	-0,0007	0,0001	-0,0007	-0,0010
H_s=40m	u_{z3}	0,104	0,191	0,190	0,074	0,089	0,217
	φ_1	-0,0007	-0,0012	-0,0010	0,0000	-0,0007	-0,0012
H_s=20m	u_{z3}	0,069	0,099	0,099	0,054	0,062	0,113
	φ_1	-0,0008	-0,0012	-0,0011	-0,0003	-0,0007	-0,0012
		Αποκλίσεις					
H_s=60m	u_{z3}	119,87%	118,84%	-32,40%	-16,71%	150,64%	
	φ_1	90,70%	37,24%	-115,50%	25,73%	81,91%	
H_s=40m	u_{z3}	83,09%	82,44%	-28,75%	-14,45%	108,62%	
	φ_1	71,73%	40,55%	-97,23%	1,72%	63,73%	
H_s=20m	u_{z3}	43,56%	42,98%	-22,49%	-10,36%	63,10%	
	φ_1	59,25%	42,40%	-61,57%	-12,79%	50,81%	

Πίνακας 5.6. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από τη λύση αναφοράς, των προς εξέταση προσομοιωμάτων όσον αφορά την κατακόρυφη μετακίνηση του αριστερού στύλου του πλαισίου, και την στροφή του κόμβου στύλου – δοκού θεμελίωσης. Περίπτωση Πυκνής Άμμου.

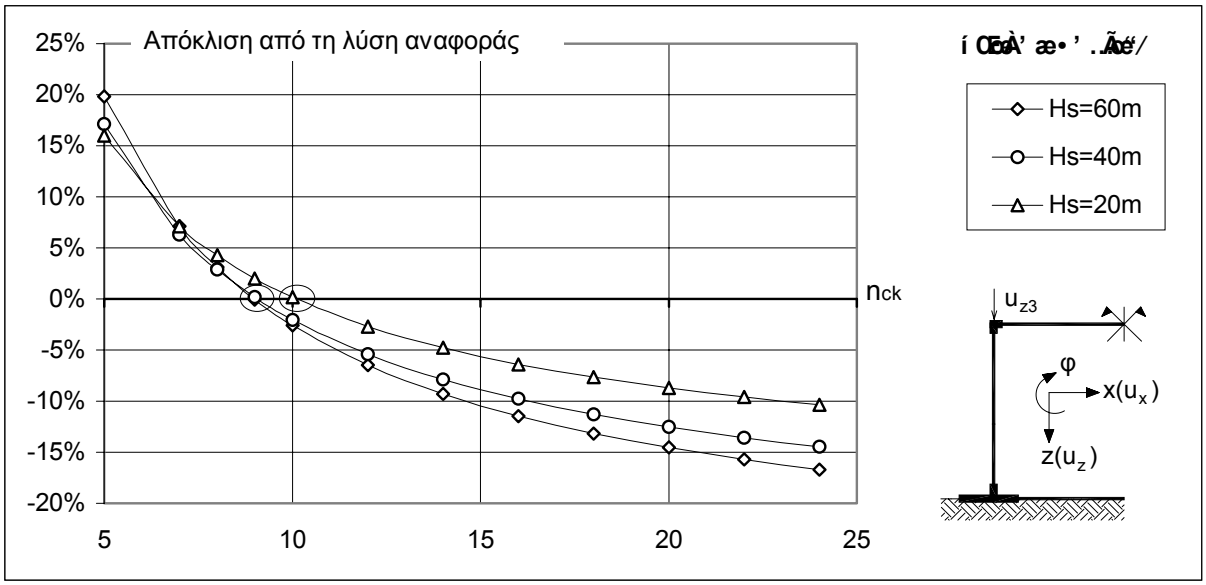
		Απόλυτες τιμές					
		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=24k)	Kerr1 (c=7k)
H_s=60m	u_{z3}	0,050	0,107	0,102	0,034	0,043	0,120
	φ_1	-0,0011	-0,0027	-0,0012	0,0001	-0,0012	-0,0022
H_s=40m	u_{z3}	0,041	0,075	0,071	0,029	0,036	0,083
	φ_1	-0,0011	-0,0026	-0,0014	-0,0001	-0,0011	-0,0021
H_s=20m	u_{z3}	0,028	0,041	0,039	0,021	0,025	0,045
	φ_1	-0,0012	-0,0024	-0,0017	-0,0005	-0,0010	-0,0020
		Αποκλίσεις					
H_s=60m	u_{z3}	112,43%	103,49%	-31,72%	-14,17%	137,82%	
	φ_1	147,85%	10,25%	-109,36%	14,93%	104,32%	
H_s=40m	u_{z3}	81,04%	72,03%	-28,89%	-12,91%	100,52%	
	φ_1	138,27%	27,00%	-92,46%	0,22%	90,29%	
H_s=20m	u_{z3}	48,72%	40,17%	-23,74%	-10,23%	61,13%	
	φ_1	109,81%	45,43%	-56,96%	-11,68%	68,49%	



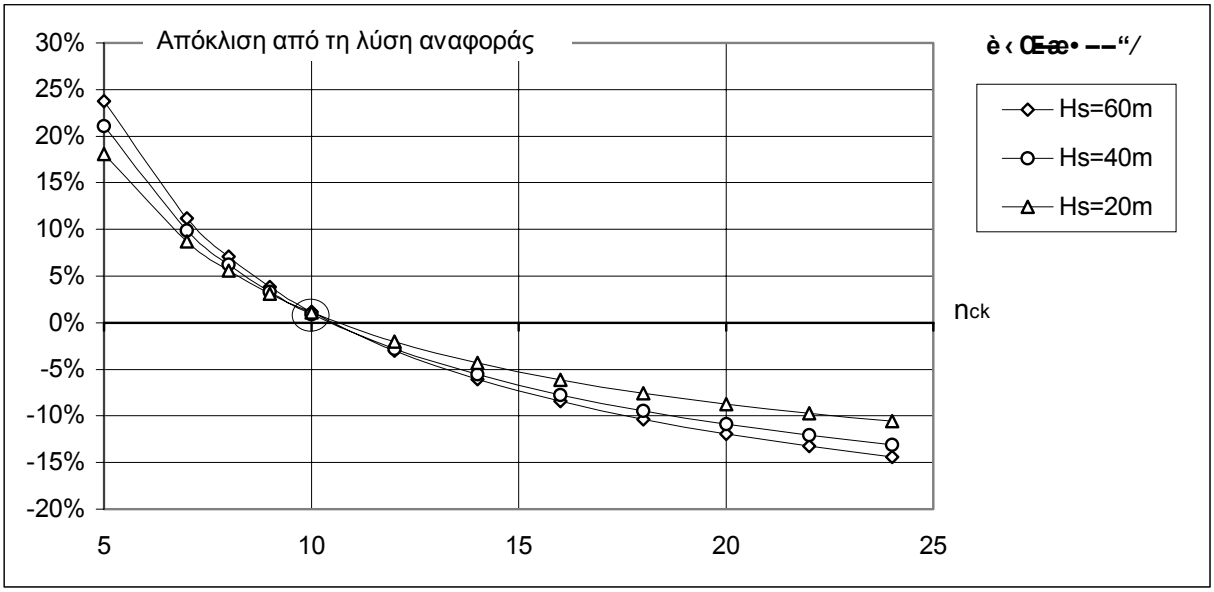
Σχήμα 5.53. Διάγραμμα αποκλίσεων των αποτελεσμάτων των εξεταζόμενων εδαφικών προσομοιωμάτων από το προσομοίωμα αναφοράς (προσομοίωμα επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων) όσον αφορά τα μεγέθη μετακίνησης u_{z3} και φ_1. Σκληρή άργιλος – Πίνακας 5.5.



Σχήμα 5.54. Διάγραμμα αποκλίσεων των αποτελεσμάτων των εξεταζόμενων εδαφικών προσομοιωμάτων από το προσομοίωμα αναφοράς (προσομοίωμα επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων) όσον αφορά τα μεγέθη μετακίνησης u_{z3} και φ_1. Πυκνή άμμος – Πίνακας 5.6.

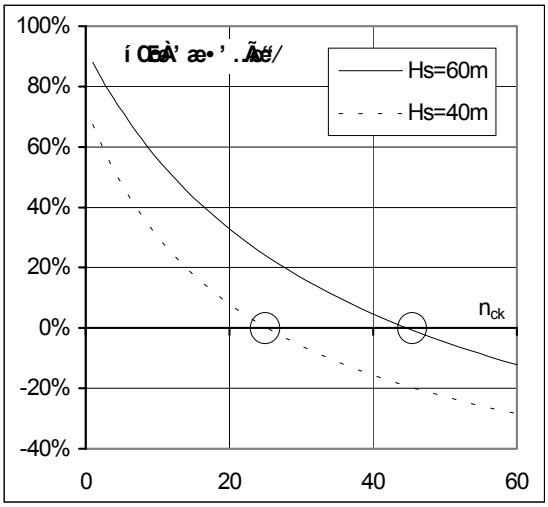


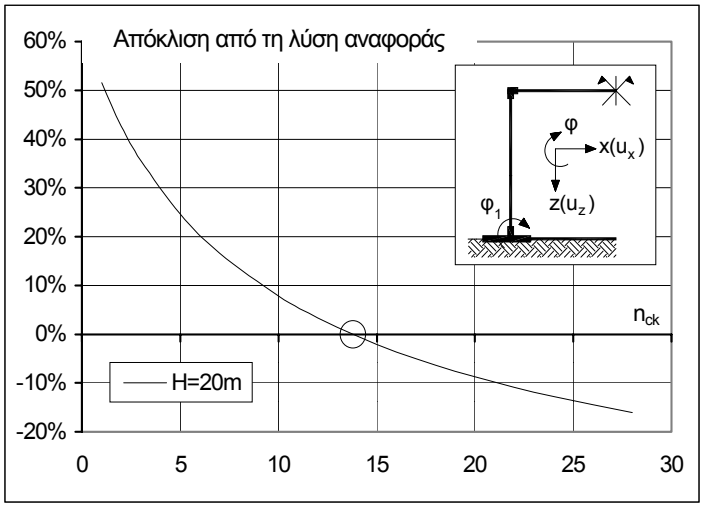
(α)



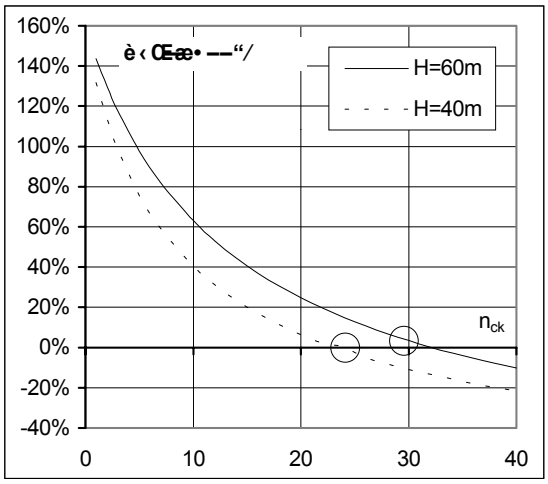
(β)

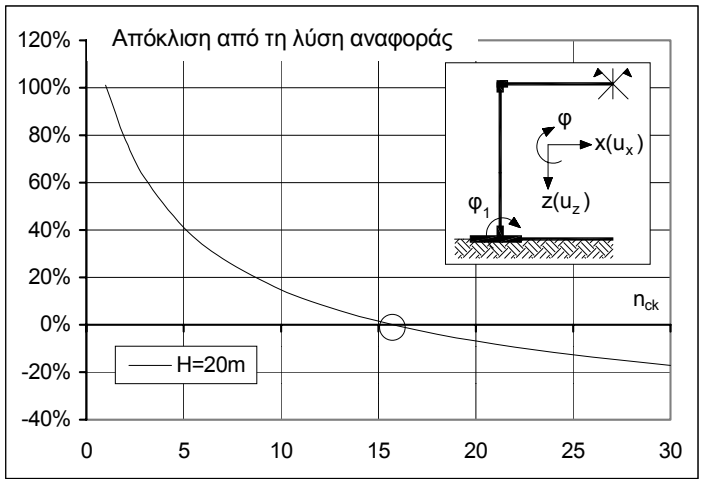
Σχήμα 5.55. Διερεύνηση της βέλτιστης τιμής του συντελεστή συσχέτισης n_{ck} όσον αφορά την σύγκλιση προς την λύση αναφοράς της τιμής της κατακόρυφης μετακίνησης του αριστερού στύλου του πλαισίου όπως προκύπτει από την εφαρμογή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων. Περίπτωση Σκληρής αργίλου (α), και περίπτωση Πυκνής άμμου (β).





(α)





(β)

Σχήμα 5.56. Διερεύνηση της βέλτιστης τιμής του συντελεστή συσχέτισης n_{ck} όσον αφορά την σύγκλιση προς την λύση αναφοράς της τιμής της στροφής του κόμβου στύλου – δοκού θεμελίωσης, όπως προκύπτει από την εφαρμογή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων. Περίπτωση Σκληρής αργίλου (α), και περίπτωση Πυκνής άμμου (β).

Στους πίνακες 5.5 και 5.6, και στα σχήματα 5.53 και 5.54 δίνονται οι συγκρίσεις των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων όσον αφορά τα μεγέθη μετακίνησης u_{z3} και φ_1. Στους πίνακες και τα σχήματα αυτά δίνονται μεταξύ των άλλων, τα αποτελέσματα του προσομοιώματος του Kerr με τη θεώρηση του εδάφους εκατέρωθεν του πλαισίου για τιμές του συντελεστή συσχέτισης n_{ck}=24 τόσο για την περίπτωση της σκληρής αργίλου όσο και για την περίπτωση της πυκνής άμμου. Η επιλογή της τιμής αυτής δεν οδηγεί στην βέλτιστη δυνατή απόδοση του προσομοιώματος, όπως άλλωστε θα τονιστεί και παρακάτω. Ωστόσο επειδή η μέγιστη δυνατή σύγκλιση καθενός από τα δυο εξεταζόμενα μεγέθη μετακίνησης επιτυγχάνεται για διαφορετική τιμή του συντελεστή συσχέτισης n_{ck} – που εξαρτάται μάλιστα και από τον τύπο του εδάφους και από το βάθος του ελαστικού υποβάθρου – κρίθηκε ότι δεν θα ήταν αντικειμενική η σύγκριση με τα υπόλοιπα προσομοιώματα αν για κάθε μια από τις περιπτώσεις σύγκρισης επιλέγονταν η τιμή εκείνη, που οδηγεί στην βέλτιστη απόδοση του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων. Για το λόγο αυτό διερευνήθηκε η ύπαρξη τιμών του συντελεστή συσχέτισης για τις οποίες επιτυγχάνεται η μη υπέρβαση ενός ελάχιστου δυνατού ορίου απόκλισης από τη λύση αναφοράς για κάθε εξεταζόμενη περίπτωση (τύπου εδάφους και βάθους υποβάθρου), αλλά και για τα δυο συγκρινόμενα μεγέθη μετακίνησης. Παρακάτω καταγράφονται τα συμπεράσματα των συγκρίσεων, αρχικά για την περίπτωση της σκληρής αργίλου, και κατόπιν για την περίπτωση της πυκνής άμμου.

Για την περίπτωση της σκληρής αργίλου αποδείχθηκε, ότι η τιμή του συντελεστή συσχέτισης n_{ck}=24 οδηγεί σε αποκλίσεις που δεν ξεπερνούν σε καμία περίπτωση το 17%, με εξαίρεση την περίπτωση της απόκλισης της τιμής της στροφής φ_1 για βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m όπου η απόκλιση αγγίζει το 25%. Ωστόσο όπως φαίνεται από την μελέτη του πίνακα 5.5 και του σχήματος 5.53, για n_{ck}=24 το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων εμφανίζεται πιο αποδοτικό από τα υπόλοιπα εξεταζόμενα προσομοιώματα σε κάθε περίπτωση σύγκρισης. Πέραν του παραπάνω συμπεράσματος, μπορούν να καταγραφούν και οι κάτωθι παρατηρήσεις:

- Τα προσομοιώματα του Winkler και του Pasternak εμφανίζονται ισοδύναμα όσον αφορά την σύγκλιση της κατακόρυφης μετακίνησης u_{z3} για κάθε ένα από τα εξεταζόμενα βάθη του ελαστικού υποβάθρου. Ωστόσο οι συγκλίσεις που επιτυγχάνουν κρίνονται «φτωχές» καθώς στην καλύτερη των περιπτώσεων – που αντιστοιχεί σε βάθος υποβάθρου H_S=20m – αγγίζουν το 44%. Αντίθετα όσον αφορά την σύγκλιση της στροφής φ_1, το προσομοίωμα του Pasternak εμφανίζεται πιο αποδοτικό, και μάλιστα είναι μετά το προσομοίωμα του Kerr, το αμέσως αποδοτικότερο προσομοίωμα από όλα τα υπόλοιπα που εξετάστηκαν.
- Το προσομοίωμα του Vlasov εμφανίζει την καλύτερη – μετά το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων – σύγκλιση τιμών της κατακόρυφης μετακίνησης u_{z3}. Αντίθετα όσον αφορά την σύγκλιση της στροφής του κόμβου στύλου – δοκού θεμελίωσης, αποδίδει τις χειρότερες τιμές από όλα τα υπόλοιπα εξεταζόμενα προσομοιώματα. Τέλος, είναι χαρακτηριστικό ότι εξακολουθεί όπως και στα παραδείγματα που προηγήθηκαν, να αποδίδει συστηματικά μικρότερες τιμές από τη λύση αναφοράς τόσο όσον αφορά την κατακόρυφη μετακίνηση u_{z3} όσο και την στροφή φ_1.
- Το προσομοίωμα του Kerr χωρίς την θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν του πλαισίου, προστέθηκε στα προς εξέταση προσομοιώματα για τιμή του συντελεστή συσχέτισης n_{ck}=7. Δεν κρίθηκε

σκόπιμη η διερεύνηση μιας πιο βέλτιστης τιμής για το n_{ck} καθώς και από τα προηγούμενα παραδείγματα κατέστη σαφές ότι συγκλίνει προς τη λύση αναφοράς πιο δύσκολα απ' ότι το αντίστοιχο προσομοίωμα με τη θεώρηση του εδάφους εκατέρωθεν του πλαισίου. Πάντως για την τιμή αυτή του n_{ck} εμφανίζεται το λιγότερο αποδοτικό από όλα τα προς εξέταση προσομοιώματα όσον αφορά την σύγκλιση της τιμής της κατακόρυφης μετακίνησης u_{z3}, ενώ όσον αφορά την σύγκλιση της φ_1 εμφανίζεται ελαφρά πιο αποδοτικό από το προσομοίωμα του Winkler.

Για την περίπτωση της πυκνής άμμου, η διερεύνηση της κατά «μέσο όρο» βέλτιστης τιμής του συντελεστή n_{ck} οδήγησε και πάλι στην τιμή 24 όπως τονίστηκε και παραπάνω. Η τιμή αυτή οδηγεί σε σχετικά καλύτερες αποδόσεις από ότι στην περίπτωση της σκληρής αργίλου, καθώς οι αποκλίσεις είναι στην παρούσα περίπτωση της τάξης του 10% όσον αφορά την σύγκλιση της κατακόρυφης μετακίνησης, ενώ δεν υπερβαίνουν το 15% στην περίπτωση της στροφής φ_1. Σε γενικές γραμμές τα υπόλοιπα συμπεράσματα είναι ανάλογα αυτών που καταγράφηκαν για την περίπτωση της μελέτης της σκληρής αργίλου. Έτσι δεν κρίνεται απαραίτητη μια αναλυτική καταγραφή τους, πέραν της παρατήρησης ότι και στην παρούσα περίπτωση το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων είναι αποδοτικότερο των υπολοίπων με εξαίρεση την σύγκλιση της τιμής της στροφής φ_1, στην περίπτωση που το βάθος του ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 60 μέτρα. Στην περίπτωση αυτή, εμφανίζεται ελαφρώς αποδοτικότερο το προσομοίωμα του Pasternak (Βλέπε πίνακα 5.6) καθώς αποδίδει απόκλιση 10% έναντι του 15% που αποδίδει το προσομοίωμα του Kerr. Πρόκειται όμως για μία μεμονωμένη περίπτωση που δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να αλλοιώσει το γενικό συμπέρασμα ότι:

Κατά την περίπτωση του ελέγχου των τιμών των μεγεθών μετακίνησης u_{z3} και φ_1 του πλαισίου του σχήματος 5.47α, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων εμφανίζεται το πιο αποδοτικό απ' όλα τα υπόλοιπα προσομοιώματα που εξετάστηκαν, εάν ως τιμή για τον συντελεστή συσχέτισης n_{ck} ληφθεί η τιμή 24 τόσο για την περίπτωση της μελέτης εδάφους θεμελίωσης που συνίσταται από σκληρή άργιλο («μαλακό» έδαφος), όσο και για την περίπτωση μελέτης εδάφους θεμελίωσης που συνίσταται από πυκνή άμμο («σκληρό» έδαφος).

Κλείνοντας την αναφορά στον έλεγχο των μεγεθών μετακίνησης, θα πρέπει να γίνει και μια καταγραφή των συμπερασμάτων της διερεύνησης που πραγματοποιήθηκε με στόχο την εξεύρεση τιμών του συντελεστή συσχέτισης που οδηγούν στην μέγιστη δυνατή σύγκλιση προς τη λύση αναφοράς κατά περίπτωση. Τα συμπεράσματα των Σχημάτων 5.55 και 5.56 συγκεντρώνονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 5.7. Τιμές του συντελεστή συσχέτισης n_{ck} για τις οποίες επιτυγχάνεται η βέλτιστη σύγκλιση των τιμών της κατακόρυφης μετακίνησης u_{z3} και της στροφής φ_1 προς τη λύση αναφοράς, κατά περίπτωση εδάφους και βάθους του υποβάθρου θεμελίωσης.

	Σκληρή Άργιλος (Ε2)			Πυκνή Άμμος (Ε4)		
	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m
u_{z3}	9	9	10	11	11	11
φ_1	44	25	14	32	23	16

Από τον παραπάνω πίνακα μπορούν να εξαχθούν τα κάτωθι συμπεράσματα:

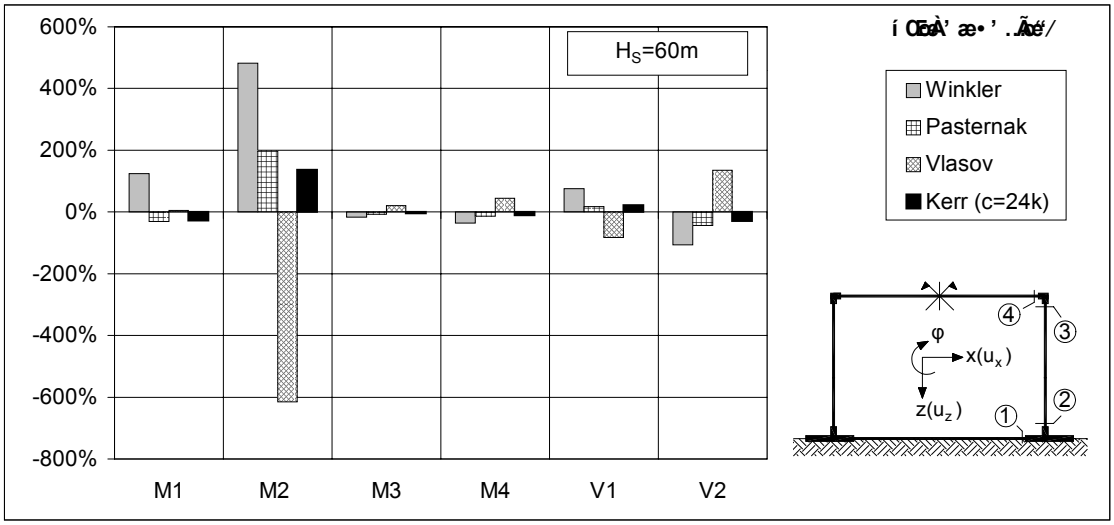
- Εμφανίζεται μια σταθερότητα όσον αφορά τις τιμές του συντελεστή συσχέτισης που οδηγούν στην βέλτιστη σύγκλιση των τιμών της κατακόρυφης μετακίνησης u_{z3}. Οι τιμές αυτές είναι ελάχιστα μεγαλύτερες για την περίπτωση της πυκνής άμμου. Θα πρέπει επίσης να τονιστεί, ότι αν επιλεγεί η ενιαία τιμή n_{ck}=10 για όλες τις περιπτώσεις, τότε οι αποκλίσεις δεν ξεπερνούν σε καμία περίπτωση το 2.5%. Είναι μάλιστα αξιοσημείωτο το γεγονός, ότι οι τιμές αυτές είναι πολύ κοντά στις αντίστοιχες τιμές του συντελεστή συσχέτισης για τις οποίες επιτυγχάνεται η βέλτιστη σύγκλιση των κατακορύφων μετακινήσεων και στα παραδείγματα που αφορούν τη μελέτη δοκών πεπερασμένου μήκους τόσο υπό απλή όσο και υπό σύνθετη φόρτιση (βλέπε παραγράφους 5.3.2.1, 5.3.2.2. και 5.3.2.3).
- Οι τιμές του συντελεστή συσχέτισης που οδηγούν στη βέλτιστη σύγκλιση των τιμών της στροφής φ_1 εμφανίζουν μια σχετικά μεγάλη διασπορά κυρίως σε σχέση με το βάθος του ελαστικού υποβάθρου παρά με βάση τον τύπο του εδάφους. Έτσι, εκτός της περίπτωσης υποβάθρου μεγάλου βάθους, στις περιπτώσεις του μέσου και μικρού βάθους μπορεί να θεωρηθεί ότι οι τιμές του βέλτιστου συντελεστή συσχέτισης είναι κοινές τόσο για την περίπτωση της σκληρής αργίλου όσο και για την περίπτωση της πυκνής άμμου. Πάντως αν για την περίπτωση υποβάθρου μεγάλου βάθους επιλεγεί η τιμή n_{ck}=38, τότε οι αποκλίσεις δεν υπερβαίνουν το 8% για καμία από τις δυο κατηγορίες εδάφους.

Όσον αφορά τις συγκρίσεις των εντατικών μεγεθών, διερευνήθηκε κατ' αρχήν η ύπαρξη ενός συγκεκριμένου συντελεστή συσχέτισης για τον οποίον το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων αποδίδει καλύτερα αποτελέσματα από όλα τα εξεταζόμενα προσομοιώματα για το σύνολο των εντατικών μεγεθών που ελέχθησαν. Έτσι, εξετάστηκε σε πρώτο στάδιο η τιμή n_{ck}=24 για την οποία όπως αποδείχθηκε και πιο πάνω, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων αποδίδει τα κατά μέσο όρο καλύτερα αποτελέσματα όσον αφορά τα μεγέθη μετακίνησης, τόσο κατά την περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από σκληρή άργιλο, όσο και κατά την περίπτωση που συνίσταται από πυκνή άμμο.

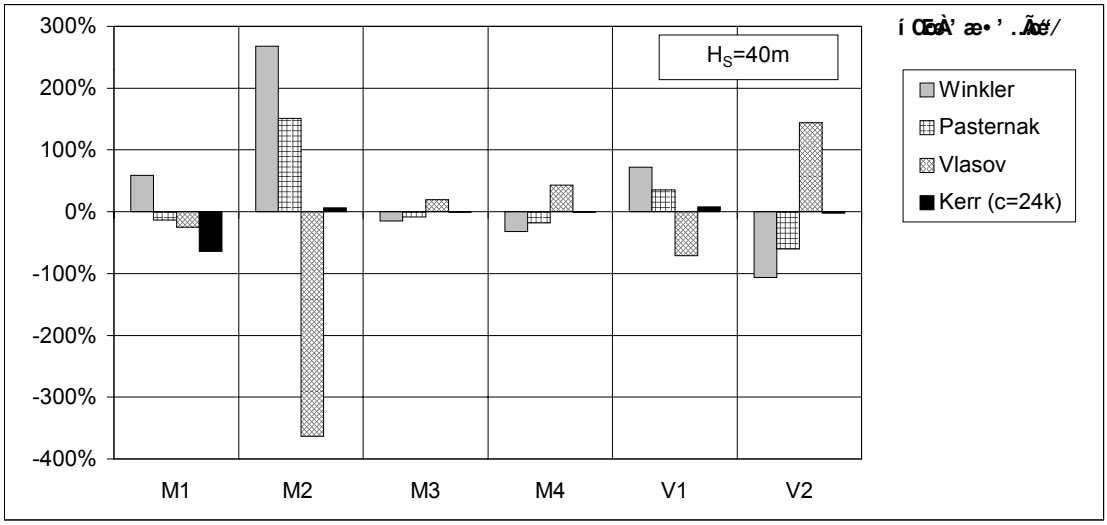
Επίσης σημειώνεται πριν αρχίσει η παράθεση των σχετικών πινάκων, σχημάτων και συμπερασμάτων, ότι για τις συγκρίσεις που θα ακολουθήσουν δεν κρίθηκε απαραίτητη η αξιολόγηση του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων χωρίς τη θεώρηση του εδάφους εκατέρωθεν του πλαισίου, αφενός γιατί κατά τον έλεγχο των μετακινήσεων απέδωσε τα χειρότερα αποτελέσματα σε κάθε μια από τις περιπτώσεις που ελέγχθηκαν, και αφετέρου διότι η αξιολόγηση του θα απαιτούσε την διερεύνηση βέλτιστων συντελεστών όπως και στην περίπτωση του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων με τη θεώρηση του εδάφους εκατέρωθεν του πλαισίου. Όπως όμως αποδείχθηκε και στα προηγούμενα παραδείγματα της παρούσας διατριβής, η σύγκλιση των αποτελεσμάτων προς τα αποτελέσματα αναφοράς είναι πολύ πιο αργή όταν δεν λαμβάνεται υπόψη η επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν του ελαστικώς εδραζόμενου στοιχείου.

Πίνακας 5.8. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από τη λύση αναφοράς, των προς εξέταση προσομοιωμάτων όσον αφορά τα ελεγχόμενα εντατικά μεγέθη. Περίπτωση Σκληρής Αργίλου.

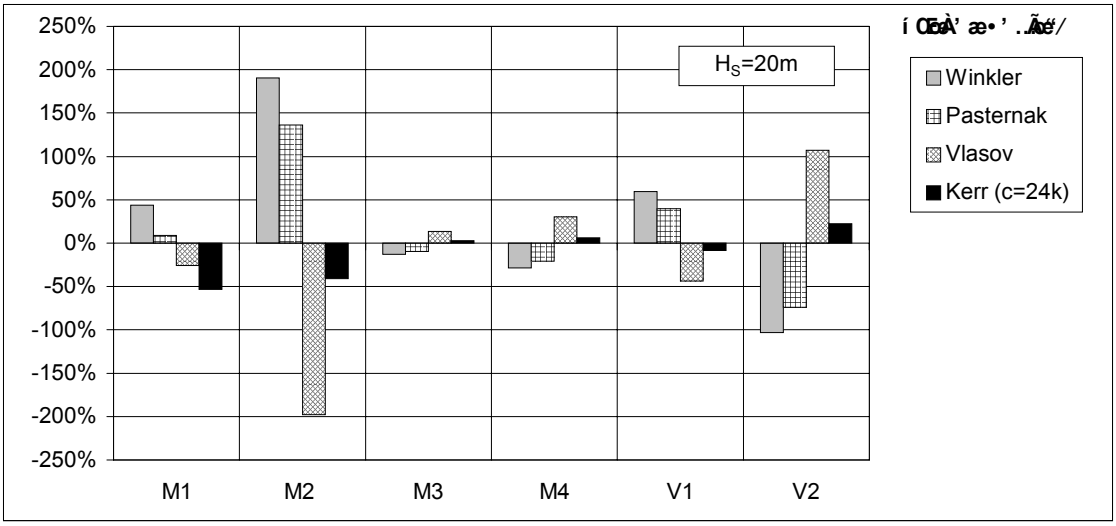
Απόλυτες τιμές						
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=24k)
H_s=60m	M_1	36,76	82,50	25,32	38,77	26,27
	M_2	-26,59	-154,83	-79,23	136,73	-62,97
	M_3	-174,90	-145,97	-163,03	-211,76	-166,70
	M_4	-139,09	-90,51	-119,15	-200,96	-125,31
	V_1	67,17	118,30	78,69	11,97	82,27
	V_2	33,71	-2,01	19,04	79,20	23,57
H_s=40m	M_1	63,41	100,82	55,06	47,41	22,88
	M_2	-51,45	-189,35	-129,40	135,48	-54,76
	M_3	-210,25	-179,14	-192,67	-252,43	-209,51
	M_4	-163,45	-111,21	-133,92	-234,27	-162,19
	V_1	84,20	144,89	113,98	24,36	90,59
	V_2	36,09	-2,32	14,38	88,16	35,17
H_s=20m	M_1	82,50	118,77	89,78	61,30	38,63
	M_2	-63,51	-184,57	-150,15	62,28	-37,38
	M_3	-207,53	-180,22	-187,98	-235,92	-213,43
	M_4	-158,88	-113,02	-126,05	-206,53	-168,78
	V_1	92,33	146,98	129,28	51,73	84,47
	V_2	32,73	-0,99	8,60	67,77	40,01
Αποκλίσεις						
	Προσομοίωμα:		Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=24k)
H_s=60m	M_1		124,43%	-31,13%	5,47%	-28,53%
	M_2		482,27%	197,98%	-614,20%	136,82%
	M_3		-16,54%	-6,79%	21,07%	-4,69%
	M_4		-34,93%	-14,34%	44,49%	-9,91%
	V_1		76,12%	17,15%	-82,19%	22,48%
	V_2		-105,97%	-43,51%	134,95%	-30,07%
H_s=40m	M_1		58,99%	-13,16%	-25,24%	-63,91%
	M_2		268,02%	151,51%	-363,32%	6,43%
	M_3		-14,80%	-8,36%	20,06%	-0,35%
	M_4		-31,96%	-18,07%	43,33%	-0,77%
	V_1		72,08%	35,37%	-71,07%	7,59%
	V_2		-106,43%	-60,16%	144,28%	-2,55%
H_s=20m	M_1		43,97%	8,82%	-25,69%	-53,18%
	M_2		190,61%	136,43%	-198,07%	-41,14%
	M_3		-13,16%	-9,42%	13,68%	2,84%
	M_4		-28,87%	-20,66%	29,99%	6,23%
	V_1		59,20%	40,02%	-43,97%	-8,52%
	V_2		-103,02%	-73,73%	107,07%	22,24%



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 5.57. Αποκλίσεις των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη του πλαισίου, για τα εξεταζόμενα βάθη του ελαστικού υποβάθρου. Περίπτωση σκληρής αργίλου.

Όπως γίνεται σαφές από τον πίνακα 5.8 και το σχήμα 5.57, κατά την περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώμα σκληρής αργίλου, η τιμή του συντελεστή συσχέτισης n_{ck}=24 οδηγεί σε αποτελέσματα που καθιστούν το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων αποδοτικότερο όλων των εξεταζομένων και στην περίπτωση της μελέτης των εντατικών μεγεθών του πλαισίου. Αναλυτικότερα, τα συμπεράσματα που προκύπτουν είναι τα εξής:

- Όταν το βάθος ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 60 μέτρα, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων αποδίδει τα καλύτερα αποτελέσματα καθώς αν εξαιρέσει κανείς την απόκλιση της τιμής της καμπτικής ροπής στη βάση του υποστυλώματος του πλαισίου M_2 που υπερβαίνει το 100% (136%), καμιά άλλη απόκλιση δεν υπερβαίνει το 30%. Αλλά και στην περίπτωση αυτή η απόκλιση είναι σημαντικά μικρότερη των αντίστοιχων αποκλίσεων των υπολοίπων προσομοιωμάτων. Το προσομοίωμα του Pasternak αποδίδει περίπου ίδιας τάξεως μεγέθους αποκλίσεις με το προσομοίωμα του Kerr και μάλιστα εμφανίζεται ελαφρά αποδοτικότερο όσο αναφορά την σύγκλιση της τιμής της τέμνουσας V_1 στο άκρο της δοκού θεμελίωσης. Το προσομοίωμα του Vlasov, αν εξαιρεθεί η σημαντική σύγκλιση που επιτυγχάνει όσον αφορά την τιμή της καμπτικής ροπής M_1 στο άκρο της δοκού θεμελίωσης (5.47%), εμφανίζεται να είναι λιγότερο αποδοτικό των δυο προηγουμένων. Μάλιστα δεν θα πρέπει να μείνει ασχολίαστο το γεγονός, ότι όσον αφορά την τιμή της καμπτικής ροπής M_2 (ένα πολύ σημαντικό μέγεθος για τη διαστασιολόγηση του πλαισίου), το προσομοίωμα του Vlasov όχι μόνον αποδίδει την χειρότερη τιμή, αλλά η τιμή αυτή έχει και διαφορετικό πρόσημο από τη λύση αναφοράς. Τέλος, το προσομοίωμα του Winkler αποδίδει τα χειρότερα αποτελέσματα, και μάλιστα όπως και στην περίπτωση του προσομοιώματος του Vlasov εμφανίζει το φαινόμενο της απόδοσης εντατικού μεγέθους με διαφορετικό πρόσημο από το πρόσημο της τιμής που προκύπτει από το προσομοίωμα αναφοράς (τέμνουσα V_2).
- Στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος 40 μέτρα, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων όχι μόνο εξακολουθεί να αποδίδει τα καλύτερα αποτελέσματα από όλα τα υπόλοιπα, αλλά εμφανίζεται ακόμα αποδοτικότερο καθώς η μέγιστη του απόκλιση, που αποδίδεται για την καμπτική ροπή M_1, δεν υπερβαίνει το 65% (βλέπε Πίνακα 5.8). «Αχίλλειο πτέρνα» του προσομοιώματος αποτελεί η σύγκλιση της τιμής της ροπής M_1, καθώς για το εντατικό αυτό μέγεθος τα προσομοιώματα του Pasternak και του Vlasov εμφανίζονται πολύ αποδοτικότερα. Κατά τα άλλα όμως οι αποκλίσεις του προσομοιώματος του Kerr είναι πολύ μικρές και δεν υπερβαίνουν το 10%, ειδικά μάλιστα στην περίπτωση των εντατικών μεγεθών M_2, V_2 στην βάση του υποστυλώματος όπου δεν υπερβαίνουν ούτε το 6.5%. Τα υπόλοιπα προσομοιώματα εμφανίζουν σημαντικές αποκλίσεις, με μεγαλύτερες αυτές που αφορούν την καμπτική ροπή M_2. Πιο συγκεκριμένα, το προσομοίωμα του Pasternak αποδίδει τα αμέσως πιο αποδεκτά αποτελέσματα, ενώ το προσομοίωμα του Vlasov υστερεί σημαντικά ειδικά στα μεγέθη διαστασιολόγησης της βάσης του υποστυλώματος του πλαισίου (οι αποκλίσεις είναι –364% και 144% για την ροπή και την τέμνουσα αντίστοιχα). Μάλιστα και στην περίπτωση αυτή, το εν λόγω προσομοίωμα αποδίδει τιμή για την καμπτική ροπή M_2 με διαφορετικό πρόσημο από το πρόσημο του αντίστοιχου μεγέθους αναφοράς. Τέλος το προσομοίωμα του Winkler εμφανίζεται ελαφρώς καλύτερο του

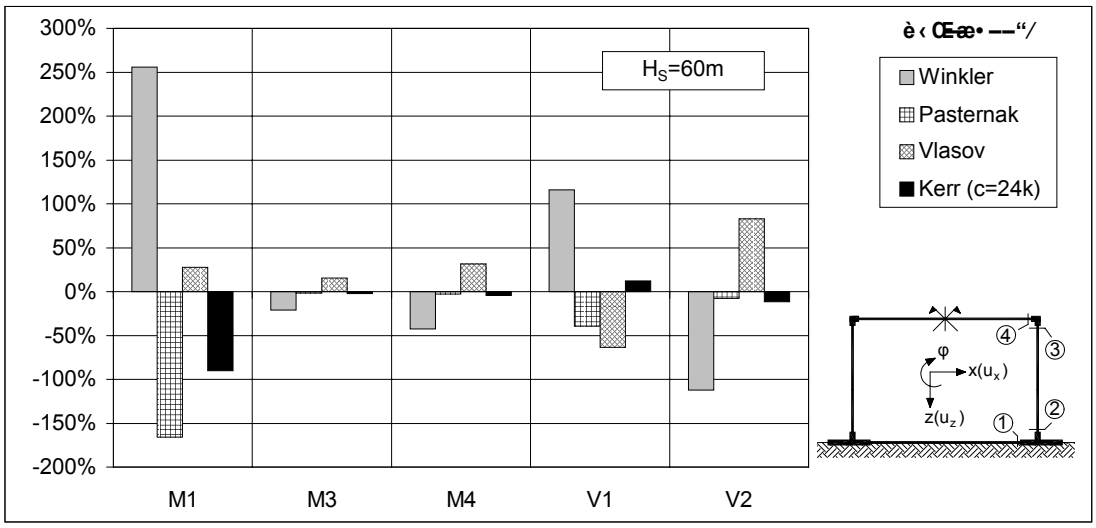
προσομοιώματος του Vlasov στο σύνολο σχεδόν των εξεταζόμενων εντατικών μεγεθών, με εξαίρεση την καμπτική ροπή M_1.

– Τα συμπεράσματα για την περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος ίσο με 20 μέτρα, δεν διαφέρουν σημαντικά από τα συμπεράσματα που εκτέθηκαν για δυο τις προηγούμενες περιπτώσεις. Το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων είναι αποδοτικότερο των υπολοίπων, με εξαίρεση και στην περίπτωση αυτή, την απόκλιση που αποδίδει για την καμπτική ροπή M_1. Η αποδοτικότητα του κυμαίνεται μεταξύ των αντίστοιχων αποδοτικοτήτων των δυο προηγουμένων περιπτώσεων. Ανάλογα είναι τα συμπεράσματα που αφορούν και τα υπόλοιπα προσομοιώματα. Έτσι, το προσομοίωμα του Pasternak αποδίδει τα αμέσως καλύτερα αποτελέσματα, ενώ τα προσομοιώματα του Vlasov και του Winkler εμφανίζονται να είναι σχεδόν ισοδύναμα και να αποδίδουν τα λιγότερο αποδεκτά αποτελέσματα κυρίως στην περίπτωση της καμπτικής ροπής M_2.

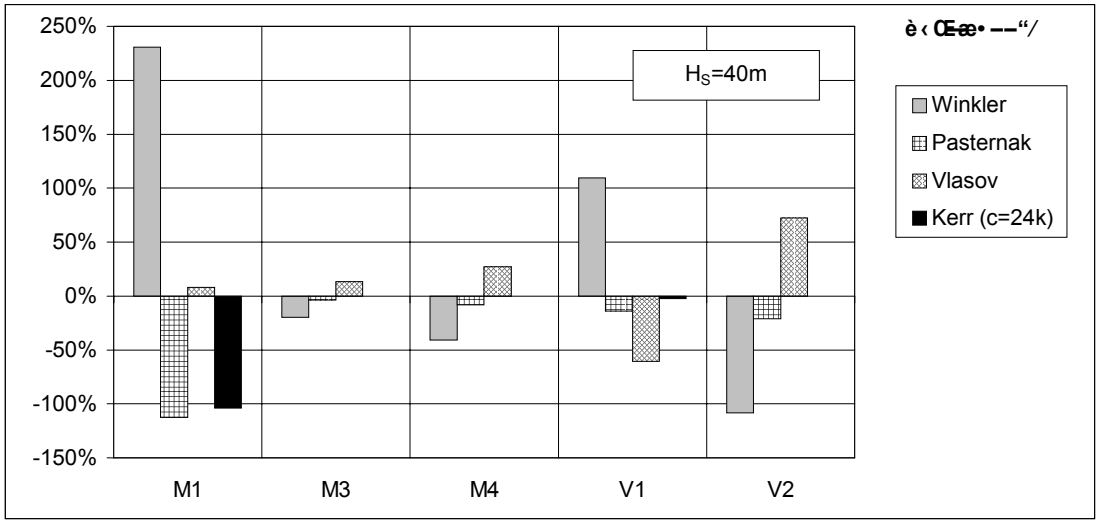
Συμπερασματικά μπορεί να σημειωθεί ότι στην περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώμα σκληρής αργίλου, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων εμφανίζεται αποδοτικότερο όλων των προσομοιωμάτων που εξετάστηκαν, όσον αφορά την σύγκλιση των εντατικών μεγεθών του πλαισίου. Η αποδοτικότητα αυτή επιτυγχάνεται αν για τον συντελεστή συσχέτισης n_{ck} γίνει χρήση της τιμής 24, όπως και στην περίπτωση της σύγκλισης των μεγεθών μετακίνησης. Εξαίρεση στην υπεροχή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων αποτελεί η καμπτική ροπή του άκρου της δοκού θεμελίωσης M_1, για την οποία όμως οι διαφορές από τα προσομοιώματα που δίνουν καλύτερα αποτελέσματα δεν είναι υπερβολικά μεγάλες.

Πίνακας 5.9. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προς εξέταση προσομοιωμάτων όσον αφορά τα ελεγχόμενα εντατικά μεγέθη. Περίπτωση Πυκνής άμμου.

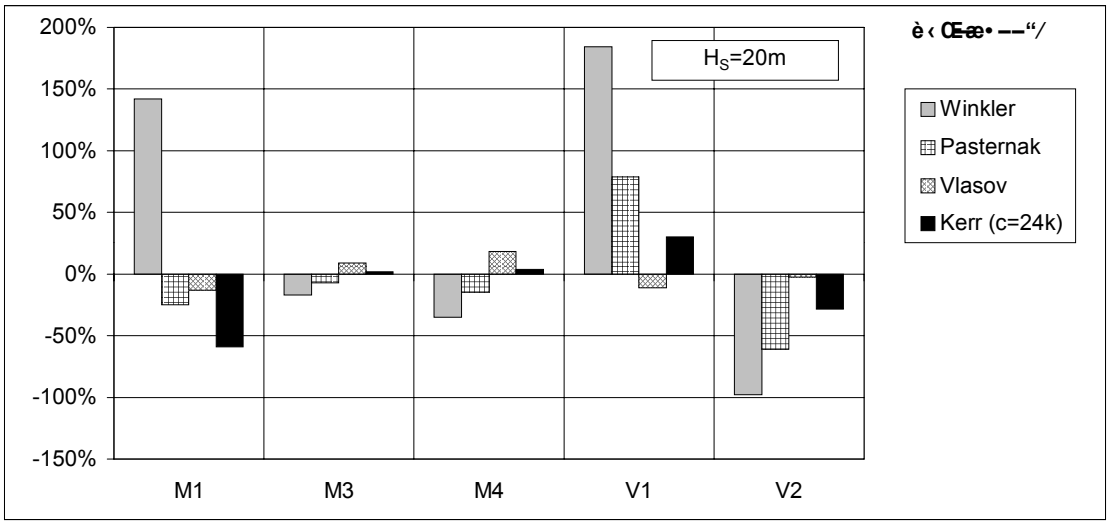
Απόλυτες τιμές						
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=24k)
H_s=60m	M_1	70,03	249,32	-46,23	89,27	7,03
	M_2	3,74	-415,04	-25,26	313,53	-38,53
	M_3	-453,10	-358,61	-446,56	-523,01	-443,57
	M_4	-374,33	-215,68	-363,34	-491,70	-358,32
	V_1	132,70	286,86	80,73	48,11	149,01
	V_2	103,83	-12,82	95,75	190,12	92,05
H_s=40m	M_1	72,22	239,00	-8,92	77,86	-2,90
	M_2	-1,36	-400,53	-79,43	265,28	-2,17
	M_3	-451,95	-361,88	-434,34	-512,12	-451,77
	M_4	-372,40	-221,17	-342,82	-473,42	-372,09
	V_1	134,60	281,93	115,64	53,44	131,46
	V_2	102,41	-8,78	80,66	176,68	102,18
H_s=20m	M_1	102,36	247,80	76,85	89,10	41,98
	M_2	-20,20	-357,28	-159,59	154,85	15,79
	M_3	-447,70	-371,64	-416,25	-487,20	-455,82
	M_4	-365,26	-237,56	-312,46	-431,58	-378,90
	V_1	97,16	276,19	173,84	86,51	126,23
	V_2	149,84	3,27	58,33	145,92	107,19
Αποκλίσεις						
	Προσομοίωμα:		Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=24k)
H_s=60m	M_1		256,01%	-166,02%	27,47%	-89,97%
	M_2		-11197,27%	-775,51%	8283,28%	-1130,26%
	M_3		-20,85%	-1,44%	15,43%	-2,10%
	M_4		-42,38%	-2,93%	31,35%	-4,28%
	V_1		116,17%	-39,16%	-63,75%	12,29%
	V_2		-112,35%	-7,78%	83,11%	-11,34%
H_s=40m	M_1		230,93%	-112,35%	7,80%	-104,01%
	M_2		29350,90%	5740,55%	-19606,19%	59,34%
	M_3		-19,93%	-3,90%	13,31%	-0,04%
	M_4		-40,61%	-7,94%	27,13%	-0,08%
	V_1		109,46%	-14,09%	-60,30%	-2,33%
	V_2		-108,58%	-21,24%	72,53%	-0,22%
H_s=20m	M_1		142,09%	-24,93%	-12,95%	-58,99%
	M_2		1668,70%	690,03%	-866,59%	-178,19%
	M_3		-16,99%	-7,02%	8,82%	1,81%
	M_4		-34,96%	-14,46%	18,16%	3,73%
	V_1		184,26%	78,92%	-10,97%	29,92%
	V_2		-97,82%	-61,07%	-2,62%	-28,47%



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 5.58. Αποκλίσεις των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από τη λύση αναφοράς όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη του πλαισίου, για τα εξεταζόμενα βάθη του ελαστικού υποβάθρου. Περίπτωση πυκνής άμμου.

Για την περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώμα πυκνής άμμου, εξετάστηκε κατ' αρχήν η απόδοση του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων για τιμή του συντελεστή συσχέτισης n_{ck}=24 για την οποία το συγκεκριμένο προσομοίωμα απέδωσε τα κατά «μέσον όρο» καλύτερα αποτελέσματα στον έλεγχο των μεγεθών μετακίνησης. Από τον πίνακα 5.9 και το σχήμα 5.58, προκύπτει μια σειρά συμπερασμάτων τα οποία σε γενικές γραμμές εμφανίζουν διαφοροποιήσεις από τα αντίστοιχα συμπεράσματα που προκύπτουν για την περίπτωση της σκληρής αργίλου. Η πιο βασική διαφορά, η οποία είναι μάλιστα κοινή για κάθε τιμή του βάθους του ελαστικού υποβάθρου που εξετάστηκε, είναι η αδυναμία όλων των προσομοιωμάτων να προσεγγίσουν τα αποτελέσματα αναφοράς όσον αφορά την καμπτική ροπή στη βάση του υποστυλώματος M_2 (για τον λόγο αυτό έχουν αφαιρεθεί από το σχήμα 5.58 τα δεδομένα που αφορούν τις αποκλίσεις των ροπών αυτών, καθώς οι πολύ μεγάλες τιμές τους, θα αλλοίωναν την εμφάνιση όλων των υπολοίπων που είναι σαφώς μικρότερες). Η αδυναμία αυτή θα πρέπει να αποδοθεί στην μεθοδολογία προσδιορισμού των τιμών των εδαφικών παραμέτρων, καθώς είναι κοινή για όλα τα προσομοιώματα και όχι για κάποιο από αυτά. Πέραν του παραπάνω συμπεράσματος, μπορούν να διατυπωθούν και τα εξής:

- Όταν το βάθος του ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 60 μέτρα, το προσομοίωμα του Pasternak εμφανίζεται το πιο αποδοτικό για το σύνολο σχεδόν των εξεταζόμενων εντατικών μεγεθών. Ωστόσο, και το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων αποδίδει αποκλίσεις της ίδιας τάξης μεγέθους οι οποίες είναι όμως ελαφρώς μεγαλύτερες. Ειδικά για την καμπτική ροπή M_2, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων αποδίδει απόκλιση -1130% έναντι του -776% που αποδίδει το προσομοίωμα του Pasternak. Φυσικά και οι δυο τιμές είναι πολύ μεγάλες και δεν μπορούν να θεωρηθούν αποδεκτές. Το προσομοίωμα του Vlasov υστερεί των δυο προηγουμένων με εξαίρεση την τιμή της καμπτικής ροπής M_1 για την οποία αποδίδει την μικρότερη απόκλιση. Τέλος, το προσομοίωμα του Winkler αποδίδει τις μεγαλύτερες αποκλίσεις απ' όλα τα υπόλοιπα εξεταζόμενα προσομοιώματα.
- Όταν το βάθος του ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 40 μέτρα, η υπεροχή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων είναι εμφανέστατη έναντι όλων των υπολοίπων αφού για το σύνολο σχεδόν των εντατικών μεγεθών οι αποκλίσεις δεν υπερβαίνουν το 2.5%. Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό ότι η απόκλιση της καμπτικής ροπής M_2 που αποδίδει το προσομοίωμα είναι της τάξης του 60% (σε «απόλυτες» τιμές, η τιμή της ροπής που αποδίδει το προσομοίωμα είναι –2,17kNm έναντι της τιμής –1,36kNm που είναι η τιμή αναφοράς), ενώ η αμέσως μεγαλύτερη είναι της τάξης του 5700%. Το προσομοίωμα του Pasternak αποδίδει τα αμέσως καλύτερα αποτελέσματα τα οποία μάλιστα – με εξαίρεση την καμπτική ροπή M_2 – δεν διαφέρουν σημαντικά από τα αποτελέσματα του προσομοιώματος του Kerr. Το προσομοίωμα του Vlasov, αποδίδει και στην περίπτωση αυτή μαζί με το προσομοίωμα του Winkler τα χειρότερα αποτελέσματα. Εξαίρεση αποτελεί η τιμή της καμπτικής ροπής M_1, για την οποία το προσομοίωμα του Vlasov αποδίδει την μικρότερη απόκλιση (7.80%).
- Όταν το βάθος του ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 20 μέτρα δεν μπορεί, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, να εξαχθεί ένα σαφές συμπέρασμα για την υπεροχή κάποιου από τα εξεταζόμενα προσομοιώματα. Αποδοτικότερα εμφανίζονται τα προσομοιώματα του Kerr και του Vlasov, τα οποία

μπορεί να θεωρηθεί ότι αλληλοσυμπληρώνονται. Πιο συγκεκριμένα, το προσομοίωμα του Vlasov υπερέχει σημαντικά όσον αφορά την σωστή απόδοση των τεμνουσών δυνάμεων V_1 και V_2 (οι αποκλίσεις δεν υπερβαίνουν το 10%) και της καμπτικής ροπής M_1, ενώ το προσομοίωμα του Kerr υπερέχει σημαντικά όλων των υπολοίπων προσομοιωμάτων όσον αφορά τα υπόλοιπα εξεταζόμενα εντατικά μεγέθη. Ειδικά για την περίπτωση της καμπτικής ροπής M_2 που αποτελεί και το πιο «ευαίσθητο» από τα εξεταζόμενα εντατικά μεγέθη, το προσομοίωμα του Kerr αποδίδει με σημαντική διαφορά την μικρότερη απόκλιση (-178% έναντι 700% της αμέσως μικρότερης). Βεβαίως όμως δεν θα πρέπει να παραβλέπεται το γεγονός ότι πρόκειται για μια μεγάλη απόκλιση. Τα προσομοιώματα των Pasternak και Winkler αποδίδουν στην περίπτωση αυτή τα «φτωχότερα» αποτελέσματα.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα αναφορικά με το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων του Kerr, θα πρέπει να τονιστεί ότι η τιμή του συντελεστή συσχέτισης n_{ck}=24 δεν προσδίδει σαφή υπεροχή στο εν λόγω προσομοίωμα έναντι των υπολοίπων σε όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις βάθους του ελαστικού υποβάθρου, όπως συμβαίνει με την ίδια τιμή για την περίπτωση της σκληρής αργίλου. Πιο συγκεκριμένα:

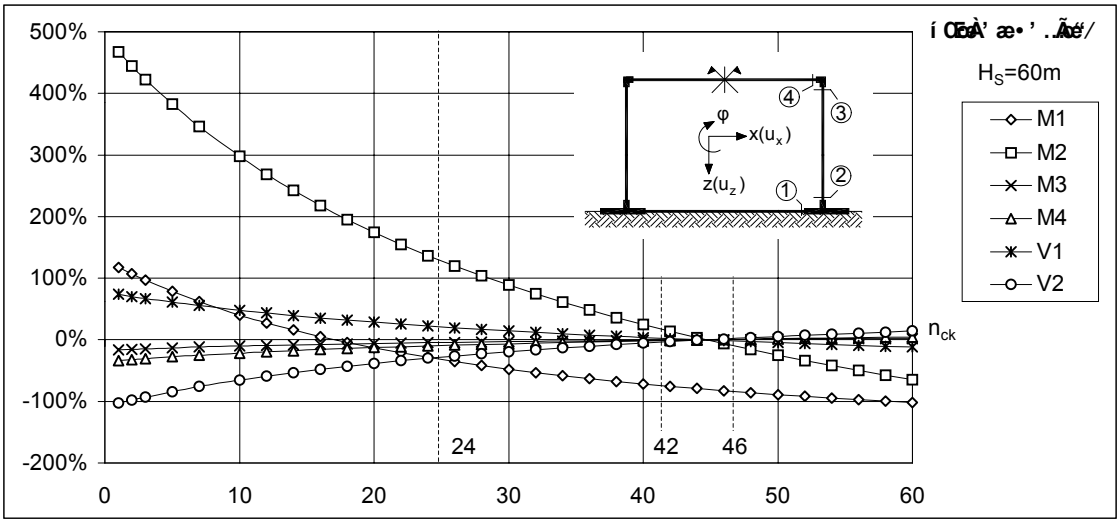
για H_S=60m υπερέχουν τα προσομοιώματα του Pasternak και του Kerr,

για H_S=40m υπερέχει σαφώς το προσομοίωμα του Kerr και,

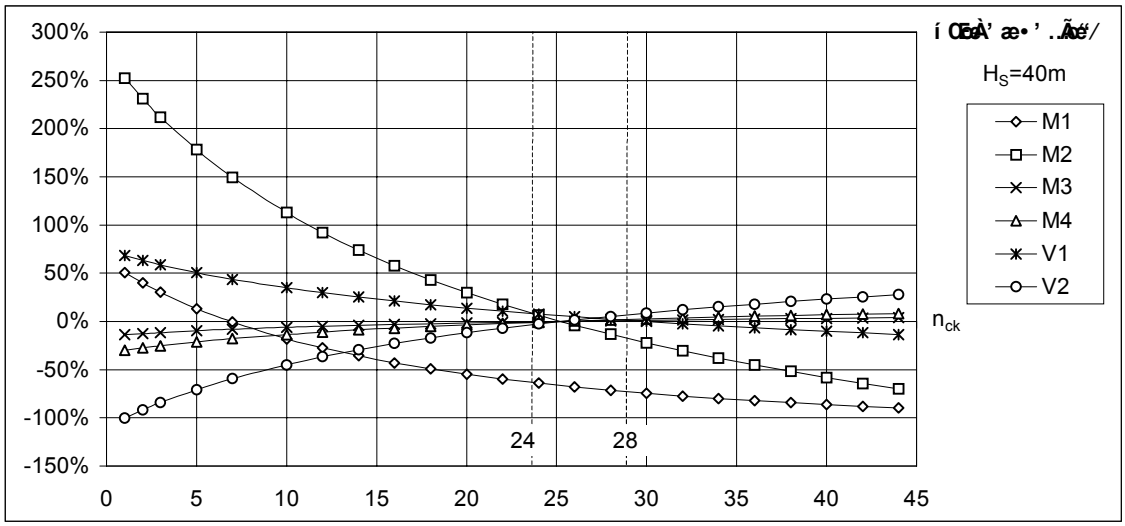
για H_S=20m υπερέχουν τα προσομοιώματα του Vlasov και του Kerr.

Με δεδομένη την καταγραφή των συμπερασμάτων τόσο για την περίπτωση της σκληρής αργίλου, όσο και για την περίπτωση της πυκνής άμμου, τίθεται το ερώτημα της ύπαρξης ή όχι συντελεστών συσχέτισης που προσδίδουν στο προσομοίωμα των τριών παραμέτρων ακόμα καλύτερη απόδοση όσον αφορά την προσέγγιση των εντατικών μεγεθών. Το ερώτημα αυτό τίθεται πιο επιτακτικά για την περίπτωση της πυκνής άμμου, όπου ο συντελεστής n_{ck}=24 δεν προσδίδει σαφή υπεροχή.

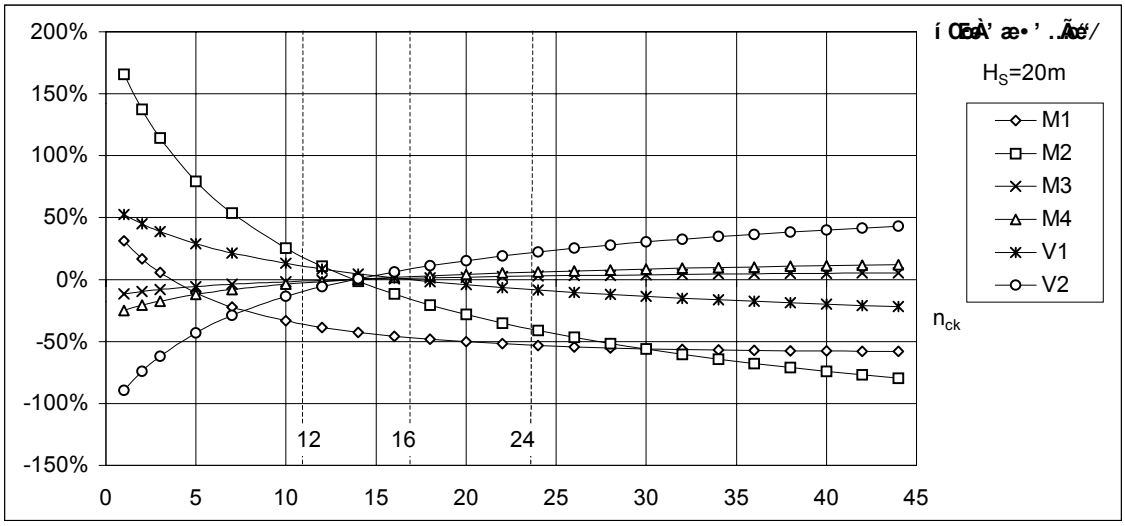
Στα παρακάτω σχήματα δίνεται εποπτικά η διερεύνηση της σύγκλισης προς την λύση αναφοράς όλων των εντατικών μεγεθών που ελέγχθηκαν στα πλαίσια του παρόντος παραδείγματος. Πιο συγκεκριμένα, στο σχήμα 5.59 δίνονται τα αποτελέσματα της διερεύνησης για την περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώματα σκληρής αργίλου για κάθε ένα από τα διαφορετικά πάχη που εξετάστηκαν, ενώ στο σχήμα 5.60 δίνονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα για την περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώματα πυκνής άμμου. Στα σχήματα αυτά, επισημαίνονται τόσο οι τιμές του συντελεστή συσχέτισης για τις οποίες έγινε ήδη έλεγχος (n_{ck}=24), όσο και οι περιοχές τιμών του για τις οποίες κατά περίπτωση επιτυγχάνονται οι βέλτιστες αποδόσεις του προσομοιώματος.



(α)

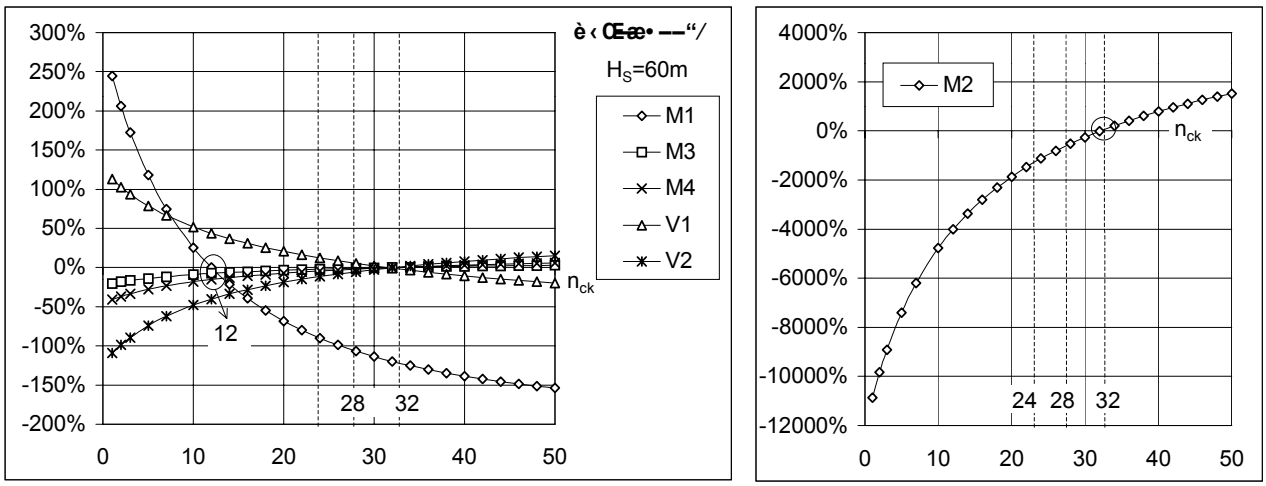


(β)

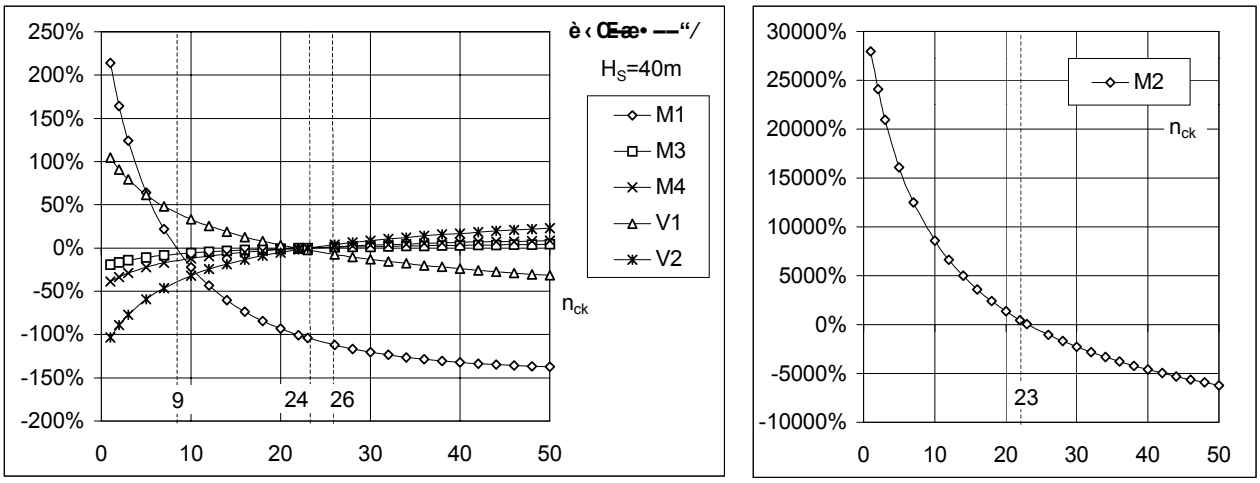


(γ)

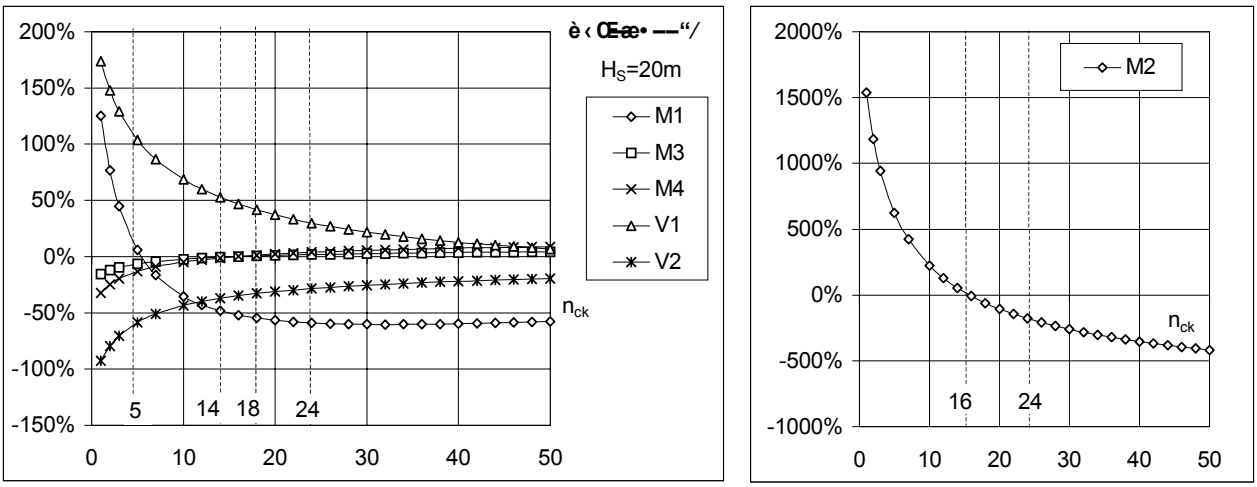
Σχήμα 5.59. Μεταβολή των αποκλίσεων από τη λύση αναφοράς των εντατικών μεγεθών του μονώροφου πλαισίου όπως προκύπτουν από την χρήση του προσομοιώματος τριών παραμέτρων. Περίπτωση Σκληρής αργίλου.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 5.60. Μεταβολή των αποκλίσεων από τη λύση αναφοράς των εντατικών μεγεθών του μονώροφου πλαισίου όπως προκύπτουν από την χρήση του προσομοιώματος τριών παραμέτρων. Περίπτωση Πυκνής Άμμου.

Από το σχήμα 5.59 προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Οι περιοχές τιμών των συντελεστών συσχέτισης που οδηγούν σε βέλτιστα αποτελέσματα, μεταβάλλονται σε σχέση με το βάθος του ελαστικού υποβάθρου. Πιο συγκεκριμένα, οι περιοχές αυτές είναι οι εξής:
  H_S=60m → n_{ck}=42 – 46, H_S=40m → n_{ck}=24 – 28 και H_S=20m → n_{ck}=12 – 16.
  Οι περιοχές αυτές δεν αλληλοκαλύπτονται, κάτι που σημαίνει ότι δεν ορίζεται μια κοινή περιοχή βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης για κάθε βάθος ελαστικού υποβάθρου.
- Λαμβάνοντας την μέση τιμή του διαστήματος που ορίζει το χαμηλότερο και το υψηλότερο όριο των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης (δηλαδή του διαστήματος (12,46)) προκύπτει η τιμή 29. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή n_{ck}=24 που εξετάστηκε προηγουμένως βρίσκεται κοντά στη μέση αυτή τιμή. Αν και από τη μορφή των καμπύλων μεταβολής των αποκλίσεων προκύπτει ότι οι μεταβολές αυτές δεν είναι γραμμικές, παρουσιάζει ενδιαφέρον ο έλεγχος του αν η μέση τιμή 30≈29 μπορεί να οδηγήσει σε πιο καλά αποτελέσματα απ' ότι η τιμή n_{ck}=24. Ο έλεγχος αυτός θα γίνει παρακάτω. Επιπλέον, ενδιαφέρον παρουσιάζει και ο έλεγχος της τιμής n_{ck}=20 η οποία βρίσκεται πιο κοντά στο πεδίο των βέλτιστων τιμών του συντελεστή συσχέτισης για περίπτωση που το βάθος του ελαστικού στρώματος είναι ίσο με 20m.
- Για κάθε τιμή του βάθους του ελαστικού υποβάθρου, η βέλτιστη απόκλιση της καμπτικής ροπής M_1 βρίσκεται συστηματικά εκτός των πεδίων τιμών που οδηγούν στις βέλτιστες τιμές των υπολοίπων εντατικών μεγεθών. Οι βέλτιστες αυτές τιμές είναι πολύ μικρές, και επομένως δικαιολογείται η παρατήρηση που καταγράφηκε κατά την προηγηθείσα συγκριτική αξιολόγηση των προσομοιωμάτων, ότι ενώ το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων πλεονεκτεί των υπολοίπων στην πλειονότητα των εξεταζόμενων εντατικών μεγεθών, μειονεκτεί συστηματικά στο μέγεθος M_1.

Από το σχήμα 5.60 προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Η συμπεριφορά του προσομοιώματος είναι ποιοτικώς παρόμοια για τις περιπτώσεις που το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος H_S=60m και H_S=40m, ενώ διαφοροποιείται σημαντικά στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει μικρό βάθος (H_S=20m).
- Για τις περιπτώσεις H_S=60m και H_S=40m, οι περιοχές βέλτιστων τιμών του συντελεστή n_{ck} είναι:
  H_S=60m → n_{ck}=28 – 32, H_S=40m → n_{ck}=24 – 26.
  Και στην περίπτωση που μελετάται, η καμπύλη της μεταβολής των αποκλίσεων της καμπτικής ροπής M_1 συμπεριφέρεται διαφορετικά από τις αντίστοιχες καμπύλες των υπολοίπων εντατικών μεγεθών, καθώς αποκτά τις βέλτιστες της τιμές εκτός των πεδίων τιμών του n_{ck} που ορίστηκαν παραπάνω. Οι τιμές αυτές είναι μικρότερες των κάτω ορίων των πεδίων αυτών.
- Η συμπεριφορά των καμπύλων μεταβολής των αποκλίσεων των εντατικών μεγεθών για την περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος ίσο με 20 μέτρα, είναι διαφορετική απ' ότι στις προηγούμενες περιπτώσεις. Πιο συγκεκριμένα:
  Η τιμή της τέμνουσας V_2 προσεγγίζει σχεδόν «ασυμπτωτικά» τον οριζόντιο άξονα των διαγραμμάτων αποκλίσεων, κάτι που σημαίνει ότι το εν λόγω εντατικό μέγεθος συγκλίνει προς την λύση αναφοράς για πολύ μεγάλες τιμές του συντελεστή n_{ck}. Ωστόσο, στην περιοχή τιμών $20<n_{ck}<40$ που εμφανίζει πρακτικό

ενδιαφέρον στα πλαίσια των αναλύσεων του παρόντος παραδείγματος, οι τιμές των αποκλίσεων της τέμνουσας V_2 κυμαίνονται μεταξύ του –22% και του –32%.

Παρόμοια συμπεριφορά εμφανίζει και η καμπύλη μεταβολής της τέμνουσας V_1. Με ανάλογο σκεπτικό που ακολουθήθηκε και για την τέμνουσα V_2, ελέγχθηκε η συμπεριφορά της V_1 εντός του εύρους $20<n_{ck}<40$. Από το έλεγχο αυτό προκύπτει ότι εντός του διαστήματος αυτού οι αποκλίσεις της V_1 κυμαίνονται μεταξύ του 13% και του 37%.

Η μεταβολή των αποκλίσεων της καμπτικής ροπής M_1 ακολουθεί τον κανόνα μεταβολής που διαπιστώθηκε και κατά τη μελέτη των ελαστικών υποβάθρων μεγαλύτερου βάθους που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Δηλαδή, συγκλίνει προς τη λύση αναφοράς για σχετικά μικρές τιμές του συντελεστή συσχέτισης, όπως γίνεται κατανοητό από τη μελέτη του σχήματος 5.60γ.

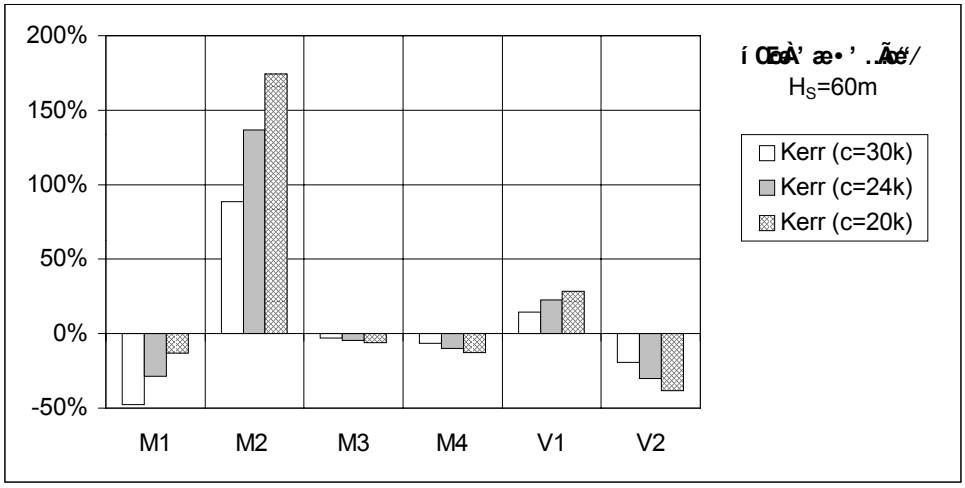
Οι τιμές των εντατικών μεγεθών M_2, M_3 και M_4 παρουσιάζουν την βέλτιστη σύγκλιση τους στο στενό πεδίο τιμών $14<n_{ck}<18$. Πιο συγκεκριμένα, η τιμή $n_{ck}=16$ αποδίδει την βέλτιστη τιμή απόκλισης και για τα τρία αυτά εντατικά μεγέθη.

– Η τιμή $n_{ck}=24$ που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως για την συγκριτική αξιολόγηση του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων με τα υπόλοιπα εξεταζόμενα προσομοιώματα, βρίσκεται εντός του πεδίου τιμών που οδηγούν σε βέλτιστη απόδοση το εν λόγω προσομοίωμα μόνο για την περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος H_S=40m. Ταυτόχρονα, είναι μικρότερη του κάτω ορίου του πεδίου των βέλτιστων τιμών του n_{ck} κατά την περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος H_S=60m. Με βάση τα παραπάνω, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον ο έλεγχος του αν η τιμή $n_{ck}=26$ μπορεί να δώσει καλύτερα αποτελέσματα από την τιμή $n_{ck}=24$ που ήδη εξετάστηκε. Το σκεπτικό για την επιλογή της τιμής αυτής για τον επιπλέον έλεγχο, βασίζεται στο γεγονός ότι βρίσκεται περίπου στο μέσο του διαστήματος που ορίζει το χαμηλότερο και το υψηλότερο όριο των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης (δηλαδή του διαστήματος (24,32)) για τις περιπτώσεις που το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος H_S=40m και H_S=60m. Παράλληλα έχει αξία και ένας έλεγχος για $n_{ck}=20$, διότι η τιμή αυτή βρίσκεται πιο κοντά στην περιοχή βέλτιστων τιμών στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει πάχος H_S=20m.

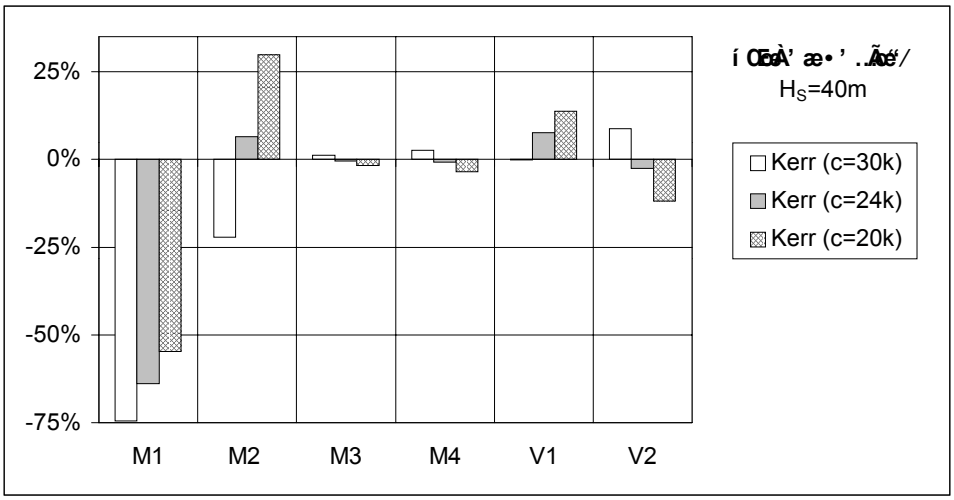
Στους πίνακες και τα σχήματα που ακολουθούν, γίνεται μια συγκριτική παρουσίαση των αποκλίσεων των εντατικών μεγεθών όπως προκύπτουν από την εφαρμογή των νέων συντελεστών συσχέτισης (n_{ck}=20, 30 για την περίπτωση της σκληρής αργίλου και n_{ck}=20, 26 για την περίπτωση της πυκνής άμμου), με τις αντίστοιχες αποκλίσεις που προκύπτουν από την χρήση του συντελεστή που εξετάστηκε προηγουμένως ($n_{ck}=24$). Στόχος των συγκρίσεων αυτών, είναι να αποδειχθεί αν οι νέοι αυτοί συντελεστές βελτιώνουν ή όχι τα αποτελέσματα που αποδίδει το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων.

Πίνακας 5.10. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, του προσομοιώματος του Kerr για τιμές του συντελεστή συσχέτισης n_{ck}=20, 24 και 30. Περίπτωση Σκληρής αργίλου.

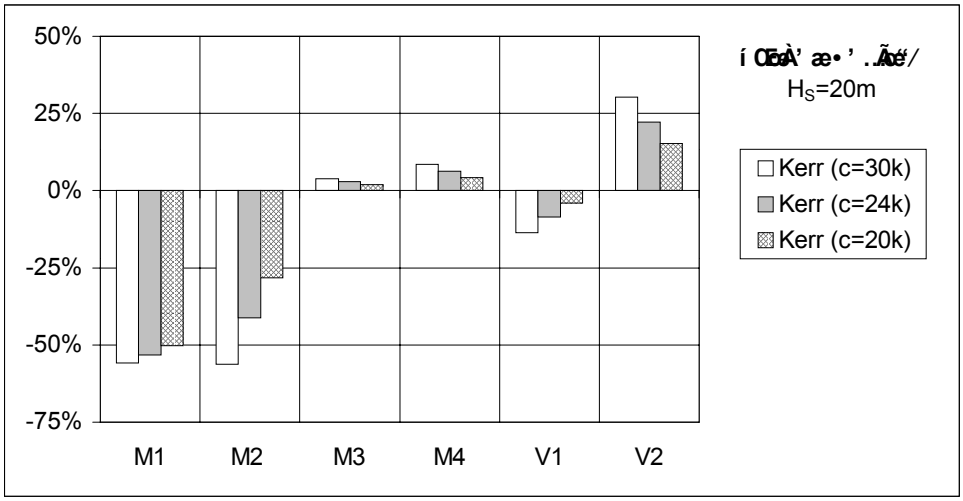
Απόλυτες τιμές					
Προσομοίωμα:		FEM	Kerr (c=30k)	Kerr (c=24k)	Kerr (c=20k)
H_s=60m	M_1	36,76	19,24	26,27	31,98
	M_2	-26,59	-50,16	-62,97	-73,01
	M_3	-174,90	-169,59	-166,70	-164,43
	M_4	-139,09	-130,16	-125,31	-121,51
	V_1	67,17	76,96	82,27	86,37
	V_2	33,71	27,14	23,57	20,78
H_s=40m	M_1	63,41	16,20	22,88	28,76
	M_2	-51,45	-40,05	-54,76	-66,77
	M_3	-210,25	-212,83	-209,51	-206,80
	M_4	-163,45	-167,77	-162,19	-157,64
	V_1	84,20	84,09	90,59	95,78
	V_2	36,09	39,27	35,17	31,83
H_s=20m	M_1	82,50	36,45	38,63	41,04
	M_2	-63,51	-27,85	-37,38	-45,61
	M_3	-207,53	-215,58	-213,43	-211,57
	M_4	-158,88	-172,39	-168,78	-165,66
	V_1	92,33	79,71	84,47	88,51
	V_2	32,73	42,67	40,01	37,72
Αποκλίσεις					
Προσομοίωμα:			Kerr (c=30k)	Kerr (c=24k)	Kerr (c=20k)
H_s=60m	M_1		-47,67%	-28,53%	-13,01%
	M_2		88,65%	136,82%	174,56%
	M_3		-3,04%	-4,69%	-5,99%
	M_4		-6,42%	-9,91%	-12,64%
	V_1		14,58%	22,48%	28,58%
	V_2		-19,48%	-30,07%	-38,36%
H_s=40m	M_1		-74,46%	-63,91%	-54,64%
	M_2		-22,15%	6,43%	29,77%
	M_3		1,23%	-0,35%	-1,64%
	M_4		2,64%	-0,77%	-3,55%
	V_1		-0,13%	7,59%	13,76%
	V_2		8,80%	-2,55%	-11,82%
H_s=20m	M_1		-55,82%	-53,18%	-50,26%
	M_2		-56,15%	-41,14%	-28,19%
	M_3		3,88%	2,84%	1,95%
	M_4		8,50%	6,23%	4,27%
	V_1		-13,67%	-8,52%	-4,14%
	V_2		30,36%	22,24%	15,24%



(α)



(β)

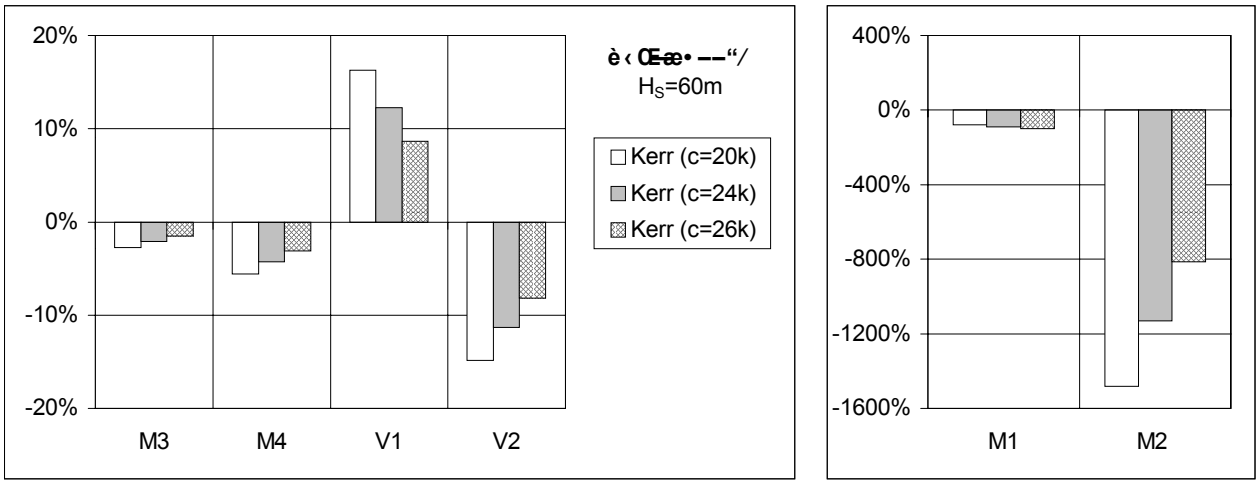


(γ)

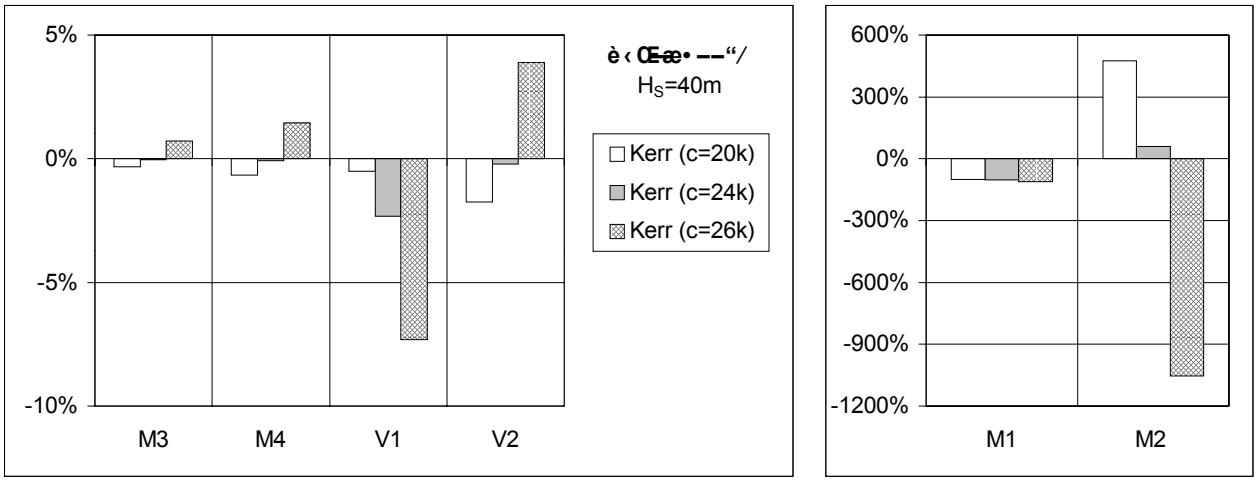
Σχήμα 5.61. Αποτίμηση της αποδοτικότητας του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων όταν ως συντελεστές συσχέτισης χρησιμοποιούνται οι τιμές n_{ck}=20, n_{ck}=24 και n_{ck}=30. Περίπτωση σκληρής αργίλου.

Πίνακας 5.11. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, του προσομοιώματος του Kerr για τιμές του συντελεστή συσχέτισης n_{ck}=22, 24 και 26. Περίπτωση Πυκνής άμμου.

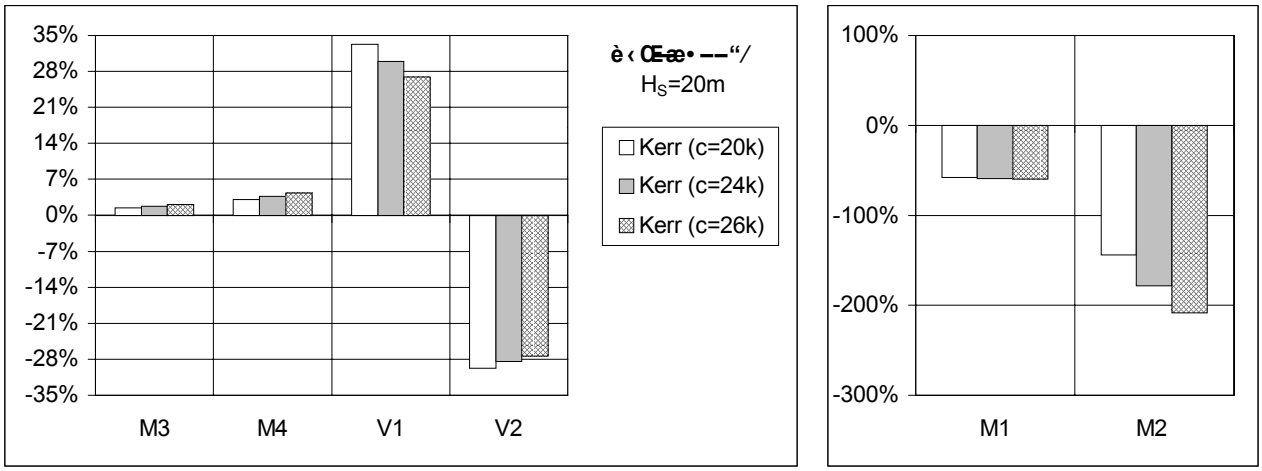
Απόλυτες τιμές					
Προσομοίωμα:		FEM	Kerr (c=22k)	Kerr (c=24k)	Kerr (c=26k)
H_s=60m	M_1	70,03	14,10	7,03	0,81
	M_2	3,74	-51,64	-38,53	-26,68
	M_3	-453,10	-440,61	-443,57	-446,24
	M_4	-374,33	-353,35	-358,32	-362,81
	V_1	132,70	154,30	149,01	144,16
	V_2	103,83	88,40	92,05	95,35
H_s=40m	M_1	72,22	-0,55	-2,90	-8,83
	M_2	-1,36	-7,80	-2,17	12,97
	M_3	-451,95	-450,50	-451,77	-455,19
	M_4	-372,40	-369,96	-372,09	-377,83
	V_1	134,60	133,93	131,46	124,76
	V_2	102,41	100,61	102,18	106,40
H_s=20m	M_1	102,36	42,97	41,98	41,31
	M_2	-20,20	8,93	15,79	21,89
	M_3	-447,70	-454,28	-455,82	-457,20
	M_4	-365,26	-376,30	-378,90	-381,21
	V_1	97,16	129,53	126,23	123,30
	V_2	149,84	105,27	107,19	108,88
Αποκλίσεις					
Προσομοίωμα:			Kerr (c=20k)	Kerr (c=24k)	Kerr (c=26k)
H_s=60m	M_1		-79,86%	-89,97%	-98,84%
	M_2		-1480,63%	-1130,26%	-813,41%
	M_3		-2,76%	-2,10%	-1,51%
	M_4		-5,60%	-4,28%	-3,08%
	V_1		16,28%	12,29%	8,63%
	V_2		-14,86%	-11,34%	-8,16%
H_s=40m	M_1		-100,77%	-104,01%	-112,22%
	M_2		473,74%	59,34%	-1053,32%
	M_3		-0,32%	-0,04%	0,72%
	M_4		-0,66%	-0,08%	1,46%
	V_1		-0,50%	-2,33%	-7,31%
	V_2		-1,75%	-0,22%	3,89%
H_s=20m	M_1		-58,02%	-58,99%	-59,64%
	M_2		-144,22%	-178,19%	-208,34%
	M_3		1,47%	1,81%	2,12%
	M_4		3,02%	3,73%	4,37%
	V_1		33,31%	29,92%	26,91%
	V_2		-29,74%	-28,47%	-27,33%



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 5.62. Αποτίμηση της αποδοτικότητας του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων όταν ως συντελεστές συσχέτισης χρησιμοποιούνται οι τιμές n_{ck}=20, n_{ck}=24 και n_{ck}=26. Περίπτωση πυκνής άμμου.

Από την μελέτη του Πίνακα 5.10 σε παράθεση με τον Πίνακα 5.8, προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα αναφορικά με την περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από σκληρή άργιλο:

- Όταν το πάχος του ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 60 μέτρα, το προσομοίωμα του Kerr εμφανίζει την καλύτερη επίδοση για n_{ck}=30. Για την δεδομένη τιμή μειώνονται όλες οι αποκλίσεις που προκύπτουν όταν γίνεται χρήση της τιμής n_{ck}=24, εκτός της απόκλισης της ροπής M_1. Σημαντική είναι κυρίως η μείωση της απόκλισης της καμπτικής ροπής M_2 από 174% στο 88%. Αντίθετα, η τιμή n_{ck}=20 οδηγεί σε αυξήσεις των αποκλίσεων πλην της απόκλισης της καμπτικής ροπής M_1. Όσον αφορά την σύγκριση με τα υπόλοιπα προσομοιώματα, η χρήση της τιμής n_{ck}=30 διευρύνει την υπεροχή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων σε όλα τα εξεταζόμενα εντατικά μεγέθη πλην της καμπτικής ροπής M_1.
- Όταν το πάχος του ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 40 μέτρα, η τιμή n_{ck}=24 αποδίδει τα καλύτερα αποτελέσματα από τις υπόλοιπες εξεταζόμενες τιμές, όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο καθώς από το σχήμα 5.59β προκύπτει το συμπέρασμα ότι βρίσκεται εντός του πεδίου των βέλτιστων τιμών του συντελεστή συσχέτισης για την δεδομένη περίπτωση. Όσον αφορά την σύγκριση με τα υπόλοιπα προσομοιώματα, και η τιμή n_{ck}=30 προσδίδει στο προσομοίωμα των τριών παραμέτρων υπεροχή στην σύγκλιση όλων των εντατικών μεγεθών, αν εξαιρεθεί η τιμή της ροπής M_1. Επομένως, αν και μειώνει την απόδοση του προσομοιώματος σε σχέση με την απόδοση που επιτυγχάνεται όταν γίνεται χρήση της τιμής n_{ck}=24, η μείωση που προκαλεί δεν ανατρέπει την υπεροχή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων έναντι των υπολοίπων. Τέλος, και στην παρούσα περίπτωση, η τιμή n_{ck}=20 αποδίδει τα φτωχότερα αποτελέσματα εκτός της σημαντικής βελτίωσης που επιφέρει στην σύγκλιση της ροπής M_1. Ωστόσο, ακόμα και η τιμή αυτή οδηγεί σε υπεροχή του προσομοιώματος έναντι όλων των υπόλοιπων.
- Στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος ίσο με 20 μέτρα, η βέλτιστη τιμή του συντελεστή συσχέτισης είναι η τιμή n_{ck}=20, καθώς βελτιώνει την απόδοση του προσομοιώματος για όλα τα εντατικά μεγέθη σε σύγκριση με τους δυο υπόλοιπους εξεταζόμενους συντελεστές. Δυσμενέστερη τιμή για την δεδομένη περίπτωση είναι η τιμή n_{ck}=30. Όσον αφορά την σύγκριση με τα υπόλοιπα προσομοιώματα και οι τρεις εξεταζόμενες τιμές του συντελεστή συσχέτισης προσδίδουν υπεροχή στο προσομοίωμα των τριών παραμέτρων, εκτός της περίπτωσης της καμπτικής ροπής M_1.

Από τα παραπάνω εκτεθέντα, μπορεί να εξαχθεί το βασικό συμπέρασμα ότι οι τιμές n_{ck}=24 και n_{ck}=30 εμφανίζονται ποιοτικά ισοδύναμες όσον αφορά το γεγονός ότι δεν «αλλοιώνουν» την υπεροχή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων έναντι των υπολοίπων εξεταζόμενων προσομοιωμάτων, για κανένα από τα βάθη του ελαστικού υποβάθρου που ελέγχθηκαν. Όσον αφορά την μεταξύ τους σύγκριση, η τιμή n_{ck}=24 εμφανίζεται σε γενικές γραμμές πιο αποδοτική από την τιμή n_{ck}=30 κυρίως για μεσαία και μικρά βάθη του υποβάθρου. Η τιμή n_{ck}=20 αποτυγχάνει να βελτιώσει την απόδοση του προσομοιώματος για τα βάθη H_S=60m και H_S=40m, ενώ το επιτυγχάνει για H_S=20m. Επομένως η τιμή n_{ck}=24, αποδίδει την κατά μέσον όρο βέλτιστη απόδοση του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων ανεξαρτήτως του βάθους του ελαστικού υποβάθρου.

Από την μελέτη του Πίνακα 5.11 σε παράθεση με τον Πίνακα 5.9, προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα αναφορικά με την περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από πυκνή άμμο:

– Όταν το πάχος του ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 60 μέτρα, η τιμή n_{ck}=26 είναι αυτή που αποδίδει την βέλτιστη επίδοση στο προσομοίωμα των τριών παραμέτρων. Πάντως ακόμα και με την χρήση της τιμής αυτής, δεν επιτυγχάνεται η πλήρης υπεροχή του προσομοιώματος έναντι του προσομοιώματος του Pasternak. Ωστόσο μειώνονται γενικά όλες οι αποκλίσεις, κυρίως όσον αφορά την απόκλιση της ροπής M_2. Η τιμή n_{ck}=20 αποδίδει ελαφρώς χειρότερα αποτελέσματα, με εξαίρεση την τιμή της ροπής M_1 για την οποία επιτυγχάνεται μια μείωση, η οποία όμως δεν μπορεί να θεωρηθεί σημαντική.
– Όταν το πάχος του ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 40 μέτρα, η τιμή n_{ck}=24 αποδίδει τα βέλτιστα αποτελέσματα. Όπως μάλιστα καθίσταται σαφές από την μελέτη του πίνακα 5.9 – και τονίστηκε κατά τον σχολιασμό του πιο πάνω – η τιμή αυτή αποδίδει στο προσομοίωμα των τριών παραμέτρων την αναμφισβήτητη υπεροχή έναντι των υπολοίπων προσομοιωμάτων. Σημαντικότατη μάλιστα, είναι η επίδοση που επιτυγχάνεται όσον αφορά το «ευαίσθητο» μέγεθος M_2 καθώς η προκύπτουσα απόκλιση είναι της τάξης του 60%, τη στιγμή που οι αποκλίσεις είναι πάνω από 450% όταν γίνεται χρήση της τιμής n_{ck}=20, και κάτω από το –1000% όταν γίνεται χρήση της τιμής n_{ck}=26. Είναι πάντως χαρακτηριστικό, ότι για την παρούσα περίπτωση και οι τρεις τιμές του συντελεστή συσχέτισης καθιστούν το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων αποδοτικότερο όλων των υπολοίπων προσομοιωμάτων.
– Όταν το πάχος του ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 20 μέτρα, και οι τρεις τιμές του συντελεστή συσχέτισης που εξετάζονται, εμφανίζονται σχετικά ισοδύναμες για όλα τα εντατικά μεγέθη, εκτός της ροπής M_2 για την οποία η τιμή n_{ck}=20 επιτυγχάνει την μικρότερη απόκλιση (–144% έναντι των αποκλίσεων –178% και –208% που αποδίδονται από τους συντελεστές n_{ck}=24 και n_{ck}=26 αντίστοιχα). Είναι πάντως χαρακτηριστικό ότι καμιά από τις τιμές n_{ck}=20 και n_{ck}=26, δεν ανατρέπει το συμπέρασμα που προέκυψε παραπάνω για την τιμή n_{ck}=24, σύμφωνα με το οποίο για βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=20m τα προσομοιώματα των τριών παραμέτρων και του Vlasov «αλληλοσυμπληρώνονται» όσον αφορά την σύγκλιση των εντατικών μεγεθών προς τα αποτελέσματα αναφοράς.

Από τα παραπάνω εκτεθέντα για την περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώμα πυκνής άμμου, προκύπτει το βασικό συμπέρασμα ότι οι τιμές n_{ck}=20 και n_{ck}=26 που εξετάσθηκαν, δεν επιφέρουν σημαντικές αλλαγές στην συμπεριφορά του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων. Σε γενικές γραμμές, δεν ανατρέπονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την εξέταση του συντελεστή n_{ck}=24, σύμφωνα με τα οποία η πλήρης υπεροχή του προσομοιώματος επιτυγχάνεται μόνο για βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=40m. Για βάθη ελαστικού υποβάθρου H_S=60m και H_S=20m, και οι τρεις τιμές του συντελεστή συσχέτισης καθιστούν το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων «ισοδύναμο» με τα προσομοιώματα του Pasternak και του Vlasov αντίστοιχα. Τέλος αξίζει να σημειωθεί, ότι όσο μειώνεται η τιμή του βάθους του ελαστικού υποβάθρου μειώνεται αντίστοιχα και η τιμή του συντελεστή συσχέτισης που αποδίδει τα βέλτιστα αποτελέσματα.

Κλείνοντας την αναφορά στην Επίλυση 3.α3, θα γίνει μια συνοπτική παράθεση των βασικών συμπερασμάτων που προέκυψαν, και τα οποία έχουν καταγραφεί σε διάφορα σημεία του κειμένου που προηγήθηκε:

Συγκρίσεις μεγεθών μετακίνησης

Όσον αφορά την σύγκριση των μεγεθών μετακίνησης του πλαισίου που επιλύθηκε, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων εμφανίζεται σαφώς αποδοτικότερο όλων των υπολοίπων που εξετάστηκαν εάν ως τιμή για τον συντελεστή συσχέτισης ληφθεί η τιμή n_{ck}=24. Η τιμή αυτή αποδίδει την κατά μέσο όρο βέλτιστη απόδοση του προσομοιώματος, ανεξαρτήτως τύπου εδάφους και βάθους του ελαστικού υποβάθρου. Βεβαίως κατά περίπτωση, επιτυγχάνονται ακόμα καλύτερα αποτελέσματα με χρήση διαφορετικών τιμών για τον n_{ck} όπως φαίνεται στον πίνακα 5.7. Οι αντίστοιχες αποκλίσεις τείνουν μάλιστα στο μηδέν όπως προκύπτει από την μελέτη των σχημάτων 5.55 και 5.56.

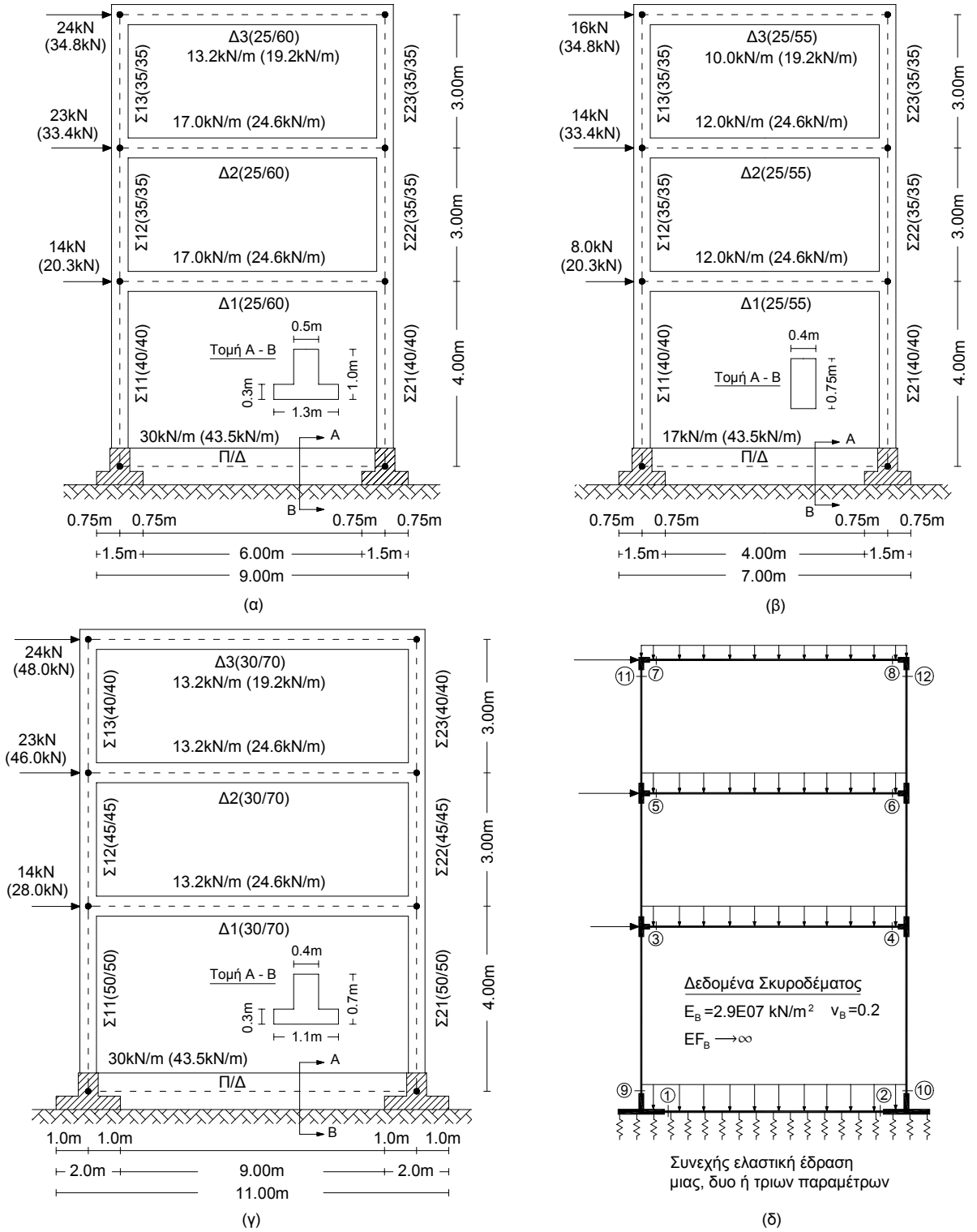
Συγκρίσεις μεγεθών έντασης

Στην περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώματα σκληρής αργίλου, η υπεροχή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων είναι σαφής εάν ως τιμή τον συντελεστή συσχέτισης ληφθεί τιμή που βρίσκεται εντός του πεδίου που ορίζεται από τις τιμές 24 και 30. Το πεδίο τιμών αυτό είναι αποδοτικότερο για μεγάλα και μεσαία πάχη του ελαστικού υποβάθρου. Για μικρά βάθη το βέλτιστο πεδίο τιμών του συντελεστή συσχέτισης μετατοπίζεται χαμηλότερα, και πιο συγκεκριμένα στο εύρος τιμών 20 έως 24. Πάντως η κατά μέσον όρο βέλτιστη τιμή του συντελεστή συσχέτισης ανεξαρτήτως του βάθους του ελαστικού υποβάθρου είναι η τιμή 24. «Αχίλλειο πτέρνα» των αποτελεσμάτων που επιτυγχάνονται με τη χρήση των προαναφερόμενων συντελεστών συσχέτισης, αποτελεί η τιμή της καμπτικής ροπής M_1. Για την επίτευξη καλύτερης σύγκλισης για το εντατικό αυτό μέγεθος, απαιτείται η χρήση συντελεστών συσχέτισης που βρίσκονται εντός του πεδίου που ορίζεται από τις τιμές 5 έως 15.

Στην περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώματα πυκνής άμμου, η υπεροχή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων δεν είναι τόσο σαφής όσο στην περίπτωση της σκληρής αργίλου. Εξαίρεση αποτελούν οι μέσες τιμές βάθους του ελαστικού υποβάθρού, όπου η υπεροχή του εν λόγω προσομοιώματος είναι εμφανής όταν στον συντελεστή συσχέτισης δοθεί η τιμή 24. Ωστόσο, αν και για τις περιπτώσεις μικρού και μεγάλου βάθους τα προσομοιώματα των Vlasov και Pasternak αντίστοιχα εμφανίζονται εξίσου αποδοτικά, και ίσως σε ορισμένες περιπτώσεις αποδοτικότερα, με το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων, οι μεταξύ τους διαφορές δεν είναι κατά κανόνα υπερβολικές. Άλλη μια σημαντική παρατήρηση αφορά το γεγονός, ότι όσο μειώνεται η τιμή του βάθους του ελαστικού υποβάθρου, μειώνεται αντίστοιχα και η τιμή του συντελεστή συσχέτισης που αποδίδει τα βέλτιστα αποτελέσματα. Τέλος, και στην παρούσα περίπτωση η κατά μέσον όρο βέλτιστη τιμή του συντελεστή συσχέτισης είναι η τιμή 24, ανεξαρτήτως του βάθους του ελαστικού υποβάθρου.

5.3.3.2. Παράδειγμα 3β: Τριώροφο πλαίσιο με οριζόντια και κατακόρυφη φόρτιση στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης

Το παράδειγμα αυτό, έχει ως στόχο την διερεύνηση της επιρροής του χρησιμοποιούμενου εδαφικού προσομοιώματος σε πιο σύνθετους φορείς που υπόκεινται σε συνδυασμό κατακόρυφης και οριζόντιας φόρτισης. Για το λόγο αυτό επιλύθηκαν οι τριώροφοι πλαισιακοί φορείς του Σχήματος 5.63.



Σχήμα 5.63. Τριώροφοι φορείς οπλισμένου σκυροδέματος ελαστικά εδραζόμενοι: Πλαίσιο Π1 (α), Πλαίσιο Π2 (β), Πλαίσιο Π3 (γ), Προσομοίωμα των πλαισίων (δ).

Στα πλαίσια του παρόντος παραδείγματος διερευνώνται επίσης:

- Η επιρροή του χρησιμοποιούμενου εδαφικού προσομοιώματος, στις τιμές των εντατικών μεγεθών σε περιοχές που βρίσκονται τοπολογικά μακριά από την περιοχή της θεμελίωσης ενός φορέα,
- Η επιρροή του εδάφους που βρίσκεται εκατέρωθεν του φορέα,
- Η επιρροή του μήκους της δοκού θεμελίωσης, αλλά και της σχετικής δυσκαμψίας δοκού / υποβάθρου.

Οι φορείς του σχήματος 5.63 επιλύθηκαν με τα παρακάτω προσομοιώματα:

- Προσομοίωμα του Winkler,
- Προσομοίωμα δυο παραμέτρων χωρίς τη θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν του πλαισίου, δηλαδή το προσομοίωμα του Pasternak,
- Προσομοίωμα δυο παραμέτρων με τη θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν του πλαισίου, δηλαδή το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov,
- Προσομοίωμα τριών παραμέτρων με τη θεώρηση του εδάφους εκατέρωθεν του πλαισίου,
- Προσομοίωμα επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων (προσομοίωμα αναφοράς).

Από τα εξεταζόμενα προσομοιώματα, εξαιρέθηκε το προσομοίωμα του Kerr χωρίς την επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν του πλαισίου. Ο λόγος που οδήγησε στην εξαίρεση αυτή, είναι το γεγονός ότι κατά τις επιλύσεις του μονώροφου πλαισίου που προηγήθηκαν αποδείχθηκε ότι αποδίδει γενικώς τα λιγότερο αποδεκτά αποτελέσματα. Επιπλέον κρίθηκε ότι το αντίστοιχο προσομοίωμα με την θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν του πλαισίου, θα πρέπει να είναι αυτό που θα ελεγχθεί περαιτέρω, καθώς από τα έως τώρα εκτεθέντα αποτελέσματα των παραδειγμάτων που προηγήθηκαν, κρίθηκε πολύ ικανοποιητικό.

Για τις επιλύσεις που πραγματοποιήθηκαν, κρίθηκε επαρκής η θεώρηση των ίδιων τιμών για το πάχος του ελαστικού υποβάθρου, και πιο συγκεκριμένα των τιμών H_S=20, 40 και 60 μέτρα, που θεωρήθηκαν και στην επίλυση του μονώροφου πλαισίου. Όσον αφορά τις κατηγορίες εδάφους, μελετήθηκαν οι κατηγορίες Ε1, Ε2 και Ε4 του πίνακα 5.2 (αντιστοιχούν στις κατηγορίες εδάφους: Άργιλος μέσης πυκνότητας, Σκληρή άργιλος και Πυκνή Άμμος αντίστοιχα). Τα γεωμετρικά δεδομένα και τα δεδομένα φόρτισης των πλαισίων δίνονται στα σχήματα 5.63α,β,γ. Διευκρινίζεται ότι εντός των παρενθέσεων στο σχήμα αυτό, δίνονται οι τιμές των φορτίων για τις επιλύσεις στην περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώμα πυκνής άμμου (Ε4).

Το χρησιμοποιούμενο λογισμικό για τις αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν, είναι το εξής:

- Το πρόγραμμα SAP2000 για την επίλυση με το προσομοίωμα των επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων. Για την επίλυση αυτή χρησιμοποιήθηκαν κάναβοι με τους οποίους διακριτοποιήθηκε όλο το σύστημα πλαίσιο – έδαφος θεμελίωσης, καθώς η φόρτιση δεν είναι συμμετρική. Κατά τα άλλα, οι χρησιμοποιούμενοι κάναβοι έχουν τα χαρακτηριστικά που περιγράφονται αναλυτικά στις παραγράφους 5.3.1.1 και 5.3.3.1.
- Ειδικοί αλγόριθμοι σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran 90, οι οποίοι συντάχθηκαν για τις επιλύσεις με τα προσομοιώματα μιας, δυο και τριών παραμέτρων και τις παραλλαγές τους. Οι αλγόριθμοι αυτοί, βασίζονται την κλασσική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Ειδικότερα όμως ο αλγόριθμος μέσω του οποίου γίνονται οι υπολογισμοί με το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov, έχει ενσωματωμένο τον

απαιτούμενο επαναληπτικό βρόγχο, καθώς και τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά που αναλυτικά περιγράφηκαν στα προηγούμενα παραδείγματα (όσον αφορά την γενική πορεία των υπολογισμών του αλγορίθμου, και τη φιλοσοφία του διαγράμματος ροής, βλέπε σχήμα 5.4).

Και στο παρόν παράδειγμα, ακολουθήθηκε η έως τώρα ακολουθούμενη διαδικασία προσδιορισμού των τιμών των εδαφικών παραμέτρων, ενώ πραγματοποιήθηκε και η αντίστοιχη διερεύνηση των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης των παραμέτρων k και c του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων.

Τα μεγέθη που συγκρίθηκαν προκείμενου να αξιολογηθούν οι επιδόσεις των διερευνούμενων μηχανικών προσομοιωμάτων σε σχέση με το προσομοίωμα αναφοράς, είναι τα εξής:

- Οριζόντια μετακίνηση του τελευταίου ορόφου του πλαισίου,
- Κατακόρυφες μετακινήσεις των δυο στύλων του πλαισίου,
- Στροφές στους κόμβους σύνδεσης στύλων – πεδιλοδοκού,
- Καμπτικές ροπές και τέμνουσες δυνάμεις των στύλων του πλαισίου,
- Καμπτικές ροπές στα άκρα του ζυγώματος του τελευταίου ορόφου του πλαισίου.

Παρακάτω, δίνονται τα αποτελέσματα των επιλύσεων των τριών πλαισίων. Η παρουσίαση ξεκινά με τα αποτελέσματα της επίλυσης του πλαισίου Π1. Η συγκεκριμένη παρουσίαση είναι αναλυτική, ενώ τα αποτελέσματα των αναλύσεων των υπολοίπων πλαισίων δίνονται πιο συνοπτικά, καθώς επισημαίνονται τα σημεία ταύτισης ή διαφοροποίησης από τα αποτελέσματα της επίλυσης του πλαισίου Π1. Έτσι, για κάθε πλαίσιο παρατίθενται αρχικά οι πίνακες και τα σχήματα με τα αποτελέσματα που αφορούν τα μεγέθη μετακίνησης μαζί με τα σχετικά σχόλια και συμπεράσματα, και ακολουθούν οι αντίστοιχοι πίνακες, τα σχήματα και τα σχόλια για τα αποτελέσματα των συγκρίσεων των εντατικών μεγεθών.

Επίλυση πλαισίου Π1

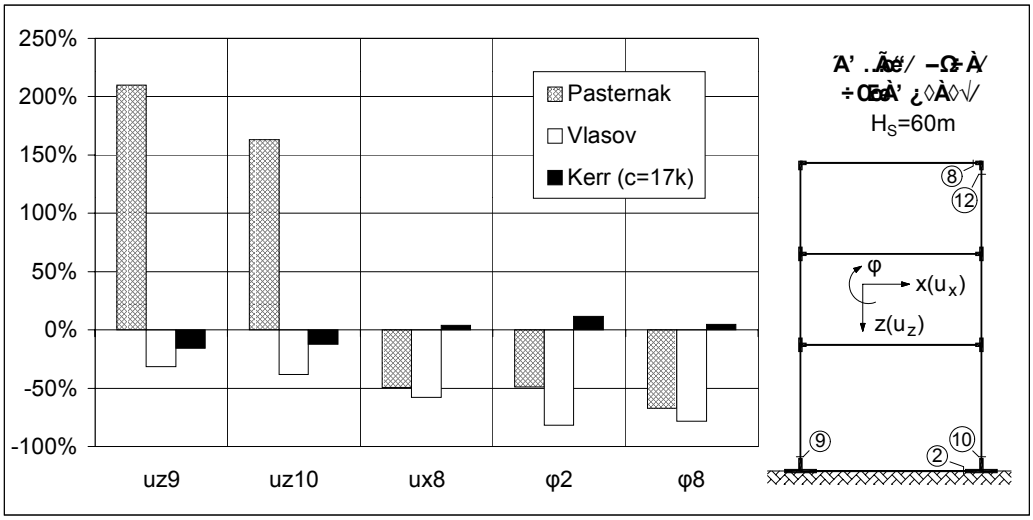
Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά, και τα δεδομένα φόρτισης του πλαισίου Π1 δίνονται στο Σχήμα 5.63α. Το πλαίσιο αυτό αποτελεί τμήμα ενός συμμετρικού χωρικού φορέα, η θεμελίωση του οποίου συνίσταται από εσχάρα πεδιλοδοκών. Το μήκος του εύκαμπτου τμήματος της πεδιλοδοκού του πλαισίου, είναι ίσο με 6 μέτρα. Η τιμή αυτή, σε συνδυασμό με τα γεωμετρικά στοιχεία της διατομής της πεδιλοδοκού, και τις ελαστικές σταθερές των εδαφών θεμελίωσης που εξετάστηκαν, δίνουν για το συντελεστή λ (Σχέση 2.134) τις παρακάτω τιμές:

- Έδαφος Ε1: λ= 0,47.
- Έδαφος Ε2: λ= 0,52.
- Έδαφος Ε4: λ= 0,93.

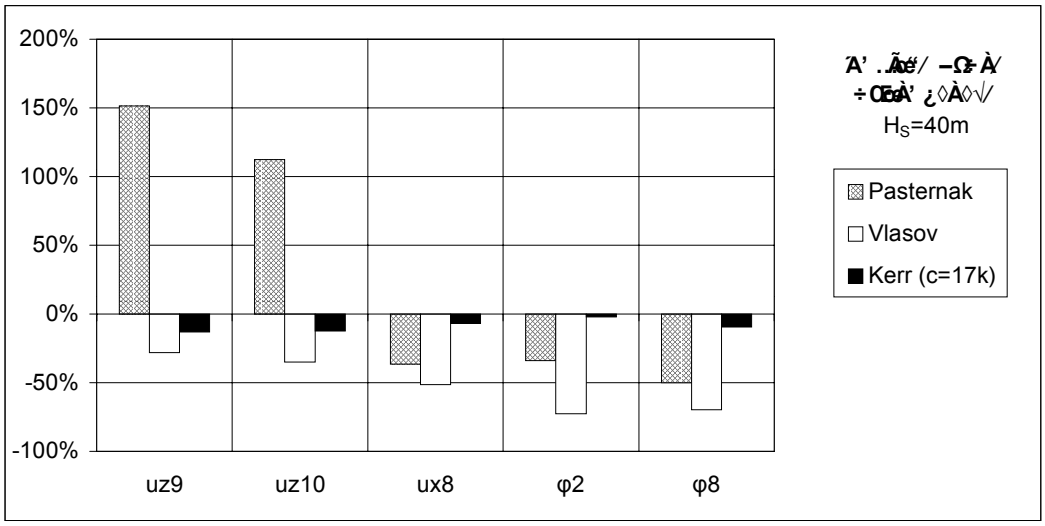
Από τις τιμές αυτές, οι δύο πρώτες αντιστοιχούν – με βάση τα κριτήρια των Vlasov και Leont'ev (1960) – σε πρακτικώς άκαμπτες δοκούς, ενώ η τρίτη σε δοκό πεπερασμένου μήκους.

Πίνακας 5.12. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προς εξέταση προσομοιωμάτων όσον αφορά τα επιλεγμένα μεγέθη μετακίνησης του πλαισίου Π1. Περίπτωση Αργίλου μέσης σκληρότητας.

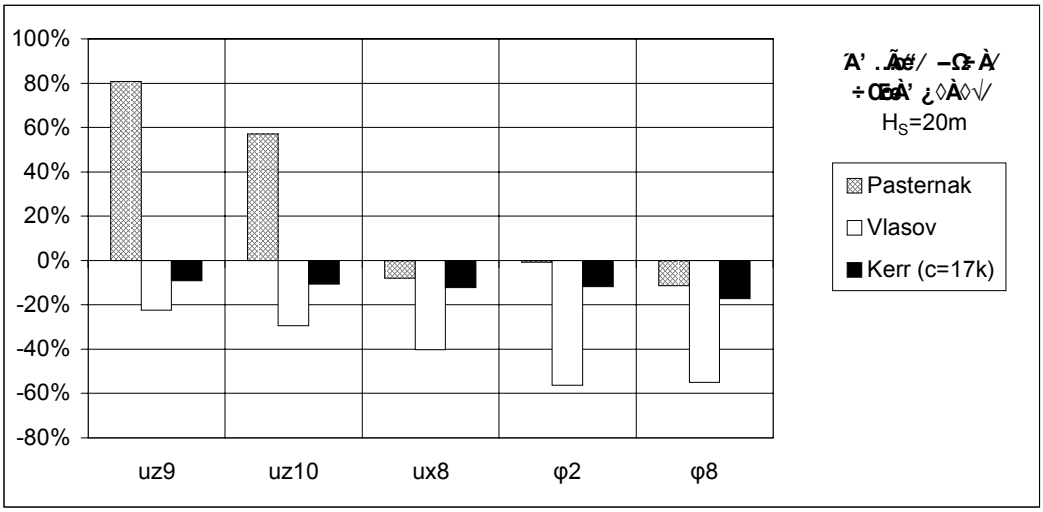
		Απόλυτες τιμές				
		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=17k)
H_s=60m	u_{z9}	0,085	0,159	0,263	0,058	0,071
	u_{z10}	0,103	0,376	0,271	0,064	0,090
	u_{x8}	0,029	0,294	0,015	0,012	0,030
	φ_2	0,0025	0,029	0,001	0,000	0,003
	φ_8	0,0021	0,0287	0,0007	0,0005	0,0022
H_s=40m	u_{z9}	0,0714	0,1095	0,1794	0,0513	0,0619
	u_{z10}	0,0892	0,2593	0,1894	0,0581	0,0782
	u_{x8}	0,0287	0,2047	0,0182	0,0139	0,0267
	φ_2	0,0025	0,0203	0,0016	0,0007	0,0024
	φ_8	0,0021	0,0197	0,0011	0,0006	0,0019
H_s=20m	u_{z9}	0,049	0,057	0,088	0,038	0,044
	u_{z10}	0,066	0,135	0,104	0,047	0,059
	u_{x8}	0,028	0,109	0,026	0,017	0,025
	φ_2	0,0024	0,011	0,002	0,001	0,002
	φ_8	0,0021	0,0101	0,0018	0,0009	0,0017
		Αποκλίσεις				
H_s=60m	u_{z9}	86,68%	210,08%	-31,59%	-15,87%	
	u_{z10}	265,22%	163,19%	-38,23%	-12,34%	
	u_{x8}	922,57%	-49,17%	-57,85%	3,74%	
	φ_2	1072,20%	-49,04%	-81,60%	11,42%	
	φ_8	1252,44%	-67,02%	-78,11%	4,74%	
H_s=40m	u_{z9}	53,53%	151,44%	-28,07%	-13,24%	
	u_{z10}	190,84%	112,39%	-34,86%	-12,25%	
	u_{x8}	613,84%	-36,47%	-51,46%	-6,80%	
	φ_2	716,50%	-33,96%	-72,73%	-2,32%	
	φ_8	833,54%	-49,91%	-69,61%	-9,61%	
H_s=20m	u_{z9}	17,01%	80,69%	-22,47%	-9,17%	
	u_{z10}	104,12%	57,04%	-29,35%	-10,68%	
	u_{x8}	288,69%	-7,93%	-40,26%	-12,28%	
	φ_2	341,26%	-0,80%	-56,27%	-11,90%	
	φ_8	394,37%	-11,36%	-54,97%	-17,16%	



(α)



(β)

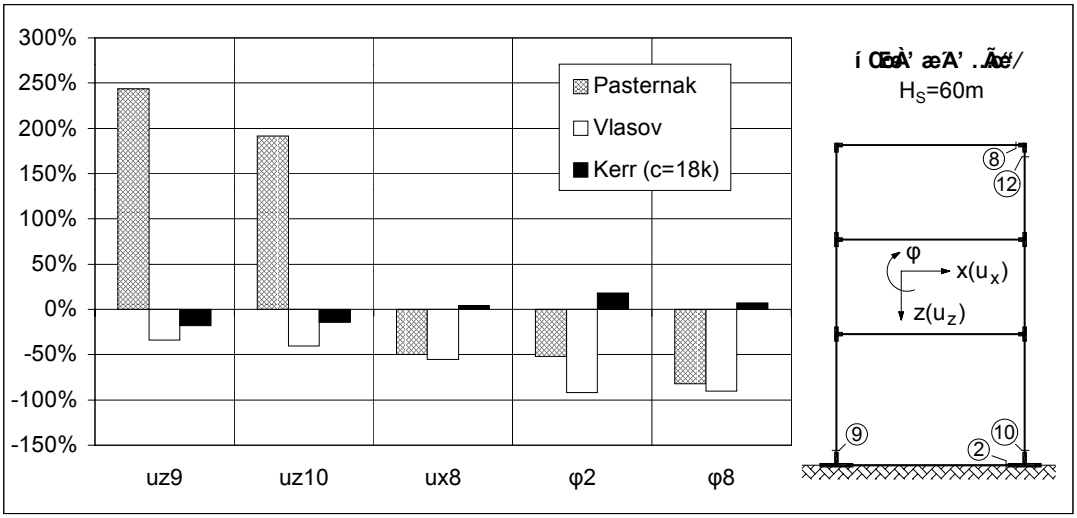


(γ)

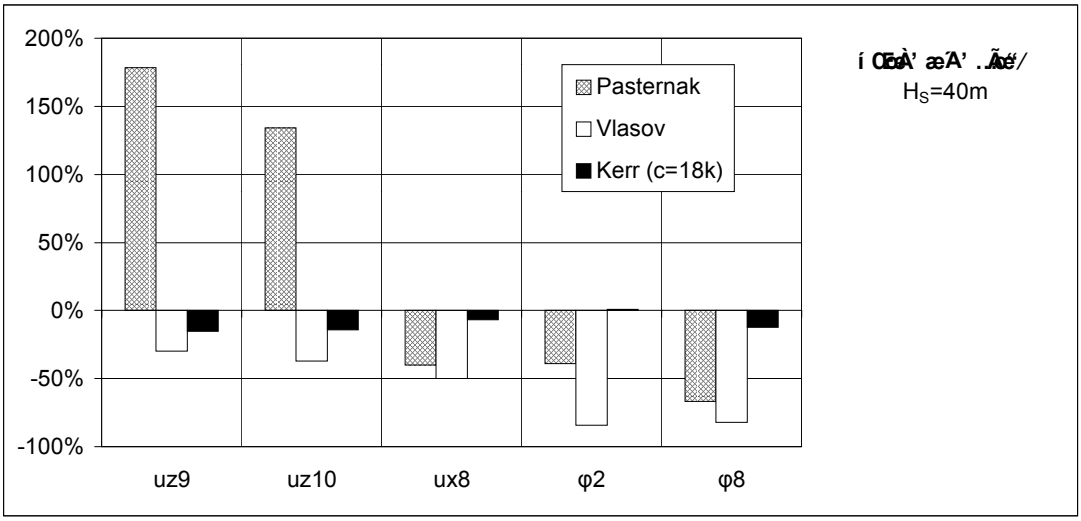
Σχήμα 5.64. Διάγραμμα αποκλίσεων των εξεταζόμενων εδαφικών προσομοιωμάτων από το προσομοίωμα αναφοράς, όσον αφορά τα μεγέθη μετακίνησης. Άργιλος μέσης σκληρότητας – Πλαίσιο Π1.

Πίνακας 5.13. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προς εξέταση προσομοιωμάτων όσον αφορά τα επιλεγμένα μεγέθη μετακίνησης του πλαισίου Π1. Περίπτωση Σκληρής Αργίλου.

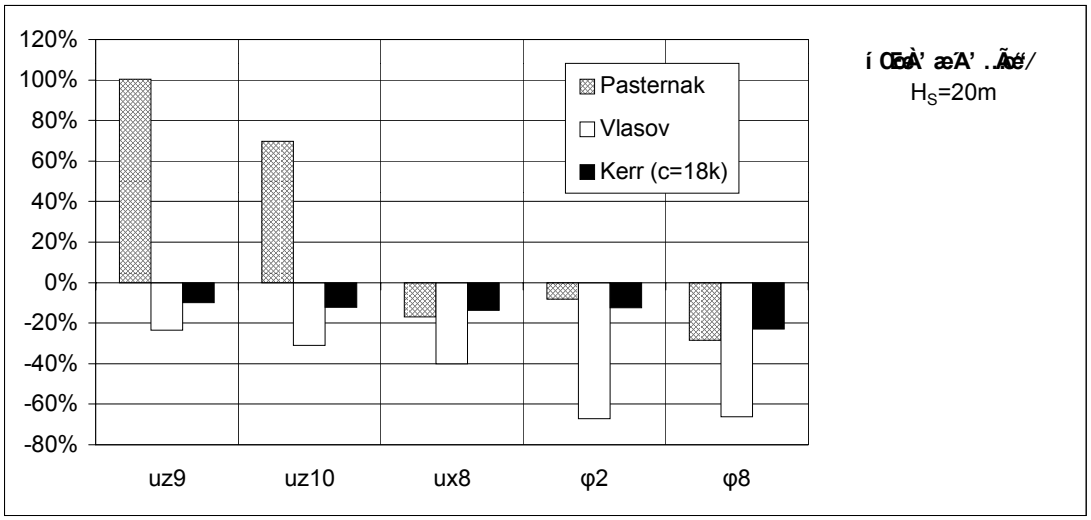
		Απόλυτες τιμές				
		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=18k)
H_s=60m	u_{z9}	0,053	0,110	0,183	0,035	0,044
	u_{z10}	0,064	0,261	0,187	0,038	0,055
	u_{x8}	0,019	0,206	0,010	0,009	0,020
	φ_2	0,0015	0,020	0,001	0,000	0,002
	φ_8	0,0012	0,0198	0,0002	0,0001	0,0012
H_s=40m	u_{z9}	0,0452	0,0764	0,1260	0,0317	0,0384
	u_{z10}	0,0559	0,1807	0,1309	0,0352	0,0480
	u_{x8}	0,0192	0,1440	0,0115	0,0096	0,0178
	φ_2	0,0015	0,0143	0,0009	0,0002	0,0016
	φ_8	0,0012	0,0136	0,0004	0,0002	0,0010
H_s=20m	u_{z9}	0,032	0,040	0,063	0,024	0,029
	u_{z10}	0,042	0,095	0,072	0,029	0,037
	u_{x8}	0,019	0,078	0,016	0,011	0,016
	φ_2	0,0015	0,008	0,001	0,000	0,001
	φ_8	0,0011	0,0070	0,0008	0,0004	0,0009
		Αποκλίσεις				
H_s=60m	u_{z9}	106,06%	243,40%	-33,87%	-18,17%	
	u_{z10}	306,17%	191,50%	-40,62%	-14,13%	
	u_{x8}	969,89%	-49,66%	-55,31%	4,60%	
	φ_2	1226,51%	-51,83%	-92,13%	18,01%	
	φ_8	1606,48%	-82,37%	-90,58%	7,23%	
H_s=40m	u_{z9}	68,88%	178,55%	-29,92%	-15,15%	
	u_{z10}	223,11%	134,12%	-37,04%	-14,06%	
	u_{x8}	651,44%	-40,06%	-50,03%	-6,93%	
	φ_2	826,11%	-38,83%	-84,21%	1,00%	
	φ_8	1074,95%	-66,82%	-82,13%	-12,25%	
H_s=20m	u_{z9}	26,94%	100,37%	-23,49%	-9,90%	
	u_{z10}	125,27%	69,83%	-31,05%	-12,04%	
	u_{x8}	313,30%	-16,85%	-39,98%	-13,65%	
	φ_2	406,64%	-8,26%	-67,10%	-12,29%	
	φ_8	526,65%	-28,40%	-66,19%	-22,85%	



(α)



(β)

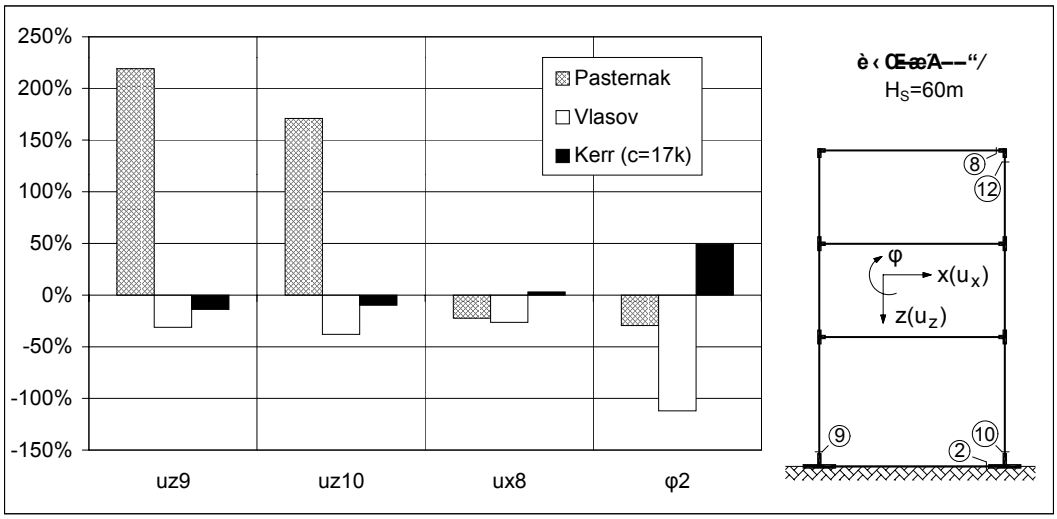


(γ)

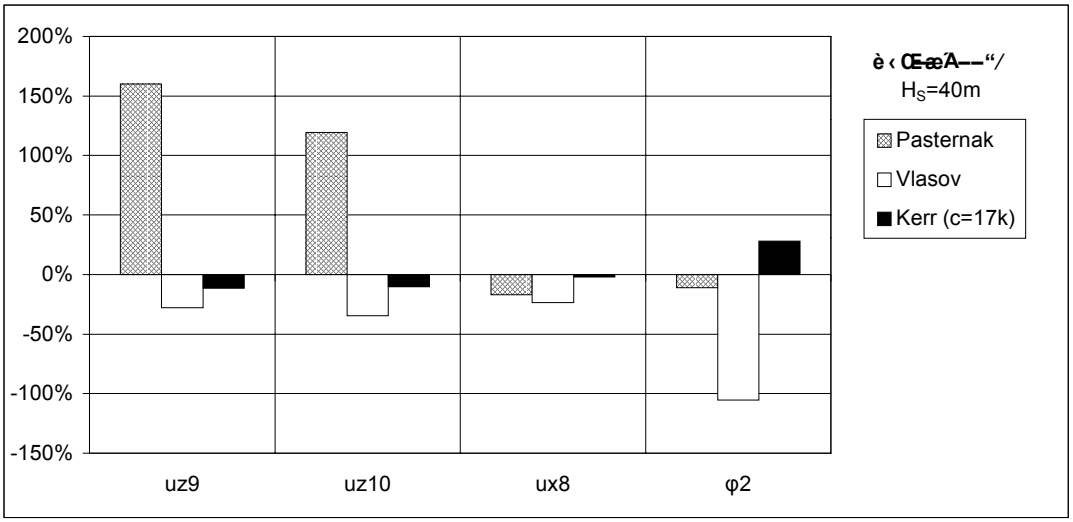
Σχήμα 5.65. Διάγραμμα αποκλίσεων των εξεταζόμενων εδαφικών προσομοιωμάτων από το προσομοίωμα αναφοράς, όσον αφορά τα μεγέθη μετακίνησης. Σκληρή Άργιλος – Πλαίσιο Π1.

Πίνακας 5.14. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προς εξέταση προσομοιωμάτων όσον αφορά τα επιλεγμένα μεγέθη μετακίνησης του πλαισίου Π1. Περίπτωση Πυκνής Άμμου.

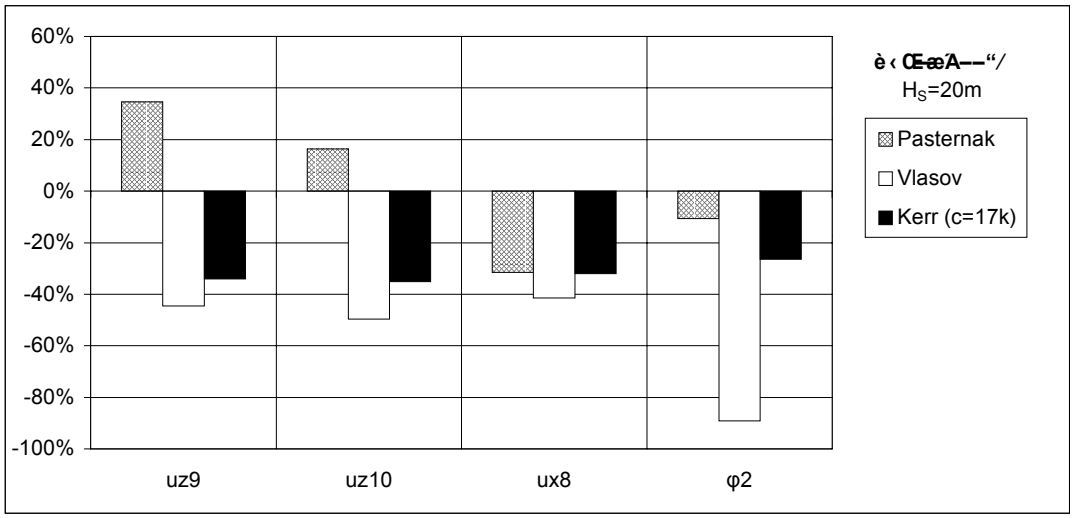
		Απόλυτες τιμές				
		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=17k)
H_s=60m	u_{z9}	0,015	0,029	0,048	0,010	0,013
	u_{z10}	0,018	0,068	0,049	0,011	0,016
	u_{x8}	0,011	0,060	0,009	0,008	0,012
	φ_2	5,517E-04	0,006	0,000	0,000	0,001
	φ_8	0,00002375	0,0048	-0,0002	-0,0003	0,0001
H_s=40m	u_{z9}	0,01262	0,0203	0,0328	0,0091	0,0112
	u_{z10}	0,01573	0,0476	0,0345	0,0103	0,0141
	u_{x8}	0,01125	0,0435	0,0094	0,0086	0,0110
	φ_2	0,0005515	0,0041	0,0005	0,0000	0,0007
	φ_8	0,00002168	0,0032	-0,0002	-0,0002	0,0000
H_s=20m	u_{z9}	0,012	0,011	0,016	0,007	0,008
	u_{z10}	0,016	0,025	0,019	0,008	0,011
	u_{x8}	0,016	0,026	0,011	0,009	0,011
	φ_2	7,707E-04	0,002	0,001	0,000	0,001
	φ_8	0,00001547	0,0015	0,0000	-0,0002	0,0000
		Αποκλίσεις				
H_s=60m	u_{z9}	94,37%	219,10%	-31,16%	-13,75%	
	u_{z10}	277,99%	170,94%	-37,93%	-10,02%	
	u_{x8}	428,42%	-22,38%	-26,23%	3,25%	
	φ_2	942,92%	-29,41%	-112,13%	49,00%	
	φ_8	20273,74%	-1064,78%	-1200,00%	115,94%	
H_s=40m	u_{z9}	61,11%	159,97%	-27,70%	-11,35%	
	u_{z10}	202,38%	119,33%	-34,69%	-10,29%	
	u_{x8}	286,36%	-16,83%	-23,38%	-1,85%	
	φ_2	651,11%	-11,16%	-105,37%	27,96%	
	φ_8	14798,70%	-882,92%	-1166,19%	-129,38%	
H_s=20m	u_{z9}	-11,01%	34,68%	-44,64%	-34,08%	
	u_{z10}	52,65%	16,27%	-49,65%	-35,22%	
	u_{x8}	67,67%	-31,50%	-41,54%	-32,00%	
	φ_2	211,92%	-10,63%	-89,08%	-26,42%	
	φ_8	9592,59%	-355,44%	-1282,64%	-398,84%	



(α)

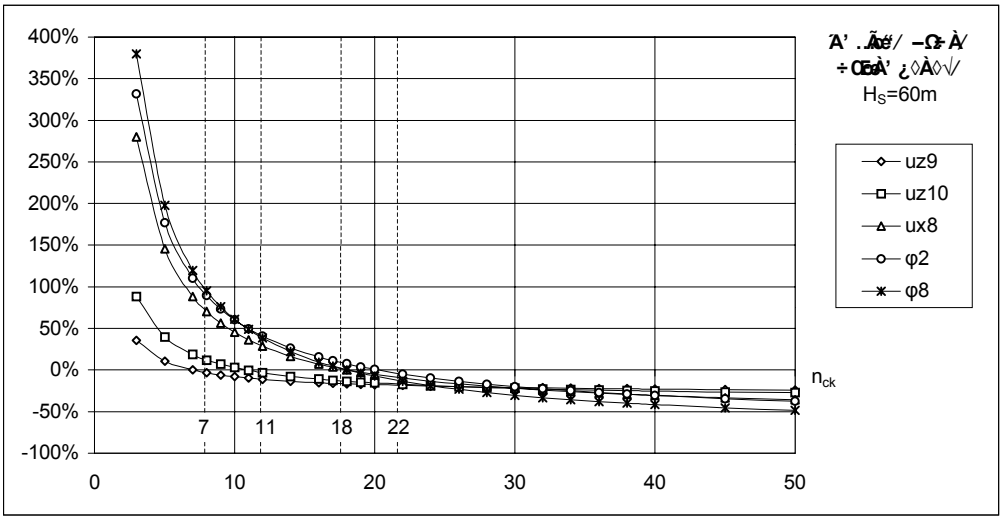


(β)

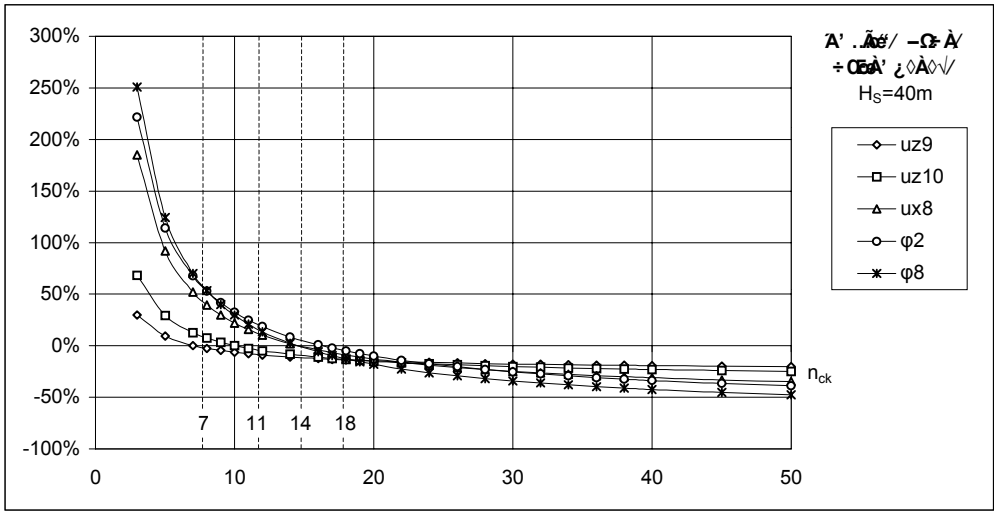


(γ)

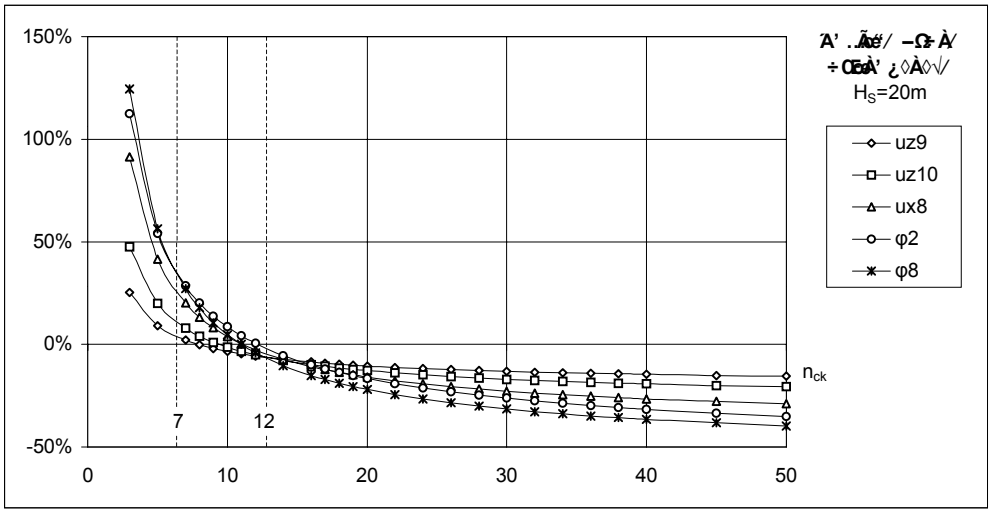
Σχήμα 5.66. Διάγραμμα αποκλίσεων των εξεταζόμενων εδαφικών προσομοιωμάτων από το προσομοίωμα αναφοράς, όσον αφορά τα μεγέθη μετακίνησης. Πυκνή Άμμος – Πλαίσιο Π1.



(α)

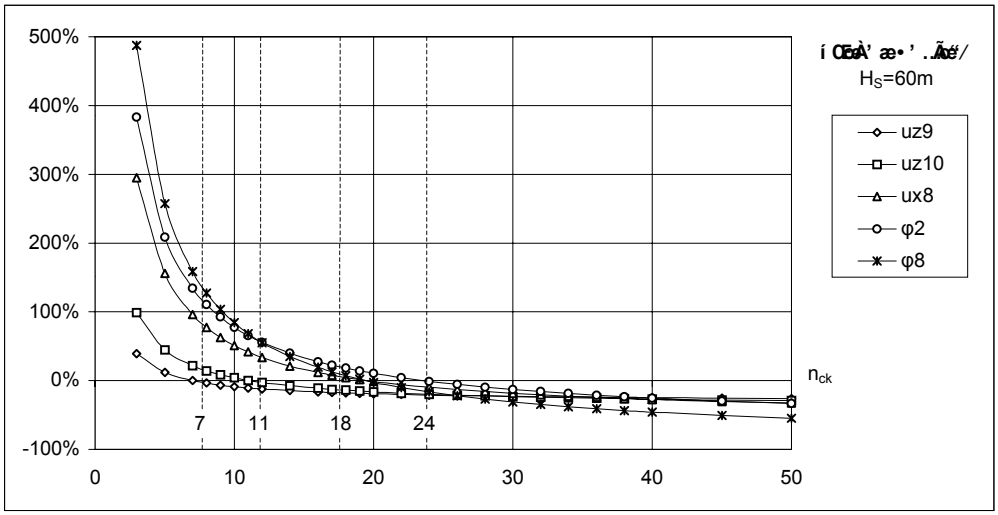


(β)

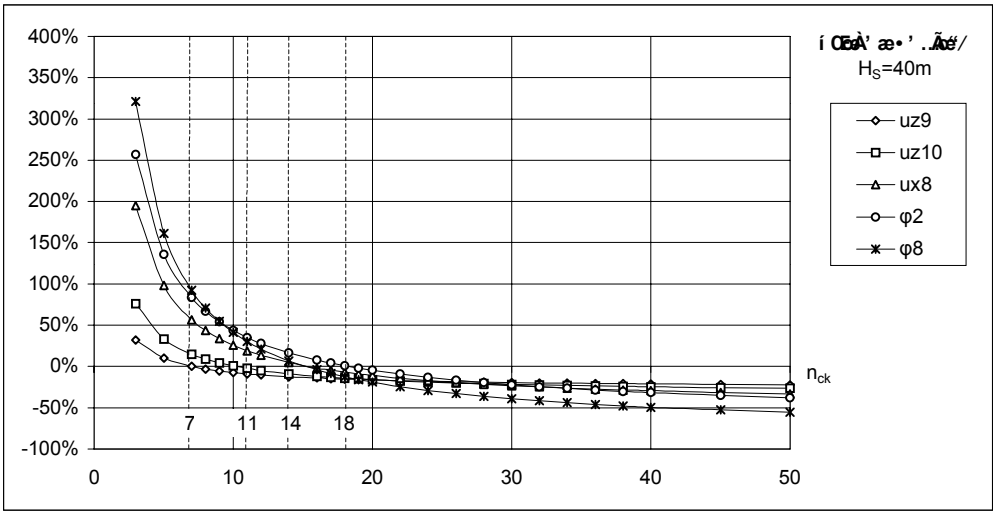


(γ)

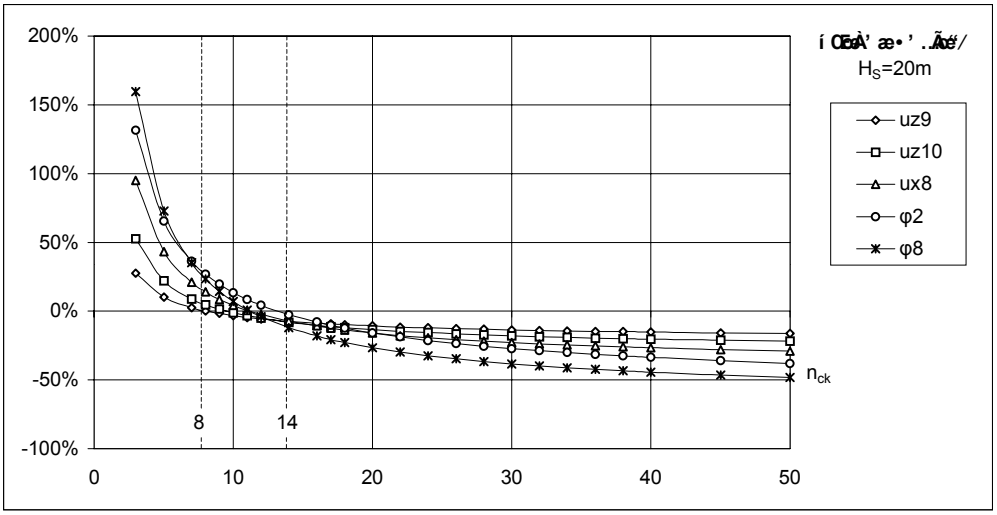
Σχήμα 5.67. Διερεύνηση των βέλτιστων τιμών του συντελεστή συσχέτισης n_{ck} όσον αφορά την σύγκλιση προς τη λύση αναφοράς, των τιμών των εξεταζόμενων μεγεθών μετακίνησης όπως προκύπτουν από την εφαρμογή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων. Περίπτωση Αργίλου μέσης σκληρότητας – Πλαίσιο Π1.



(α)

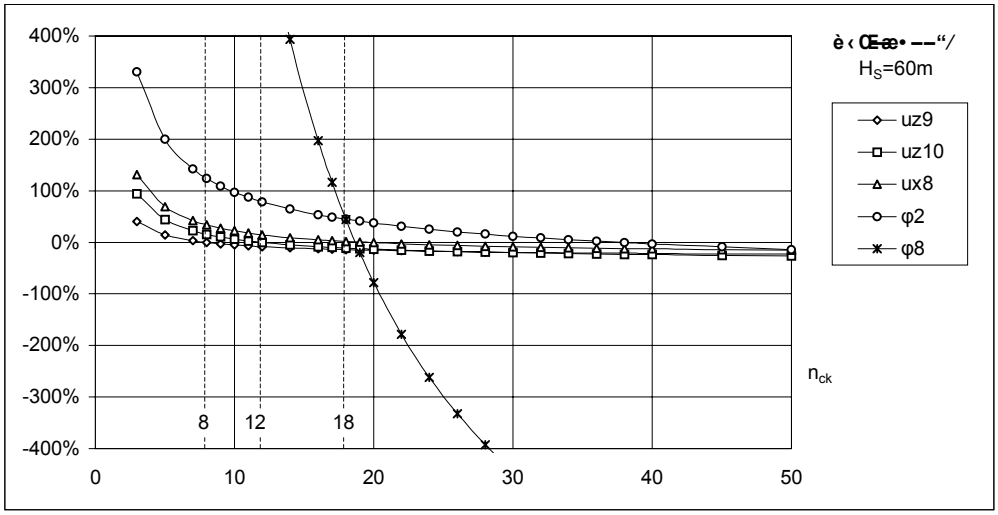


(β)

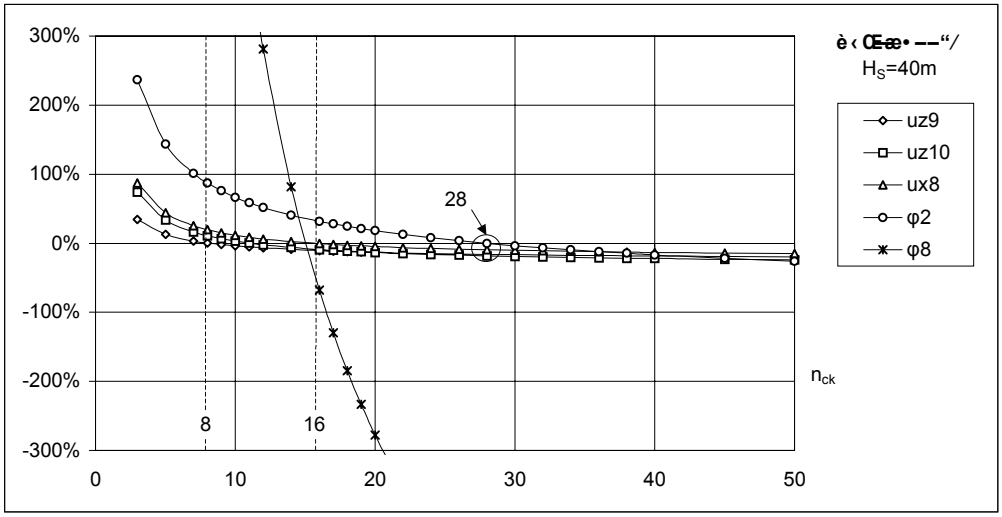


(γ)

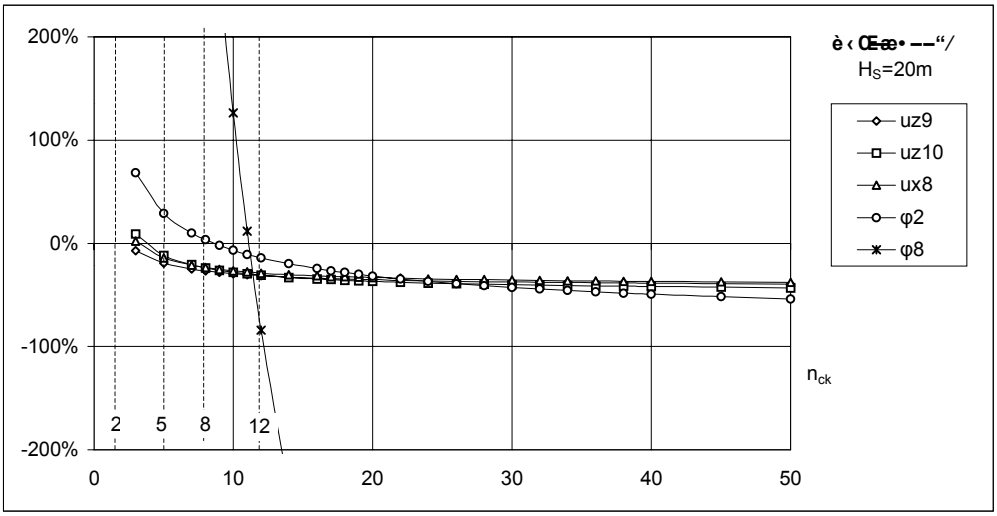
Σχήμα 5.68. Διερεύνηση των βέλτιστων τιμών του συντελεστή συσχέτισης n_{ck} όσον αφορά την σύγκλιση προς τη λύση αναφοράς, των τιμών των εξεταζόμενων μεγεθών μετακίνησης όπως προκύπτουν από την εφαρμογή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων. Περίπτωση Σκληρής Αργίλου – Πλαίσιο Π1.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 5.69. Διερεύνηση των βέλτιστων τιμών του συντελεστή συσχέτισης n_{ck} όσον αφορά την σύγκλιση προς τη λύση αναφοράς, των τιμών των εξεταζόμενων μεγεθών μετακίνησης όπως προκύπτουν από την εφαρμογή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων. Περίπτωση Πυκνής Άμμου – Πλαίσιο Π1.

Στους πίνακες 5.12 – 5.14 και στα σχήματα 5.64 – 5.66, δίνονται τα αποτελέσματα των συγκρίσεων των εδαφικών προσομοιωμάτων όσον αφορά τα εξεταζόμενα μεγέθη μετακίνησης. Παρακάτω θα δοθούν τα σχόλια και τα συμπεράσματα των συγκρίσεων, για κάθε μια από τις κατηγορίες εδάφους που εξετάστηκαν.

Για την περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από άργιλο μέσης σκληρότητας (Κατηγορία Εδάφους Ε1, Πίνακας 5.2), διερευνήθηκε η ύπαρξη μιας τιμής για τον συντελεστή συσχέτισης με κριτήριο την μη υπέρβαση του χαμηλότερου δυνατού ορίου απόκλισης από τις τιμές αναφοράς, ανεξαρτήτως του βάθους του ελαστικού υποβάθρου. Από την διερεύνηση αυτή προέκυψε, ότι η τιμή n_{ck}=17 αποδίδει αποκλίσεις που δεν υπερβαίνουν το 15% για κανένα από τα εξεταζόμενα μεγέθη μετακίνησης (Πίνακας 5.12 και Σχήμα 5.64). Για την τιμή αυτή, πραγματοποιήθηκε σύγκριση των αποτελεσμάτων του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων με τα υπόλοιπα εξεταζόμενα προσομοιώματα. Από την σύγκριση αυτή προέκυψαν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Όταν το βάθος του ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 60 μέτρα, η υπεροχή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων έναντι των υπολοίπων προσομοιωμάτων είναι σαφής για όλα τα εξεταζόμενα μεγέθη μετακίνησης. Από τα υπόλοιπα προσομοιώματα, το προσομοίωμα του Vlasov αποδίδει μεγάλες αποκλίσεις, ωστόσο είναι αποδοτικότερο από τα προσομοιώματα των Winkler και Pasternak. Πιο συγκεκριμένα το προσομοίωμα του Vlasov αποδίδει μεγάλες μεν αποκλίσεις, όχι όμως μεγαλύτερες από 80%. Το προσομοίωμα του Pasternak αποδίδει ίδιας τάξεως αποκλίσεις με το προσομοίωμα του Vlasov όσον αφορά τα στροφικά μεγέθη μετακίνησης που ελέγχθηκαν, ενώ εμφανίζει πολύ μεγαλύτερες για τις κατακόρυφες μετακινήσεις του πλαισίου. Τέλος, το προσομοίωμα του Winkler αποδίδει τις μεγαλύτερες αποκλίσεις που μάλιστα είναι μεγαλύτερες του 1000% όσον αφορά τα στροφικά μεγέθη μετακίνησης.
- Και στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος ίσο με 40 μέτρα, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων υπερέχει σημαντικά των υπολοίπων αν στον συντελεστή συσχέτισης δοθεί η τιμή n_{ck}=17. Όσον αφορά τα υπόλοιπα προσομοιώματα, διατηρείται η ίδια εικόνα με την προηγούμενη περίπτωση με τη μόνη διαφορά ότι οι αποκλίσεις είναι μικρότερες αν και εξακολουθούν να είναι σημαντικές.
- Στην περίπτωση που το βάθος του ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 20 μέτρα, παρατηρείται μια διαφοροποίηση στα αποτελέσματα των συγκρίσεων, καθώς το προσομοίωμα του Pasternak εμφανίζεται να αποδίδει πολύ καλές τιμές όσον αφορά την οριζόντια μετακίνηση στην κορυφή του πλαισίου, αλλά και τα στροφικά μεγέθη μετακίνησης που ελέχθησαν. Το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων υστερεί όσον αφορά τα μεγέθη αυτά, οι αποκλίσεις όμως που αποδίδει δεν υπερβαίνουν και πάλι το 15%. Εξακολουθεί μάλιστα να είναι αποδοτικότερο όλων των υπολοίπων όσον αφορά τις κατακόρυφες μετακινήσεις του πλαισίου. Τα προσομοιώματα του Vlasov και του Winkler αποδίδουν τα χειρότερα αποτελέσματα, με εμφανώς όμως μικρότερες τιμές αποκλίσεων από ότι στις προηγούμενες περιπτώσεις.

Στην περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από σκληρή άργιλο (Πίνακας 5.13 και Σχήμα 5.65), η διερεύνηση βέλτιστης τιμής για τον συντελεστή συσχέτισης ανεξαρτήτως του βάθους του ελαστικού υποβάθρου, οδήγησε στην τιμή n_{ck}=18. Για την τιμή αυτή, καμία από τις αποκλίσεις των εξεταζόμενων μεγεθών μετακίνησης δεν υπερβαίνει το 20%. Ωστόσο, ισοδύναμη με την τιμή αυτή είναι σε γενικές

γραμμές και η τιμή n_{ck}=17. Έτσι τα συμπεράσματα που θα εκτεθούν παρακάτω ισχύουν και για τις δυο αυτές τιμές.

- Όταν το βάθος του ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 60 μέτρα, η υπεροχή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων είναι σαφής, και μάλιστα τα αποτελέσματα που αποδίδει είναι με μεγάλη διαφορά πιο κοντά στη λύση αναφοράς, από τα αντίστοιχα αποτελέσματα των υπολοίπων προσομοιωμάτων. Χαρακτηριστικά αναφέρεται, ότι η μικρότερη διαφορά που εμφανίζεται αφορά την κατακόρυφη μετακίνηση u_{z9} για την οποία το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων αποδίδει απόκλιση –18%, ενώ το αμέσως πιο αποδοτικό προσομοίωμα, το προσομοίωμα του Vlasov, αποδίδει απόκλιση –34%. Επομένως η μικρότερη αυτή διαφορά είναι της τάξης του 50%. Σε γενικές γραμμές τα υπόλοιπα προσομοιώματα αποδίδουν μεγάλες αποκλίσεις, ενώ χειρότερο όλων εμφανίζεται το προσομοίωμα του Winkler. Τέλος, τα προσομοιώματα του Pasternak και του Vlasov είναι σχεδόν ισότιμα, με εξαίρεση την απόδοση που αφορά τις κατακόρυφες μετακινήσεις όπου υπερτερεί σαφώς το δεύτερο.
- Και στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος ίσο με 40 μέτρα, διατηρείται η ίδια ακριβώς εικόνα όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, με μόνη διαφορά μια γενική μείωση των τιμών των αποκλίσεων.
- Διαφοροποίηση εμφανίζεται στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει πάχος ίσο με 20 μέτρα. Η διαφοροποίηση αυτή, είναι ανάλογη αυτής που παρουσιάστηκε και στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο συνίσταται από άργιλο μέσης σκληρότητας. Έτσι, ενώ το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων εξακολουθεί να είναι το αποδοτικότερο στην πλειοψηφία των ελεγχόμενων μεγεθών μετακίνησης, το προσομοίωμα του Pasternak αποδίδει πολύ καλές τιμές όσον αφορά τα μεγέθη u_{x8}, φ_2 και φ_8. Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό, ότι για την περίπτωση της στροφής φ_2, το προσομοίωμα του Pasternak αποδίδει την καλύτερη τιμή, όχι πάντως με μεγάλη διαφορά από την τιμή που αποδίδει το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων (–8,26% έναντι –12,3%). Τέλος, το προσομοίωμα του Vlasov, αποδίδει χειρότερες τιμές από τα δυο προαναφερόμενα (μέγιστη απόκλιση 66%) ενώ το προσομοίωμα του Winkler είναι και στην περίπτωση αυτή, το λιγότερο αποδοτικό.

Στην περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από πυκνή άμμο (Πίνακας 5.14 και Σχήμα 5.66), η διερεύνηση βέλτιστης τιμής για τον συντελεστή συσχέτισης ανεξαρτήτως του βάθους του ελαστικού υποβάθρου, οδήγησε και πάλι στην τιμή n_{ck}=17. Ωστόσο χαρακτηριστική είναι η αδυναμία της τιμής αυτής, να επιτύχει ικανοποιητική σύγκλιση στις τιμές που αφορούν στροφικά μεγέθη μετακίνησης. Πάντως όπως θα τονιστεί και παρακάτω, η αδυναμία αυτή είναι χαρακτηριστική, και μάλιστα σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό, και για τα υπόλοιπα προσομοιώματα. Τα συμπεράσματα για τη συγκεκριμένη κατηγορία εδάφους, είναι τα εξής:

- Όταν το βάθος του ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 60 μέτρα, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων εμφανίζεται αποδοτικότερο των υπολοίπων. Ειδικά για την περίπτωση των μεταφορικών μεγεθών μετακίνησης, οι αποκλίσεις του προσομοιώματος δεν υπερβαίνουν το 15%. Αντίθετα, για τα στροφικά μεγέθη μετακίνησης φ_2 και φ_8 οι προκύπτουσες αποκλίσεις για n_{ck}=17 είναι σημαντικές καθώς αγγίζουν το 49% και το 116% αντίστοιχα. Όπως όμως θα αποδειχθεί παρακάτω, υπάρχουν συγκεκριμένες τιμές

του συντελεστή συσχέτισης για τις οποίες το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων επιτυγχάνει πλήρη σύγκλιση προς τα αποτελέσματα αναφοράς για τα συγκεκριμένα μεγέθη. Όσον αφορά τα υπόλοιπα προσομοιώματα, είναι χαρακτηριστικές οι πολύ μεγάλες αποκλίσεις που αποδίδουν για την στροφή φ_8 (η μικρότερη αποδίδεται από το προσομοίωμα του Vlasov και είναι της τάξης του –1200%). Αντίθετα, για την στροφή φ_2 το προσομοίωμα του Pasternak εμφανίζεται αποδοτικότερο ακόμα και από το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων καθώς αποδίδει απόκλιση 30% έναντι του 49% του τελευταίου. Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι το προσομοίωμα του Vlasov είναι το αποδοτικότερο, μετά το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων, όσον αφορά τα μεταφορικά μεγέθη μετακίνησης ενώ το προσομοίωμα του Winkler είναι και στην περίπτωση αυτή το λιγότερο αποδοτικό απ' όλα τα υπόλοιπα.

– Στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος ίσο με 40 μέτρα, τα συμπεράσματα είναι ανάλογα αυτών που διατυπώθηκαν και για την προηγούμενη περίπτωση, και επομένως δεν κρίνεται σκόπιμη καμία επιπλέον αναφορά.
– Στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος ίσο με 20 μέτρα, η τιμή n_{ck}=17 δεν προσδίδει στο προσομοίωμα των τριών παραμέτρων την απόλυτη υπεροχή έναντι των υπολοίπων. Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά τα μεταφορικά μεγέθη μετακίνησης, οι αποκλίσεις που αποδίδονται είναι της τάξης του –33%. Για τα μεγέθη αυτά, ισότιμο με το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων αναδεικνύεται το προσομοίωμα του Pasternak, το οποίο αποδίδει μάλιστα καλύτερη τιμή απόκλισης για την κατακόρυφη μετακίνηση του δεξιού υποστυλώματος του πλαισίου u_{z10} (16,25% έναντι του –35%). Το προσομοίωμα του Vlasov αποδίδει για τα αντίστοιχα μεγέθη αποκλίσεις της τάξης του –45%, ενώ το προσομοίωμα του Winkler δεν υστερεί ιδιαίτερα των υπολοίπων και μάλιστα αποδίδει την καλύτερη τιμή απόκλισης όσον αφορά την κατακόρυφη μετακίνηση του αριστερού υποστυλώματος u_{z9} (–11%). Όσον αφορά τα στροφικά μεγέθη μετακίνησης, τα προσομοιώματα των τριών παραμέτρων και του Pasternak, εμφανίζονται να αποδίδουν τις χαμηλότερες αποκλίσεις, με το δεύτερο να είναι ελαφρώς αποδοτικότερο. Τέλος, τα προσομοιώματα των Vlasov και Winkler υστερούν εμφανώς των δυο προηγουμένων.

Συνοψίζοντας τα όσα καταγράφηκαν παραπάνω για τον έλεγχο των μεγεθών μετακίνησης, μπορεί να διατυπωθεί το γενικό συμπέρασμα ότι λαμβάνοντας ως τιμή για τον συντελεστή συσχέτισης την τιμή n_{ck}=17, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων εμφανίζεται αποδοτικότερο όλων των υπολοίπων για κάθε κατηγορία εδάφους και βάθους του ελαστικού υποβάθρου, με εξαίρεση την περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώμα πυκνής άμμου με βάθος 20 μέτρα. Στην περίπτωση αυτή, αποδοτικότερο εμφανίζεται το προσομοίωμα του Pasternak. Αξίζουν επίσης να τονιστούν ιδιαίτερα:

– **η αδυναμία του προσομοιώματος του Winkler να αποδώσει αποδεκτές τιμές μετακινήσεων σε όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις,**
– **το γεγονός ότι το προσομοίωμα του Vlasov δεν επιτυγχάνει την καλύτερη σύγκλιση από όλα τα υπόλοιπα προσομοιώματα, σε καμία από τις εξεταζόμενες περιπτώσεις, και**
– **η αδυναμία όλων των προσομοιωμάτων να προσεγγίσουν την τιμή αναφοράς της στροφής φ_2 στην περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώμα πυκνής άμμου.**

Κλείνοντας την αναφορά στις συγκρίσεις των μεγεθών μετακίνησης, θα γίνει και μια καταγραφή των συμπερασμάτων που προέκυψαν από την διερεύνηση που πραγματοποιήθηκε με στόχο την εξεύρεση τιμών του συντελεστή συσχέτισης που οδηγούν στη μέγιστη δυνατή σύγκλιση προς την λύση αναφοράς, για κάθε περίπτωση εδάφους και βάθους του ελαστικού υποβάθρου. Για τον λόγο αυτό, πινακοποιούνται παρακάτω τα συμπεράσματα των σχημάτων 5.67 – 5.69.

Πίνακας 5.15. Τιμές του συντελεστή συσχέτισης n_{ck} για τις οποίες επιτυγχάνεται η βέλτιστη σύγκλιση των τιμών των εξεταζόμενων μεγεθών μετακίνησης προς την λύση αναφοράς, κατά περίπτωση εδάφους και βάθους του υποβάθρου θεμελίωσης του πλαισίου Π1.

	Άργιλος μέσης σκληρότητας (Ε1)			Σκληρή Άργιλος (Ε2)			Πυκνή Άμμος (Ε4)		
	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m
u_{z9}	7	7	8	7	7	8	8	8	2 – 3
u_{z10}	11	10	9	11	10	10	12	11	4
u_{x8}	18	15	11	20	16	11	19	16	3
φ_2	20	16	12	24	18	13	38	28	7
φ_8	18	14	11	20	15	11	19	15	11

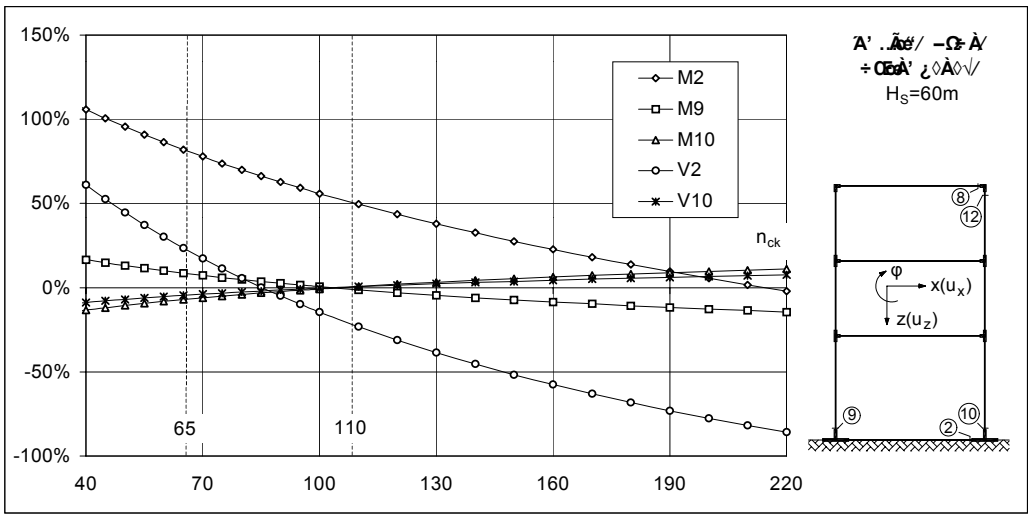
Από τον παραπάνω πίνακα, αλλά και από τα σχήματα 5.67 – 5.69 προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Υπάρχει μια διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων, μεταξύ των εδαφών με σχετικά μικρό μέτρο ελαστικότητας (Εδάφη Ε1, Ε2), και του εδάφους με σχετικά μεγάλο μέτρο ελαστικότητας (Έδαφος Ε4). Εξαίρεση αποτελούν οι κατακόρυφες μετακινήσεις του πλαισίου u_{z9}, u_{z10}, οι οποίες ακολουθούν και στις δυο περιπτώσεις τον ίδιο κανόνα μεταβολής των βέλτιστων τιμών τους, εκτός της περίπτωσης Ε4 / H_S=20m.
- Για τα μεγέθη u_{x8}, φ_2, φ_8, η μείωση του βάθους του ελαστικού υποβάθρου συνεπάγεται και την μείωση της τιμής του συντελεστή συσχέτισης που οδηγεί στα βέλτιστα αποτελέσματα. Αντίθετα για τα μεγέθη u_{z9}, u_{z10} παρατηρείται μια σχετική σταθερότητα των βέλτιστων συντελεστών τους, πλην της περίπτωσης Ε4 / H_S=20m.
- Η μορφή των καμπύλων μεταβολής των μεγεθών μετακίνησης που ελέχθησαν, εμφανίζει πολύ μικρή κλίση στην περιοχή τιμών n_{ck}=14-20 για τις κατηγορίες εδαφών Ε1 και Ε2. Εντός του εύρους αυτού μάλιστα, κανένα από τα ελεγχόμενα μεγέθη μετακίνησης δεν αποκλίνει περισσότερο από ±18% από την λύση αναφοράς. Αυτό σημαίνει ότι αν ληφθεί τιμή για τον συντελεστή συσχέτισης από την περιοχή αυτή, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων υπερέχει όλων των υπολοίπων που εξετάστηκαν. Το συμπέρασμα αυτό τεκμηριώνεται από την μελέτη των πινάκων 5.12 και 5.13.
- Για την περίπτωση του εδάφους Ε4, δεν μπορεί να οριστεί ενιαία περιοχή βέλτιστων τιμών για τα μεταφορικά και τα στροφικά μεγέθη μετακίνησης, με κριτήριο την μη υπέρβαση του ±20% στις αποκλίσεις. Έτσι, για τις περιπτώσεις που το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος 60 ή 40 μέτρα, η περιοχή

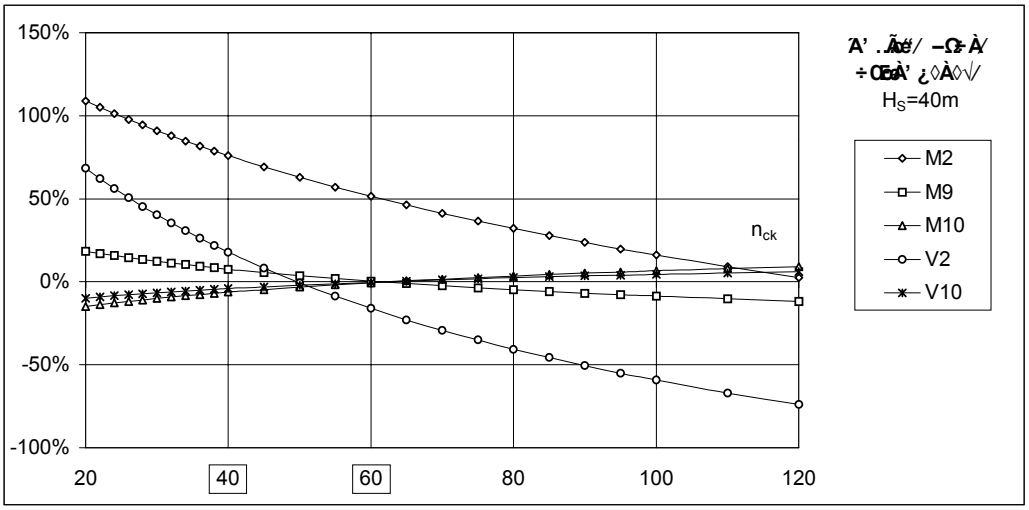
των βέλτιστων τιμών για τα μεταφορικά μεγέθη μετακίνησης είναι n_{ck}= 12 – 20, ενώ για την περίπτωση που το βάθος του ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 20 μέτρα, η αντίστοιχη βέλτιστη περιοχή είναι πολύ περιορισμένη καθώς οριοθετείται από τις τιμές 3 και 5. Οι αντίστοιχες περιοχές βέλτιστων τιμών για τα στροφικά μεγέθη μετακίνησης, εμφανίζουν μια διασπορά σε σχέση με το βάθος του ελαστικού υποβάθρου. Ωστόσο, για την περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος 60 ή 40 μέτρα, η περιοχή 28 – 40 οδηγεί σε πολύ ικανοποιητικές τιμές για την στροφή φ_2. Όπως γίνεται κατανοητό, η περιοχή αυτή δεν συμπίπτει με την περιοχή βέλτιστων τιμών για τα αντίστοιχα μεταφορικά μεγέθη μετακίνησης. Η ανομοιομορφία της οριοθέτησης των βέλτιστων τιμών των συντελεστών συσχέτισης για τα μεγέθη μετακίνησης, διατηρείται και στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος 20 μέτρα. Στην περίπτωση αυτή, εμφανίζεται και μια επιπλέον διαφοροποίηση από όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις, καθώς οι βέλτιστες περιοχές τιμών των μεγεθών μετακίνησης ορίζονται για πολύ μικρότερες τιμές του συντελεστή συσχέτισης.

Από τα παραπάνω εκτεθέντα, προκύπτει το βασικό συμπέρασμα ότι όσον αφορά την μελέτη των μεγεθών μετακίνησης, η συμπεριφορά του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων παρουσιάζει μια σταθερότητα στην περίπτωση εδαφών με χαμηλό ή μέσο μέτρο ελαστικότητας, όπως τα εδάφη των κατηγοριών Ε1 και Ε2, και μάλιστα ανεξαρτήτως του βάθους του ελαστικού υποβάθρου. Για τις κατηγορίες αυτές, ορίζεται ξεκάθαρα η περιοχή τιμών n_{ck}=14-20 εντός της οποίας κανένα από τα ελεγχόμενα μεγέθη μετακίνησης δεν αποκλίνει περισσότερο από ±18% από τις τιμές αναφοράς. Αντίθετα, στην περίπτωση εδαφών με μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας όπως η κατηγορία Ε4, εμφανίζεται μια διαφοροποίηση στην οριοθέτηση των βέλτιστων περιοχών των συντελεστών συσχέτισης για τα μεταφορικά και τα στροφικά μεγέθη μετακίνησης. Επιπλέον, εμφανίζεται διαφοροποίηση στην συμπεριφορά του προσομοιώματος μεταξύ της περίπτωσης που το ελαστικό υπόβαθρο έχει μεγάλο ή μέσο βάθος (60 ή 40 μέτρα), και της περίπτωσης που έχει μικρό βάθος (20 μέτρα). Ωστόσο παρά την ανομοιομορφία αυτή, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων αποδίδει καλύτερα αποτελέσματα από όλα τα υπόλοιπα προσομοιώματα που εξετάστηκαν, πλην ορισμένων εξαιρέσεων που αναφέρονται κυρίως στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει μικρό βάθος.

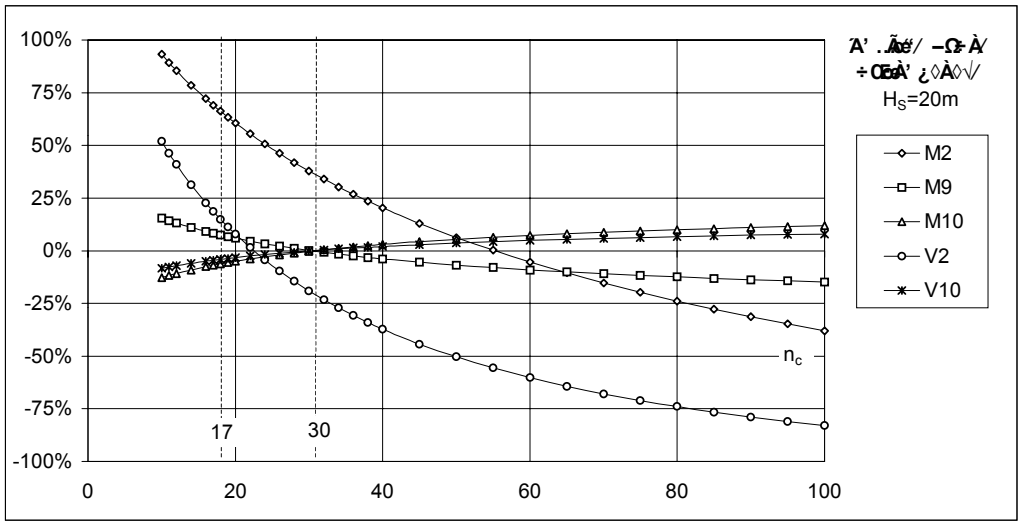
Όσον αφορά την μελέτη των εντατικών μεγεθών του πλαισίου, παρουσιάζονται κατ' αρχήν τα διαγράμματα που σχετίζονται με την διερεύνηση της βέλτιστης απόδοσης του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων. Έτσι στα σχήματα που ακολουθούν (Σχήματα 5.70 – 5.72), παρουσιάζονται ανά κατηγορία εδάφους και βάθους του ελαστικού υποβάθρου, οι περιοχές τιμών του συντελεστή συσχέτισης οι οποίες προσδίδουν στο προσομοίωμα των τριών παραμέτρων τη δυνατότητα απόδοσης των βέλτιστων αποτελεσμάτων. Κατόπιν, παρατίθενται οι πίνακες, τα σχήματα και τα αντίστοιχα σχόλια που αφορούν την σύγκριση των αποτελεσμάτων όλων των υπό εξέταση προσομοιωμάτων (Σχήματα 5.73 – 5.78).



(α)

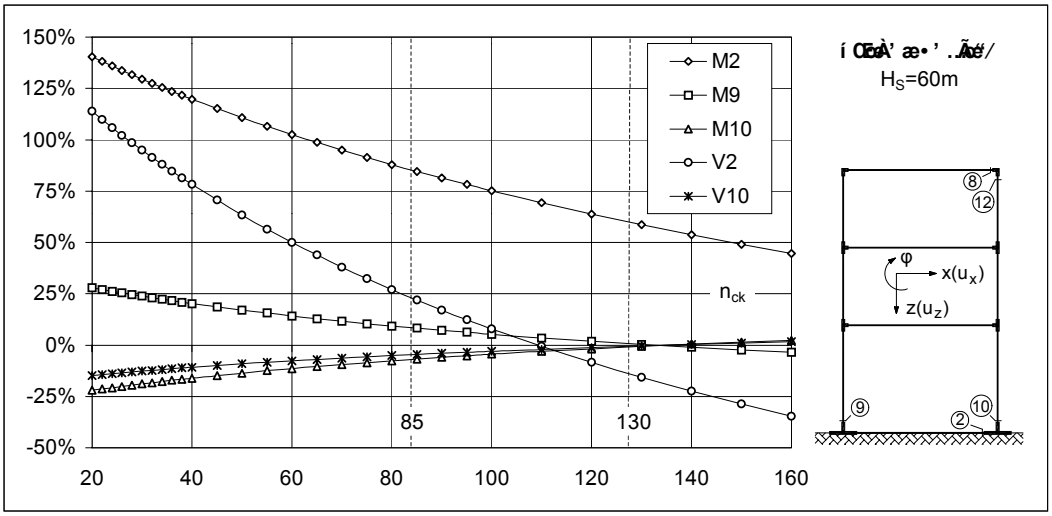


(β)

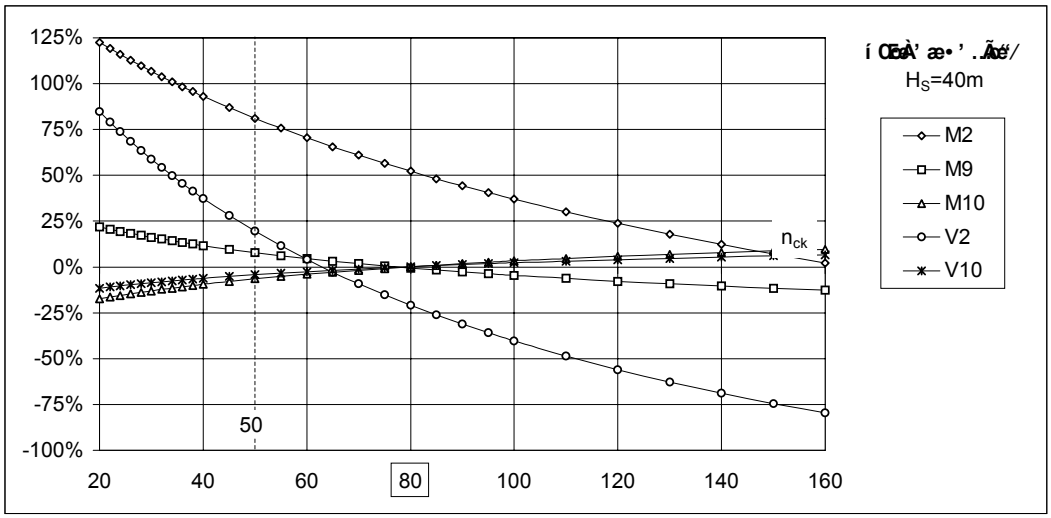


(γ)

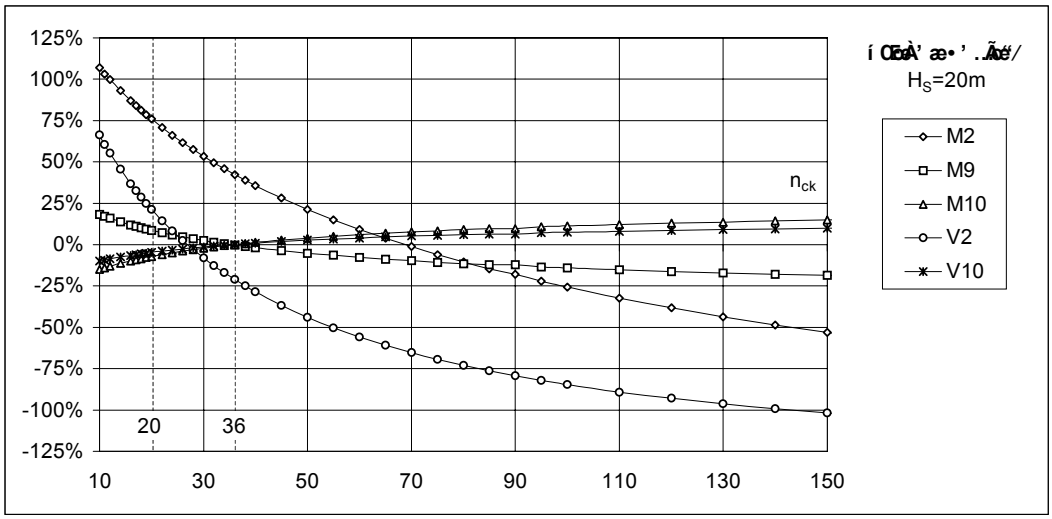
Σχήμα 5.70. Διερεύνηση των βέλτιστων τιμών του συντελεστή συσχέτισης n_{ck} όσον αφορά την σύγκλιση προς την λύση αναφοράς, των τιμών των εξεταζόμενων εντατικών μεγεθών όπως προκύπτουν από την εφαρμογή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων. Περίπτωση Αργίλου μέσης σκληρότητας – Πλαίσιο Π1.



(α)

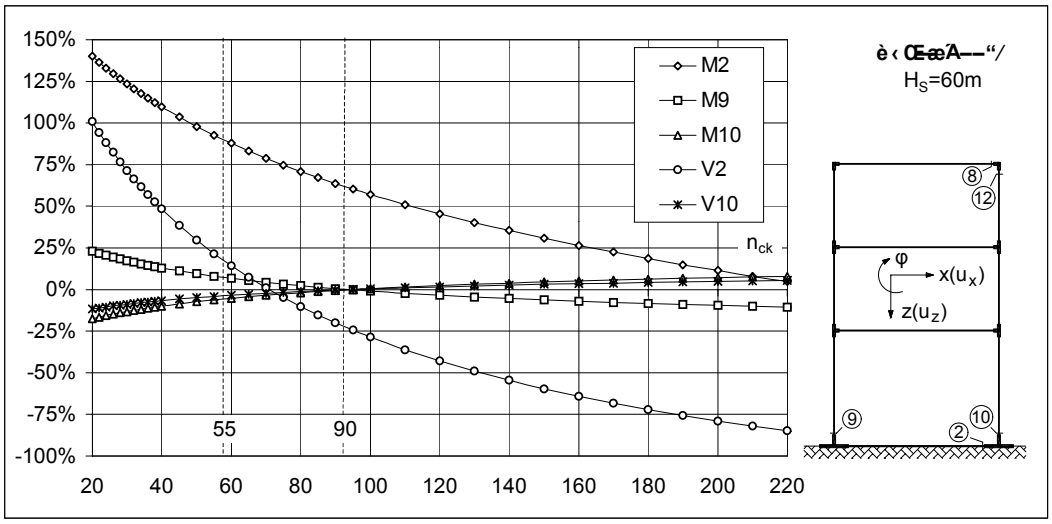


(β)

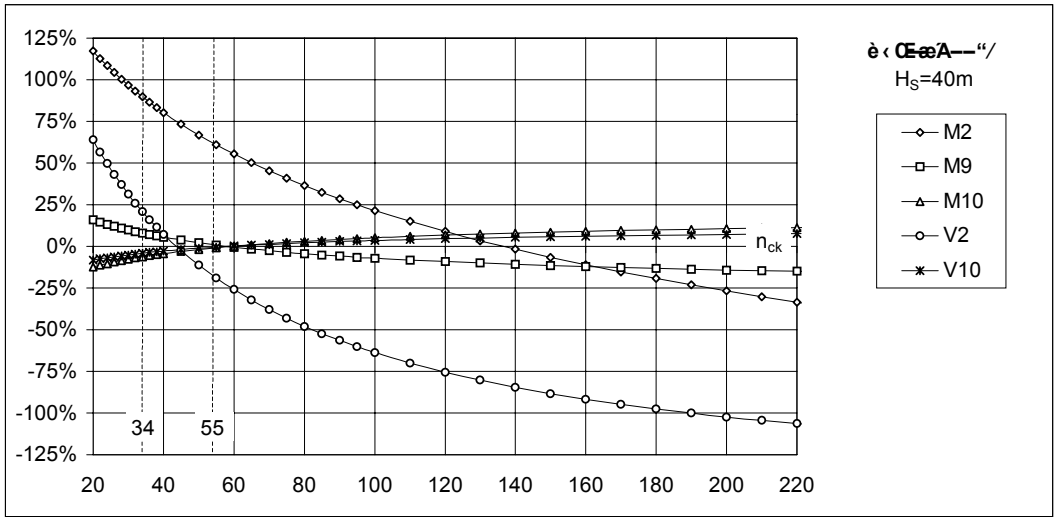


(γ)

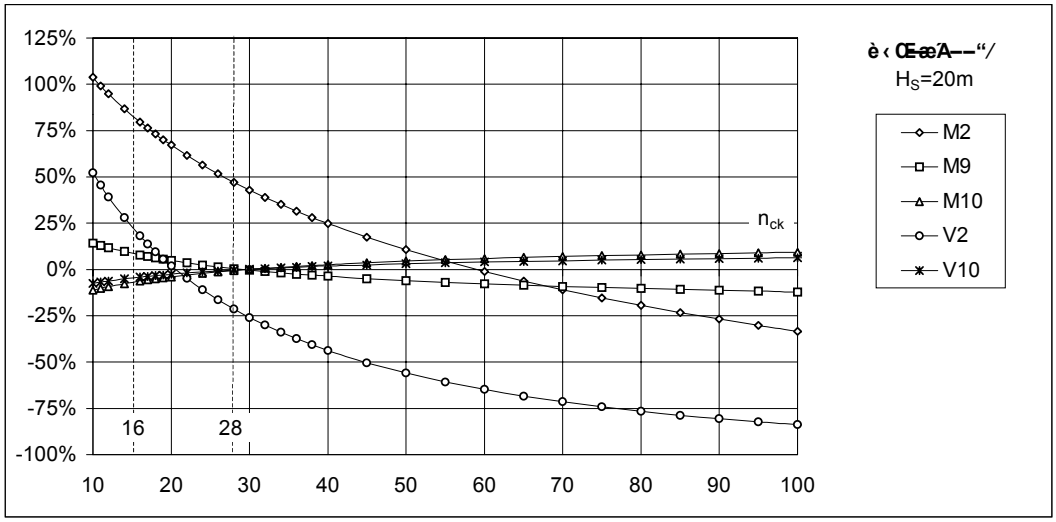
Σχήμα 5.71. Διερεύνηση των βέλτιστων τιμών του συντελεστή συσχέτισης n_{ck} όσον αφορά την σύγκλιση προς την λύση αναφοράς, των τιμών των εξεταζόμενων εντατικών μεγεθών όπως προκύπτουν από την εφαρμογή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων. Περίπτωση Σκληρής Αργίλου – Πλαίσιο Π1.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 5.72. Διερεύνηση των βέλτιστων τιμών του συντελεστή συσχέτισης n_{ck} όσον αφορά την σύγκλιση προς την λύση αναφοράς, των τιμών των εξεταζόμενων εντατικών μεγεθών όπως προκύπτουν από την εφαρμογή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων. Περίπτωση Πυκνής Άμμου – Πλαίσιο Π1.

Πριν ξεκινήσει ο σχολιασμός των σχημάτων 5.70 – 5.72, θα πρέπει να δοθεί μια εξήγηση για την απουσία από τα σχήματα αυτά των εντατικών μεγεθών M_8, M_{12} και V_{12}, τα οποία είναι τα εξεταζόμενα εντατικά μεγέθη του δεξιού κόμβου του ζυγώματος του τελευταίου ορόφου του πλαισίου (Βλέπε Σχήμα 5.63). Από την διαδικασία αξιολόγησης των αποτελεσμάτων των επιλύσεων προέκυψε το συμπέρασμα, ότι οι αποκλίσεις των τιμών των μεγεθών αυτών από τις τιμές αναφοράς δεν ξεπερνούν σε καμιά από τις εξεταζόμενες περιπτώσεις – τύπου εδάφους, βάθους ελαστικού υποβάθρου και τιμής του συντελεστή συσχέτισης – το ±1.5%. Το γεγονός αυτό, αφενός οδήγησε στην απόφαση να μην ενταχθούν τα εντατικά αυτά μεγέθη σε κανένα από τα παρουσιαζόμενα διαγράμματα, και αφετέρου στο συμπέρασμα ότι η μεταβολή των τιμών του συντελεστή συσχέτισης επηρεάζει ελάχιστα τις τιμές τους, οι οποίες είναι γενικά πολύ ικανοποιητικές.

Όσον αφορά τα υπόλοιπα εξεταζόμενα εντατικά μεγέθη στην περιοχή της θεμελίωσης του πλαισίου, διαπιστώθηκε ότι «συμπεριφέρονται» με συγκεκριμένο τρόπο, αν εξαιρεθεί η καμπτική ροπή στο άκρο της πεδιλοδοκού M_2. Πιο συγκεκριμένα, όπως καθίσταται σαφές από την μελέτη των σχετικών σχημάτων, τα εντατικά μεγέθη M_9, M_{10}, V_2, V_{10} αποκτούν τις βέλτιστες τιμές τους εντός ενός κοινού πεδίου τιμών του συντελεστή συσχέτισης, το εύρος και η θέση του οποίου εντός του πεδίου ορισμού του συντελεστή n_{ck}, εξαρτώνται από τον τύπο του εδάφους και το βάθος του ελαστικού υποβάθρου. Τα πεδία βέλτιστων τιμών του συντελεστή συσχέτισης κατά περίπτωση, δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 5.16. Πεδία των βέλτιστων τιμών του συντελεστή συσχέτισης όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π1 στην περιοχή της θεμελίωσης (μεγέθη M_9, M_{10}, V_2, V_{10}), ανά κατηγορία εδάφους και βάθους του ελαστικού υποβάθρου.

Μέγιστη απόκλιση	**Άργιλος μέσης σκληρότητας**			**Σκληρή Άργιλος**			**Πυκνή Άμμος**		
	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m
<±15%	70 – 100	40 – 60	18 – 28	90 – 130	55 – 75	22 – 34	60 – 85	36 – 50	17 – 26
<±20%	65 – 110	38 – 70	17 – 30	85 – 135	50 – 80	20 – 36	55 – 90	34 – 55	16 – 28

Από την μελέτη του παραπάνω πίνακα, προκύπτουν τα εξής βασικά συμπεράσματα:

- Η μείωση του βάθους του ελαστικού υποβάθρου, συνοδεύεται από μείωση των τιμών που οριοθετούν τις βέλτιστες περιοχές του συντελεστή συσχέτισης για κάθε μια από τις κατηγορίες εδάφους που εξετάστηκαν. Ανάλογη μείωση παρατηρείται και στο εύρος των περιοχών αυτών.
- Δεν μπορεί να οριστεί κοινή περιοχή βέλτιστων τιμών ανεξάρτητη του βάθους του ελαστικού υποβάθρου, για καμία από τις κατηγορίες εδάφους που εξετάστηκαν. Αιτία για την αδυναμία αυτή, σύμφωνα με τη μελέτη των σχημάτων 5.70 – 5.72, είναι η τιμή της τέμνουσας V_2, η καμπύλη μεταβολής της οποίας εμφανίζει μεγαλύτερη κλίση από τις καμπύλες μεταβολής των υπολοίπων εξεταζόμενων εντατικών μεγεθών. Αυτό έχει ως συνέπεια, να εμφανίζεται πολύ μειωμένη η περιοχή των βέλτιστων τιμών του συγκεκριμένου εντατικού μεγέθους.

– Αντίθετα, υπάρχει δυνατότητα ορισμού κοινής περιοχής βέλτιστων τιμών του συντελεστή συσχέτισης, ανάλογης του βάθους του ελαστικού υποβάθρου, και ανεξάρτητης της κατηγορίας εδάφους. Έτσι, για βάθος υποβάθρου ίσου με 60 μέτρα και ανεξαρτήτως του τύπου εδάφους, οι τιμές του συντελεστή συσχέτισης που βρίσκονται εντός του διαστήματος 85 – 90, αποδίδουν τιμές των εξεταζόμενων εντατικών μεγεθών, οι οποίες δεν αποκλίνουν περισσότερο από ±20% από τις τιμές αναφοράς. Τα αντίστοιχα διαστήματα τιμών για τις άλλες δυο περιπτώσεις βάθους του ελαστικού υποβάθρου που εξετάστηκαν είναι: H_S=40m: n_{ck}=50 – 55, H_S=20m: n_{ck}=20 – 28.

Με βάση τα παραπάνω, τίθεται το πρόβλημα της ύπαρξης ή όχι ενιαίων τιμών του συντελεστή συσχέτισης, για κάθε κατηγορία εδάφους ξεχωριστά και ανεξαρτήτως του βάθους του ελαστικού υποβάθρου, με οποίες το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων αποδίδει βέλτιστα αποτελέσματα υπό την έννοια της απόδοσης τιμών για τα εξεταζόμενα εντατικά μεγέθη, που δεν υπερβαίνουν ένα συγκεκριμένο επίπεδο αποκλίσεων, της τάξης του 10 – 20%, από τα αποτελέσματα αναφοράς. Οι τιμές που θεωρήθηκαν πως είναι πιθανόν να πληρούν έστω και κατά προσέγγιση το κριτήριο αυτό, χρησιμοποιήθηκαν για τις συγκρίσεις των αποτελεσμάτων του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων, με τα αποτελέσματα των υπολοίπων εξεταζόμενων προσομοιωμάτων, και τα αποτελέσματα των συγκρίσεων αυτών θα παρουσιαστούν παρακάτω. Αξιοποιώντας τα συμπεράσματα που προέκυψαν κατά την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων του παραδείγματος 3α (Επίλυση 3α.3), έγινε έλεγχος εκπλήρωσης του καθορισμένου κριτηρίου, για τις τιμές του συντελεστή n_{ck} που βρίσκονται περίπου στο μέσον των διαστημάτων που ορίζονται από το χαμηλότερο και το υψηλότερο όριο των βέλτιστων πεδίων τιμών ανά κατηγορία εδάφους. Έτσι, προέκυψαν τα παρακάτω διαστήματα των πιθανών βέλτιστων τιμών (βλέπε Πίνακα 5.16):

Άργιλος μέσης σκληρότητας: n_{ck}= 60 – 65.

Σκληρή Άργιλος: n_{ck}= 75 – 80.

Πυκνή Άμμος: n_{ck}= 55 – 60.

Έτσι, στους Πίνακες 5.17 – 5.19 και Σχήματα 5.73 – 5.75, δίνονται τα αποτελέσματα της σύγκρισης του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων – με χρήση των παραπάνω τιμών για τον συντελεστή συσχέτισης – με τα υπόλοιπα προσομοιώματα, και ακολουθούν τα σχετικά σχόλια.

Κατόπιν στους Πίνακες 5.20 – 5.22 και στα Σχήματα 5.76 – 5.78, δίνονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα των συγκρίσεων του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων με τα υπόλοιπα προσομοιώματα, χρησιμοποιώντας αυτήν την φορά ως τιμές για τους συντελεστές συσχέτισης, τις τιμές με τις οποίες επιτυγχάνεται η βέλτιστη απόδοση του προσομοιώματος για κάθε μια από τις περιπτώσεις βάθους του ελαστικού υποβάθρου που εξετάστηκαν, ανεξαρτήτως του τύπου του εδάφους θεμελίωσης. Οι συντελεστές αυτοί όπως αποδείχθηκε πιο πάνω είναι:

H_S=60m → n_{ck}=85.

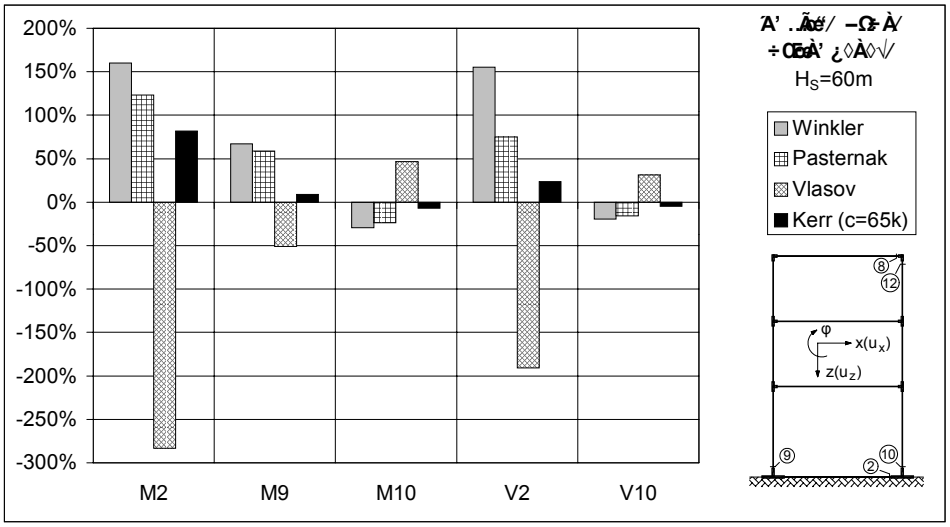
H_S=40m → n_{ck}=55.

H_S=20m → n_{ck}=24.

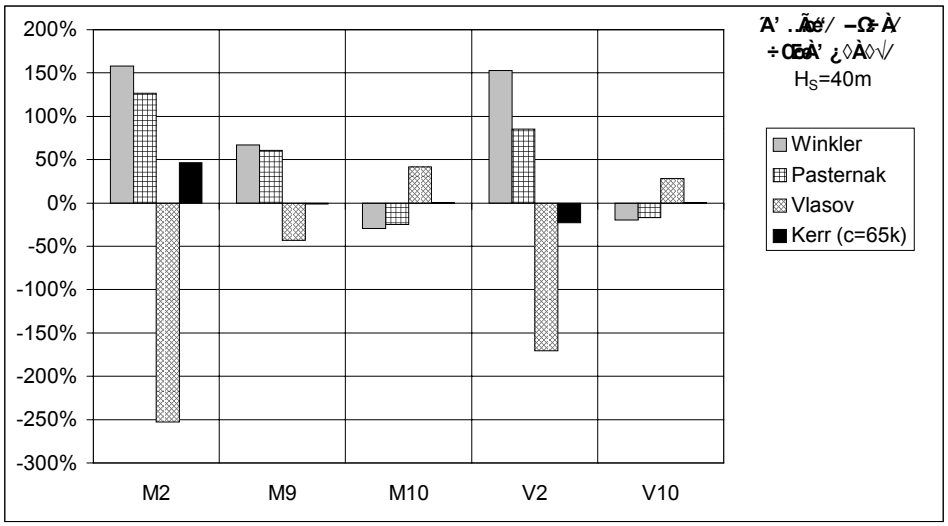
Πίνακας 5.17. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προς εξέταση προσομοιωμάτων όσον αφορά τα ελεγχόμενα εντατικά μεγέθη. Περίπτωση Αργίλου μέσης σκληρότητας – Πλαίσιο Π1.

Απόλυτες τιμές						
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=65k)
H_s=60m	M_2	-56,24	-146,33	-125,72	103,15	-102,34
	M_8	-51,72	-51,34	-51,42	-52,33	-51,64
	M_9	-48,77	-81,53	-77,43	-23,86	-52,95
	M_{10}	63,00	44,33	48,10	92,36	58,56
	M_{12}	-49,86	-49,62	-49,66	-50,23	-49,80
	V_2	46,02	117,54	80,48	-41,70	56,84
	V_{10}	39,85	31,97	33,49	52,37	38,01
	V_{12}	37,60	37,12	37,21	38,36	37,48
H_s=40m	M_2	-56,70	-146,28	-128,54	86,58	-82,93
	M_8	-51,72	-51,34	-51,40	-52,26	-51,73
	M_9	-48,90	-81,51	-78,54	-27,82	-48,40
	M_{10}	62,87	44,35	47,17	89,12	63,21
	M_{12}	-49,85	-49,62	-49,65	-50,19	-49,86
	V_2	46,50	117,46	86,05	-32,80	35,86
	V_{10}	39,80	31,98	33,10	50,98	39,98
	V_{12}	37,59	37,12	37,19	38,27	37,60
H_s=20m	M_2	-59,03	-146,15	-132,91	47,59	-52,84
	M_8	-51,71	-51,35	-51,38	-52,09	-51,81
	M_9	-49,55	-81,44	-79,80	-37,78	-44,57
	M_{10}	62,22	44,41	46,07	80,93	67,22
	M_{12}	-49,85	-49,62	-49,64	-50,08	-49,91
	V_2	48,89	117,24	94,32	-7,19	17,46
	V_{10}	39,52	32,00	32,64	47,48	41,65
	V_{12}	37,58	37,12	37,16	38,06	37,70

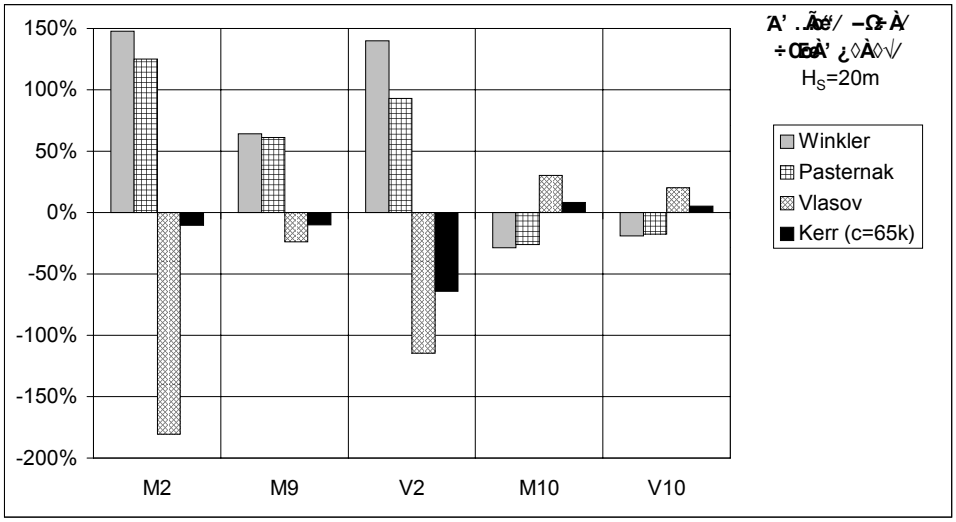
Αποκλίσεις					
	Προσομοίωμα:	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=65k)
H_s=60m	M_2	160,19%	123,54%	-283,40%	81,98%
	M_8	-0,73%	-0,59%	1,17%	-0,16%
	M_9	67,17%	58,77%	-51,07%	8,58%
	M_{10}	-29,63%	-23,65%	46,61%	-7,06%
	M_{12}	-0,48%	-0,39%	0,74%	-0,12%
	V_2	155,40%	74,88%	-190,60%	23,52%
	V_{10}	-19,77%	-15,96%	31,42%	-4,61%
	V_{12}	-1,28%	-1,04%	2,01%	-0,31%
H_s=40m	M_2	158,00%	126,71%	-252,69%	46,27%
	M_8	-0,73%	-0,62%	1,04%	0,02%
	M_9	66,68%	60,61%	-43,11%	-1,03%
	M_{10}	-29,46%	-24,97%	41,75%	0,54%
	M_{12}	-0,46%	-0,40%	0,68%	0,02%
	V_2	152,61%	85,06%	-170,53%	-22,89%
	V_{10}	-19,65%	-16,84%	28,09%	0,45%
	V_{12}	-1,26%	-1,08%	1,81%	0,04%
H_s=20m	M_2	147,58%	125,16%	-180,62%	-10,49%
	M_8	-0,70%	-0,65%	0,74%	0,19%
	M_9	64,36%	61,06%	-23,75%	-10,04%
	M_{10}	-28,63%	-25,96%	30,06%	8,03%
	M_{12}	-0,46%	-0,42%	0,47%	0,12%
	V_2	139,80%	92,93%	-114,70%	-64,28%
	V_{10}	-19,02%	-17,41%	20,13%	5,40%
	V_{12}	-1,23%	-1,12%	1,27%	0,33%



(α)



(β)

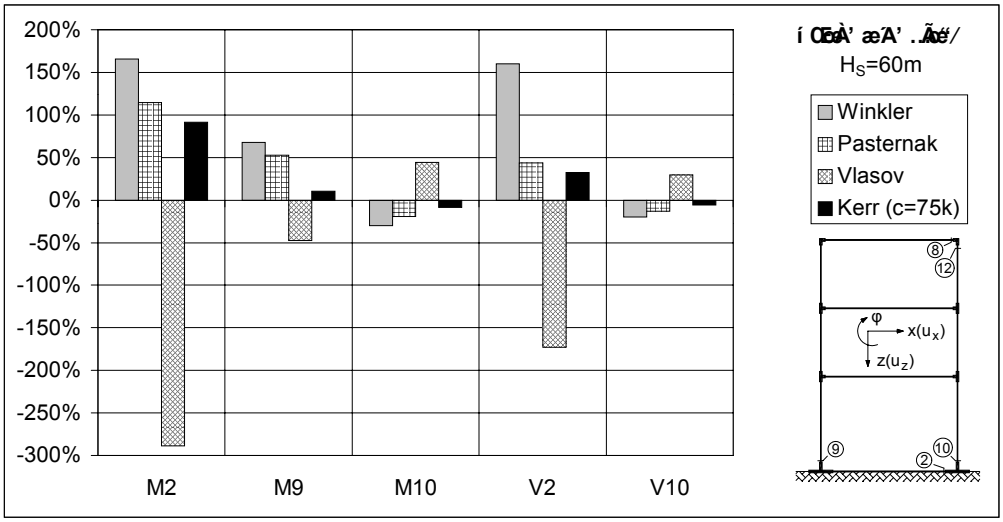


(γ)

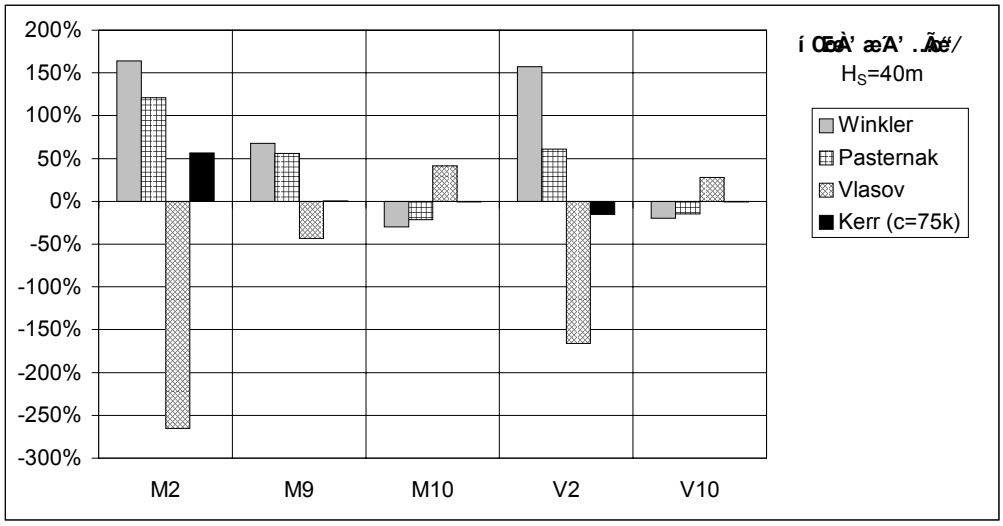
Σχήμα 5.73. Αποκλίσεις των προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς, όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π1, για τα εξεταζόμενα βάθη του ελαστικού υποβάθρου. Περίπτωση Αργίλου μέσης σκληρότητας.

Πίνακας 5.18. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προς εξέταση προσομοιωμάτων όσον αφορά τα ελεγχόμενα εντατικά μεγέθη. Περίπτωση Σκληρής Αργίλου – Πλαίσιο Π1.

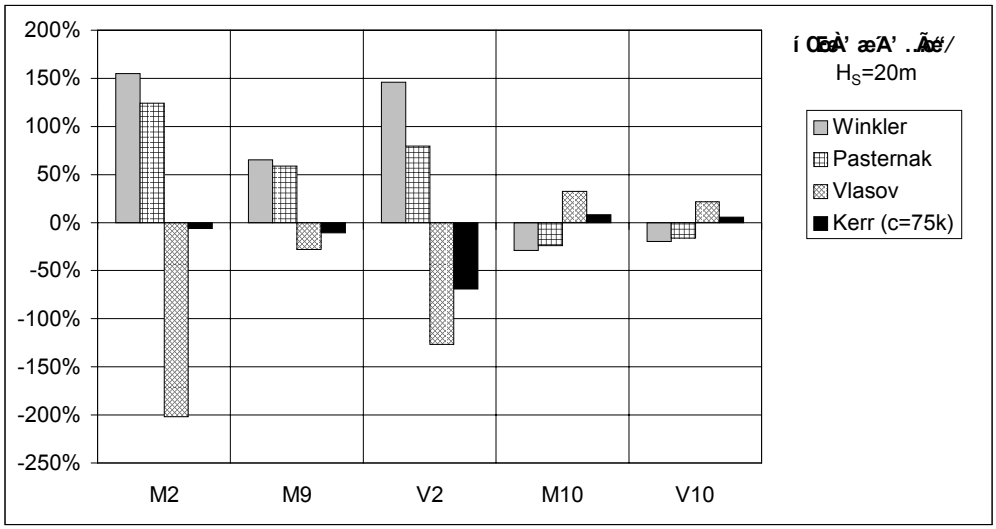
Απόλυτες τιμές						
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=75k)
H_s=60m	M_2	-55,00	-146,28	-117,96	103,94	-105,27
	M_8	-51,73	-51,34	-51,47	-52,30	-51,62
	M_9	-48,53	-81,51	-74,05	-25,42	-53,61
	M_{10}	63,24	44,35	50,93	91,10	57,89
	M_{12}	-49,86	-49,62	-49,70	-50,21	-49,79
	V_2	45,21	117,46	65,01	-32,91	59,86
	V_{10}	40,00	31,98	34,69	51,83	37,73
	V_{12}	37,60	37,12	37,28	38,32	37,47
H_s=40m	M_2	-55,35	-146,22	-122,27	91,59	-86,63
	M_8	-51,73	-51,35	-51,44	-52,26	-51,72
	M_9	-48,64	-81,47	-75,82	-27,68	-48,97
	M_{10}	63,13	44,38	49,44	89,24	62,62
	M_{12}	-49,86	-49,62	-49,68	-50,19	-49,85
	V_2	45,60	117,36	73,52	-30,14	38,68
	V_{10}	39,90	31,99	34,06	51,03	39,73
	V_{12}	37,60	37,12	37,24	38,27	37,59
H_s=20m	M_2	-57,33	-146,02	-128,45	58,57	-53,91
	M_8	-51,71	-51,35	-51,41	-52,13	-51,82
	M_9	-49,19	-81,38	-78,06	-35,39	-43,93
	M_{10}	62,59	44,45	47,54	82,91	67,84
	M_{12}	-49,85	-49,62	-49,66	-50,11	-49,92
	V_2	47,62	117,04	85,57	-12,75	14,60
	V_{10}	39,70	32,02	33,26	48,32	41,92
	V_{12}	37,58	37,12	37,20	38,11	37,72
Αποκλίσεις						
	Προσομοίωμα:		Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=75k)
H_s=60m	M_2		165,97%	114,46%	-288,99%	91,41%
	M_8		-0,74%	-0,49%	1,10%	-0,21%
	M_9		67,95%	52,58%	-47,62%	10,47%
	M_{10}		-29,87%	-19,47%	44,05%	-8,46%
	M_{12}		-0,48%	-0,32%	0,71%	-0,14%
	V_2		159,82%	43,79%	-172,79%	32,40%
	V_{10}		-20,05%	-13,28%	29,56%	-5,67%
	V_{12}		-1,28%	-0,85%	1,92%	-0,35%
H_s=40m	M_2		164,17%	120,91%	-265,47%	56,50%
	M_8		-0,74%	-0,55%	1,03%	-0,02%
	M_9		67,51%	55,88%	-43,09%	0,67%
	M_{10}		-29,71%	-21,68%	41,36%	-0,80%
	M_{12}		-0,48%	-0,36%	0,66%	-0,02%
	V_2		157,36%	61,22%	-166,10%	-15,18%
	V_{10}		-19,82%	-14,64%	27,90%	-0,41%
	V_{12}		-1,28%	-0,95%	1,79%	-0,03%
H_s=20m	M_2		154,71%	124,06%	-202,16%	-5,96%
	M_8		-0,70%	-0,59%	0,81%	0,22%
	M_9		65,45%	58,69%	-28,06%	-10,69%
	M_{10}		-28,98%	-24,05%	32,46%	8,39%
	M_{12}		-0,46%	-0,39%	0,52%	0,13%
	V_2		145,78%	79,69%	-126,78%	-69,34%
	V_{10}		-19,33%	-16,22%	21,72%	5,60%
	V_{12}		-1,22%	-1,02%	1,41%	0,38%



(α)



(β)

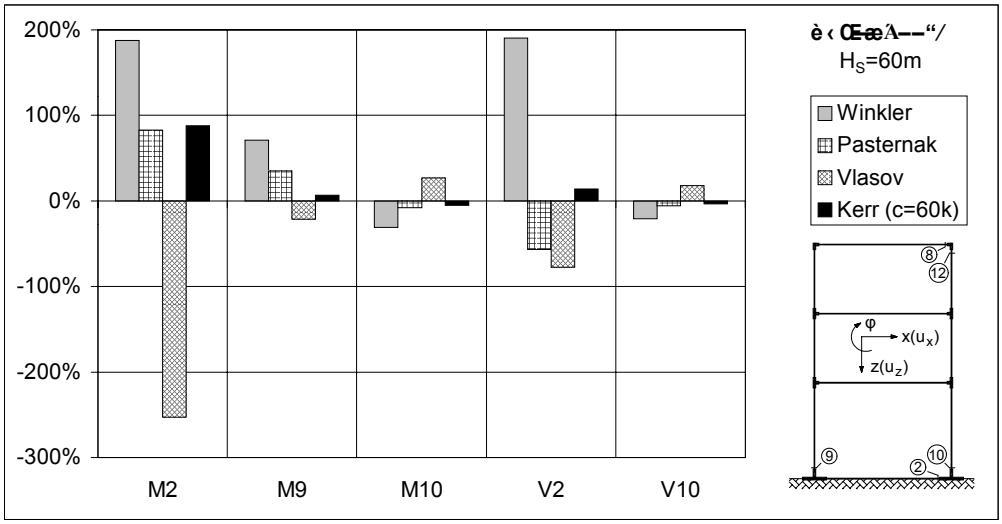


(γ)

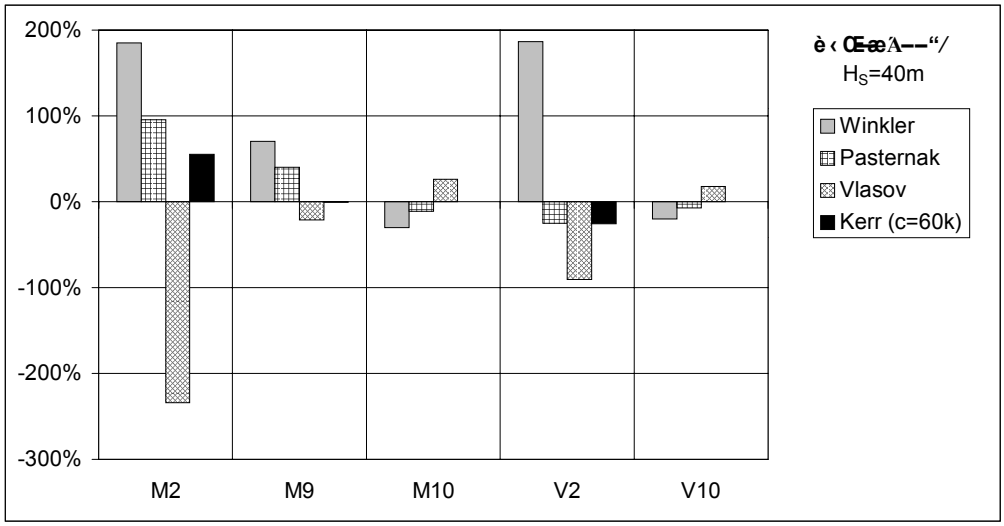
Σχήμα 5.74. Αποκλίσεις των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π1, για τα εξεταζόμενα βάθη του ελαστικού υποβάθρου. Περίπτωση Σκληρής Αργίλου.

Πίνακας 5.19. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από τη λύση αναφοράς, των προσομοιωμάτων όσον αφορά τα ελεγχόμενα εντατικά μεγέθη. Περίπτωση Πυκνής Άμμου – Πλαίσιο Π1.

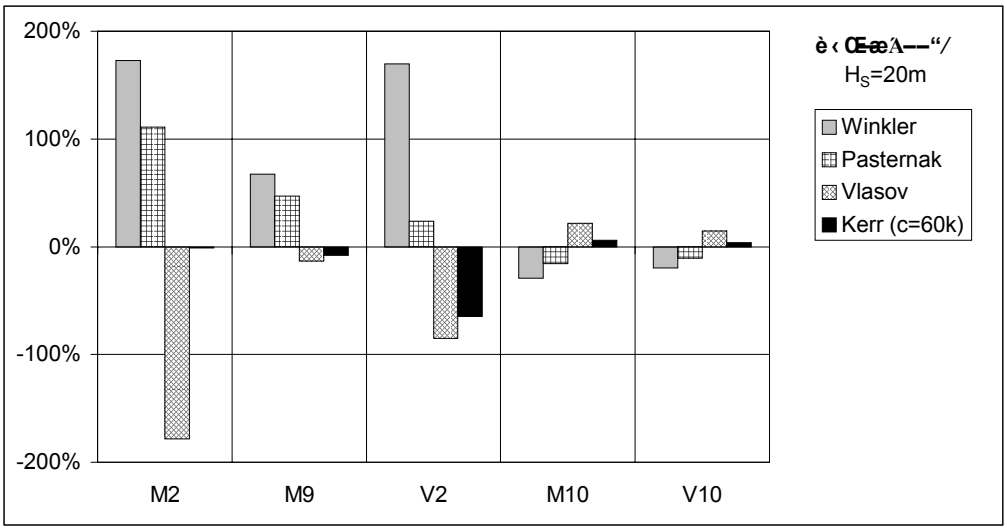
Απόλυτες τιμές						
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=60k)
H_s=60m	M_2	-73,36	-211,10	-133,95	112,04	-137,78
	M_8	-75,13	-74,55	-74,98	-75,64	-75,04
	M_9	-68,84	-117,80	-93,02	-53,93	-73,43
	M_{10}	93,37	64,73	85,99	118,33	88,45
	M_{12}	-72,43	-72,07	-72,34	-72,75	-72,37
	V_2	58,05	168,63	25,15	13,24	66,25
	V_{10}	58,63	46,54	55,43	69,21	56,60
	V_{12}	54,61	53,88	54,42	55,25	54,49
H_s=40m	M_2	-73,89	-210,58	-144,51	99,20	-114,82
	M_8	-75,13	-74,56	-74,92	-75,63	-75,14
	M_9	-69,00	-117,55	-96,57	-54,49	-68,69
	M_{10}	93,23	64,94	82,98	117,84	93,33
	M_{12}	-72,43	-72,08	-72,30	-72,74	-72,43
	V_2	58,58	167,79	43,82	5,48	43,37
	V_{10}	58,57	46,63	54,16	69,01	58,66
	V_{12}	54,61	53,88	54,34	55,24	54,61
H_s=20m	M_2	-76,61	-209,07	-161,71	60,18	-75,82
	M_8	-75,11	-74,57	-74,82	-75,53	-75,23
	M_9	-69,73	-116,83	-102,45	-60,47	-64,31
	M_{10}	92,49	65,53	77,98	112,87	97,96
	M_{12}	-72,42	-72,08	-72,24	-72,68	-72,49
	V_2	61,30	165,33	75,89	9,09	21,58
	V_{10}	58,26	46,88	52,06	66,89	60,58
	V_{12}	54,59	53,90	54,21	55,11	54,73
Αποκλίσεις						
	Προσομοίωμα:		Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=60k)
H_s=60m	M_2		187,76%	82,59%	-252,73%	87,81%
	M_8		-0,77%	-0,20%	0,68%	-0,12%
	M_9		71,12%	35,12%	-21,66%	6,67%
	M_{10}		-30,67%	-7,91%	26,73%	-5,27%
	M_{12}		-0,49%	-0,13%	0,44%	-0,08%
	V_2		190,49%	-56,67%	-77,20%	14,13%
	V_{10}		-20,62%	-5,47%	18,05%	-3,46%
	V_{12}		-1,34%	-0,35%	1,18%	-0,22%
H_s=40m	M_2		184,99%	95,58%	-234,25%	55,39%
	M_8		-0,76%	-0,28%	0,67%	0,01%
	M_9		70,36%	39,95%	-21,02%	-0,45%
	M_{10}		-30,35%	-11,00%	26,39%	0,11%
	M_{12}		-0,49%	-0,18%	0,43%	0,01%
	V_2		186,42%	-25,19%	-90,64%	-25,96%
	V_{10}		-20,39%	-7,53%	17,82%	0,15%
	V_{12}		-1,33%	-0,50%	1,16%	0,01%
H_s=20m	M_2		172,90%	111,08%	-178,56%	-1,03%
	M_8		-0,72%	-0,39%	0,56%	0,16%
	M_9		67,55%	46,92%	-13,28%	-7,78%
	M_{10}		-29,15%	-15,68%	22,03%	5,92%
	M_{12}		-0,47%	-0,25%	0,36%	0,10%
	V_2		169,70%	23,79%	-85,17%	-64,80%
	V_{10}		-19,53%	-10,64%	14,82%	3,99%
	V_{12}		-1,27%	-0,69%	0,96%	0,26%



(α)



(β)



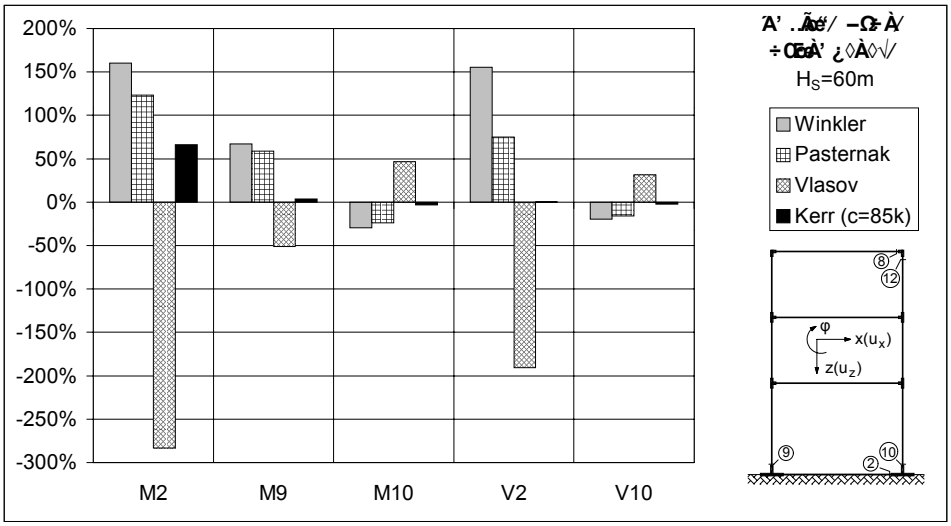
(γ)

Σχήμα 5.75. Αποκλίσεις των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π1, για τα εξεταζόμενα βάθη του ελαστικού υποβάθρου. Περίπτωση Πυκνής Άμμου.

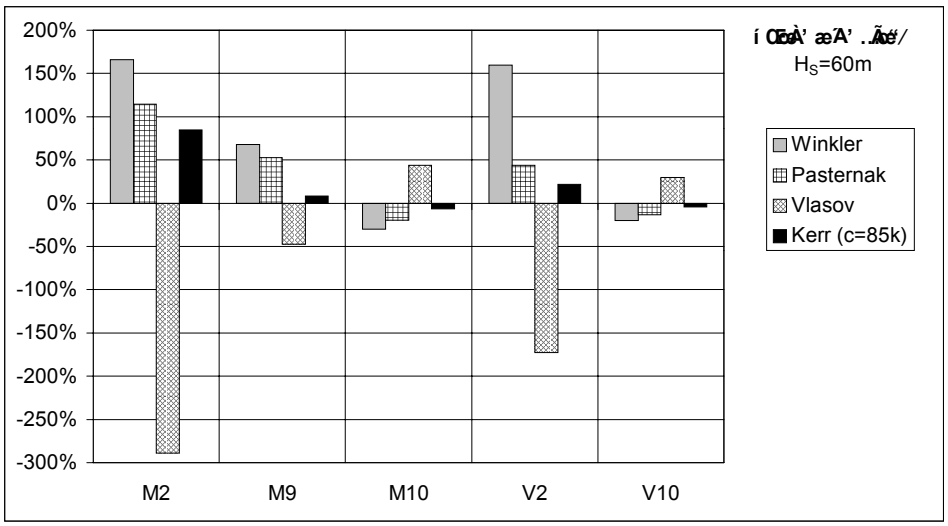
Πίνακας 5.20. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προσομοιωμάτων όσον αφορά τα ελεγχόμενα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π1. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

Απόλυτες τιμές						
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=85k)
E1	M_2	-56,24	-146,33	-125,72	103,15	-93,51
	M_8	-51,72	-51,34	-51,42	-52,33	-51,69
	M_9	-48,77	-81,53	-77,43	-23,86	-50,54
	M_{10}	63,00	44,33	48,10	92,36	61,00
	M_{12}	-49,86	-49,62	-49,66	-50,23	-49,83
	V_2	46,02	117,54	80,48	-41,70	46,14
	V_{10}	39,85	31,97	33,49	52,37	39,05
	V_{12}	37,60	37,12	37,21	38,36	37,55
E2	M_2	-55,00	-146,28	-117,96	103,94	-101,53
	M_8	-51,73	-51,34	-51,47	-52,30	-51,64
	M_9	-48,53	-81,51	-74,05	-25,42	-52,54
	M_{10}	63,24	44,35	50,93	91,10	58,97
	M_{12}	-49,86	-49,62	-49,70	-50,21	-49,81
	V_2	45,21	117,46	65,01	-32,91	55,13
	V_{10}	40,00	31,98	34,69	51,83	38,19
	V_{12}	37,60	37,12	37,28	38,32	37,49
E4	M_2	-73,36	-211,10	-133,95	112,04	-122,66
	M_8	-75,13	-74,55	-74,98	-75,64	-75,11
	M_9	-68,84	-117,80	-93,02	-53,93	-69,81
	M_{10}	93,37	64,73	85,99	118,33	92,16
	M_{12}	-72,43	-72,07	-72,34	-72,75	-72,42
	V_2	58,05	168,63	25,15	13,24	49,17
	V_{10}	58,63	46,54	55,43	69,21	58,17
	V_{12}	54,61	53,88	54,42	55,25	54,58

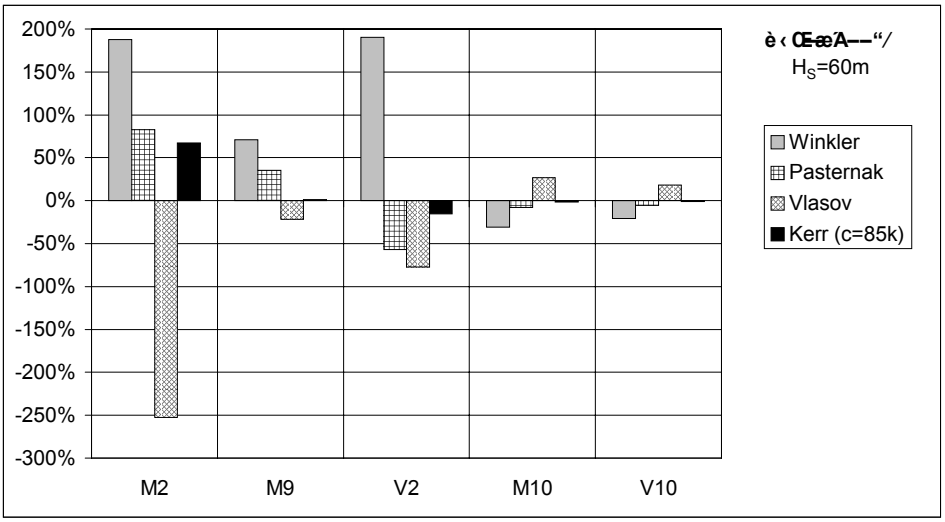
Αποκλίσεις					
	Προσομοίωμα:	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=85k)
E1	M_2	160,19%	123,54%	-283,40%	66,26%
	M_8	-0,73%	-0,59%	1,17%	-0,07%
	M_9	67,17%	58,77%	-51,07%	3,64%
	M_{10}	-29,63%	-23,65%	46,61%	-3,17%
	M_{12}	-0,48%	-0,39%	0,74%	-0,06%
	V_2	155,40%	74,88%	-190,60%	0,26%
	V_{10}	-19,77%	-15,96%	31,42%	-2,01%
	V_{12}	-1,28%	-1,04%	2,01%	-0,14%
E2	M_2	165,97%	114,46%	-288,99%	84,59%
	M_8	-0,74%	-0,49%	1,10%	-0,17%
	M_9	67,95%	52,58%	-47,62%	8,26%
	M_{10}	-29,87%	-19,47%	44,05%	-6,75%
	M_{12}	-0,48%	-0,32%	0,71%	-0,11%
	V_2	159,82%	43,79%	-172,79%	21,94%
	V_{10}	-20,05%	-13,28%	29,56%	-4,52%
	V_{12}	-1,28%	-0,85%	1,92%	-0,28%
E4	M_2	187,76%	82,59%	-252,73%	67,20%
	M_8	-0,77%	-0,20%	0,68%	-0,02%
	M_9	71,12%	35,12%	-21,66%	1,40%
	M_{10}	-30,67%	-7,91%	26,73%	-1,29%
	M_{12}	-0,49%	-0,13%	0,44%	-0,01%
	V_2	190,49%	-56,67%	-77,20%	-15,30%
	V_{10}	-20,62%	-5,47%	18,05%	-0,78%
	V_{12}	-1,34%	-0,35%	1,18%	-0,05%



(α)



(β)

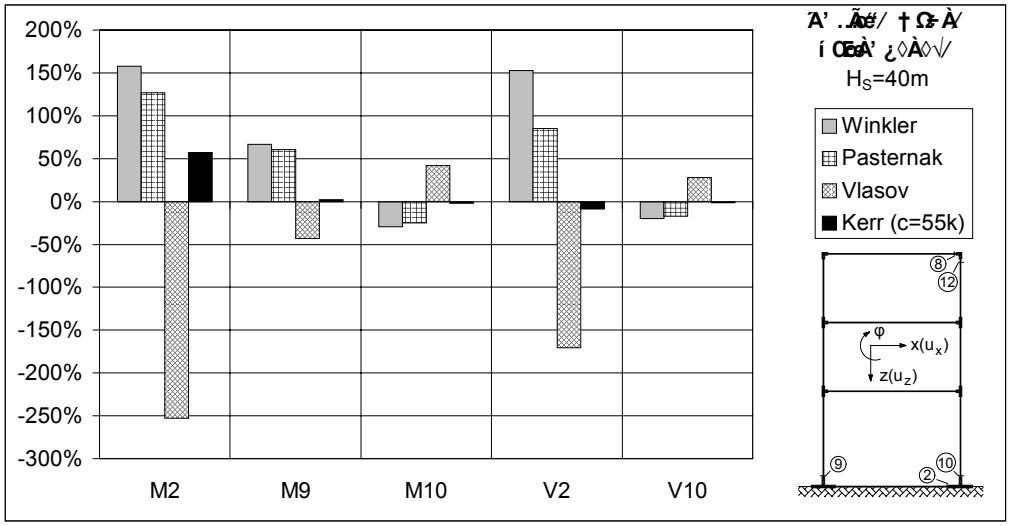


(γ)

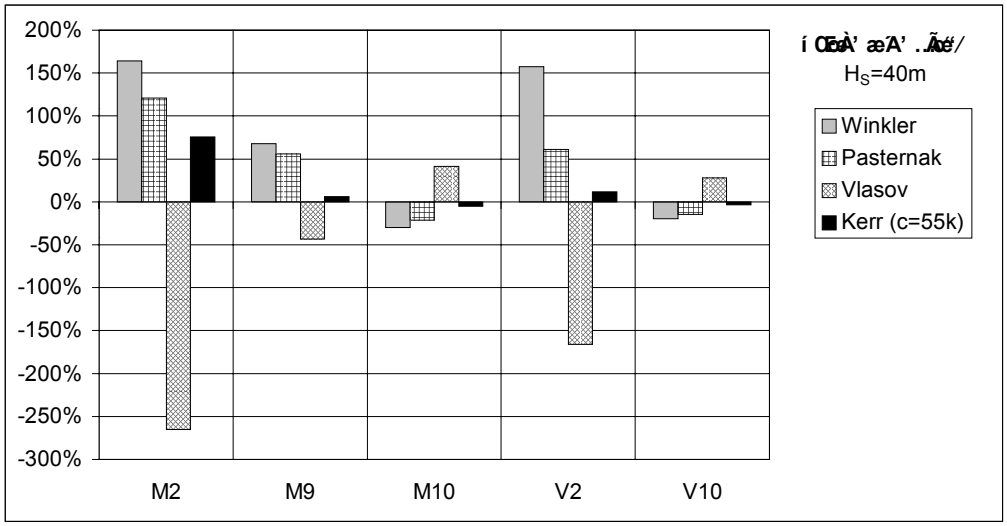
Σχήμα 5.76. Αποκλίσεις των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π1, για όλες τις εξεταζόμενες κατηγορίες εδάφους. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

Πίνακας 5.21. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προσομοιωμάτων όσον αφορά τα ελεγχόμενα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π1. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=40m.

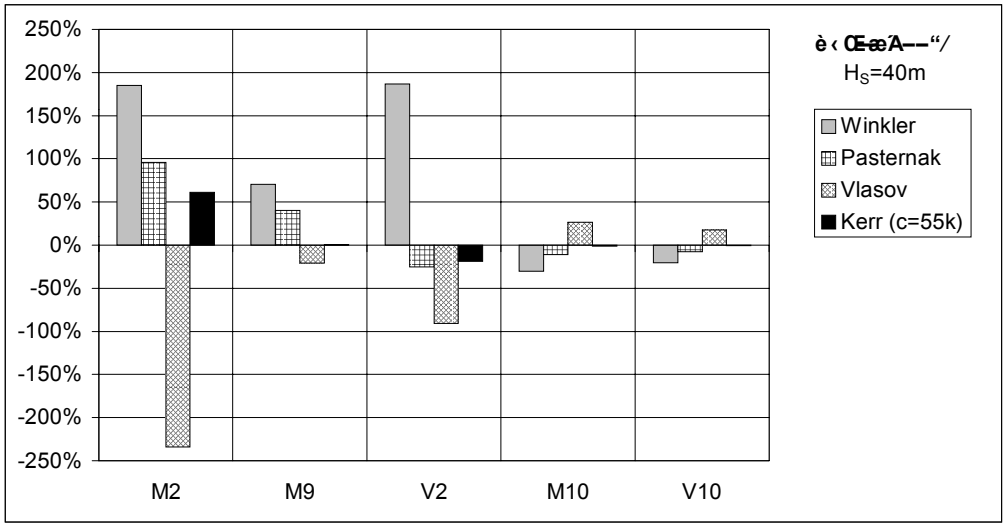
Απόλυτες τιμές						
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=55k)
E1	M_2	-56,70	-146,28	-128,54	86,58	-89,06
	M_8	-51,72	-51,34	-51,40	-52,26	-51,70
	M_9	-48,90	-81,51	-78,54	-27,82	-49,86
	M_{10}	62,87	44,35	47,17	89,12	61,71
	M_{12}	-49,85	-49,62	-49,65	-50,19	-49,84
	V_2	46,50	117,46	86,05	-32,80	42,48
	V_{10}	39,80	31,98	33,10	50,98	39,35
	V_{12}	37,59	37,12	37,19	38,27	37,56
E2	M_2	-55,35	-146,22	-122,27	91,59	-97,24
	M_8	-51,73	-51,35	-51,44	-52,26	-51,66
	M_9	-48,64	-81,47	-75,82	-27,68	-51,67
	M_{10}	63,13	44,38	49,44	89,24	59,87
	M_{12}	-49,86	-49,62	-49,68	-50,19	-49,82
	V_2	45,60	117,36	73,52	-30,14	50,86
	V_{10}	39,90	31,99	34,06	51,03	38,57
	V_{12}	37,60	37,12	37,24	38,27	37,52
E4	M_2	-73,89	-210,58	-144,51	99,20	-118,90
	M_8	-75,13	-74,56	-74,92	-75,63	-75,12
	M_9	-69,00	-117,55	-96,57	-54,49	-69,54
	M_{10}	93,23	64,94	82,98	117,84	92,45
	M_{12}	-72,43	-72,08	-72,30	-72,74	-72,42
	V_2	58,58	167,79	43,82	5,48	47,45
	V_{10}	58,57	46,63	54,16	69,01	58,29
	V_{12}	54,61	53,88	54,34	55,24	54,59
Αποκλίσεις						
	Προσομοίωμα:		Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=55k)
E1	M_2		158,00%	126,71%	-252,69%	57,08%
	M_8		-0,73%	-0,62%	1,04%	-0,04%
	M_9		66,68%	60,61%	-43,11%	1,97%
	M_{10}		-29,46%	-24,97%	41,75%	-1,84%
	M_{12}		-0,46%	-0,40%	0,68%	-0,02%
	V_2		152,61%	85,06%	-170,53%	-8,64%
	V_{10}		-19,65%	-16,84%	28,09%	-1,13%
	V_{12}		-1,26%	-1,08%	1,81%	-0,07%
E2	M_2		164,17%	120,91%	-265,47%	75,69%
	M_8		-0,74%	-0,55%	1,03%	-0,13%
	M_9		67,51%	55,88%	-43,09%	6,23%
	M_{10}		-29,71%	-21,68%	41,36%	-5,16%
	M_{12}		-0,48%	-0,36%	0,66%	-0,09%
	V_2		157,36%	61,22%	-166,10%	11,53%
	V_{10}		-19,82%	-14,64%	27,90%	-3,34%
	V_{12}		-1,28%	-0,95%	1,79%	-0,22%
E4	M_2		184,99%	95,58%	-234,25%	60,92%
	M_8		-0,76%	-0,28%	0,67%	-0,02%
	M_9		70,36%	39,95%	-21,02%	0,78%
	M_{10}		-30,35%	-11,00%	26,39%	-0,83%
	M_{12}		-0,49%	-0,18%	0,43%	-0,01%
	V_2		186,42%	-25,19%	-90,64%	-19,00%
	V_{10}		-20,39%	-7,53%	17,82%	-0,48%
	V_{12}		-1,33%	-0,50%	1,16%	-0,04%



(α)



(β)

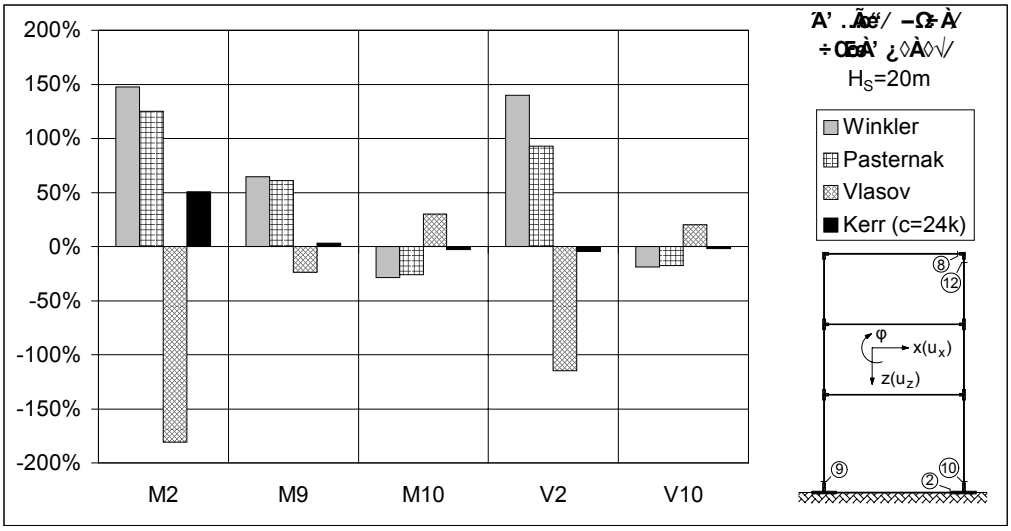


(γ)

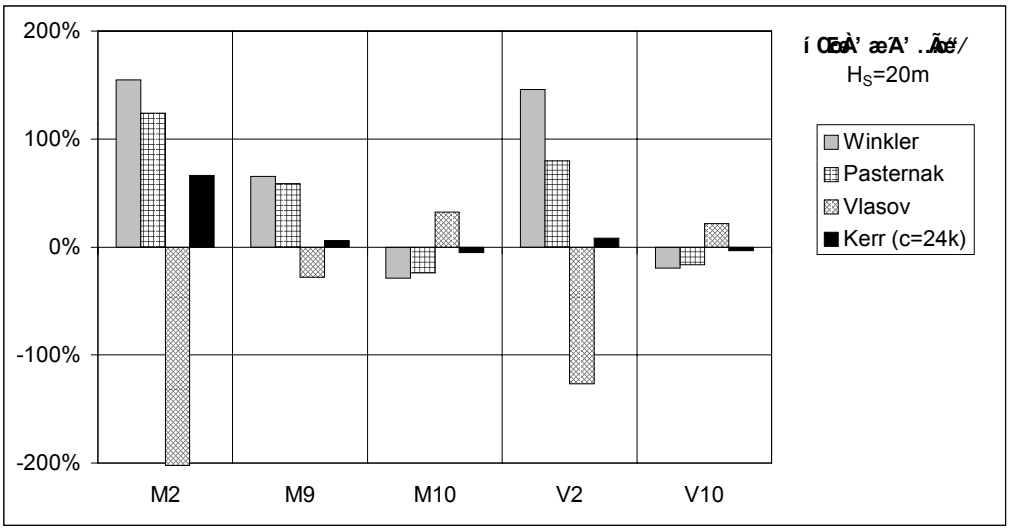
Σχήμα 5.77. Αποκλίσεις των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π1, για όλες τις εξεταζόμενες κατηγορίες εδάφους. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=40m.

Πίνακας 5.22. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προσομοιωμάτων όσον αφορά τα ελεγχόμενα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π1. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=20m.

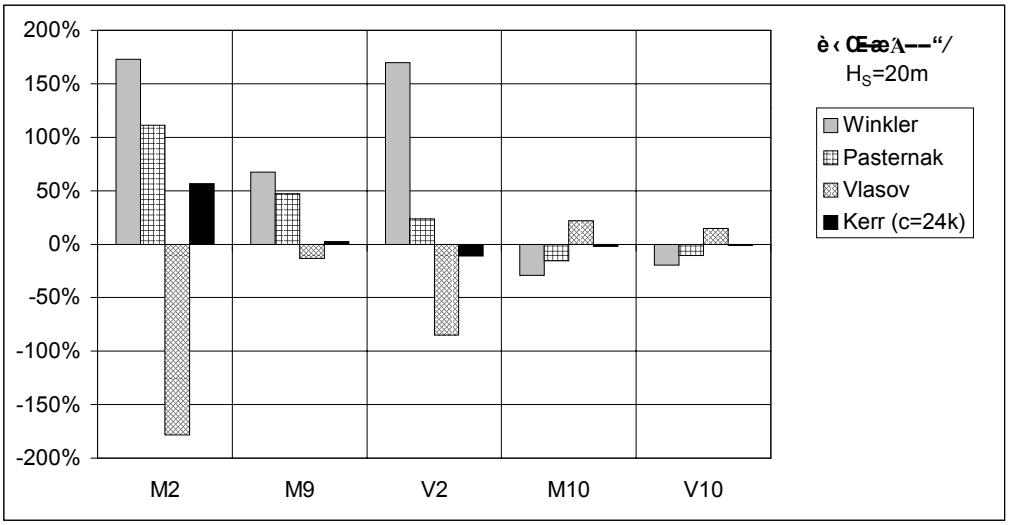
Απόλυτες τιμές						
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=24k)
E1	M_2	-59,03	-146,15	-132,91	47,59	-88,96
	M_8	-51,71	-51,35	-51,38	-52,09	-51,67
	M_9	-49,55	-81,44	-79,80	-37,78	-51,18
	M_{10}	62,22	44,41	46,07	80,93	60,44
	M_{12}	-49,85	-49,62	-49,64	-50,08	-49,82
	V_2	48,89	117,24	94,32	-7,19	46,79
	V_{10}	39,52	32,00	32,64	47,48	38,80
	V_{12}	37,58	37,12	37,16	38,06	37,53
E2	M_2	-57,33	-146,02	-128,45	58,57	-95,28
	M_8	-51,71	-51,35	-51,41	-52,13	-51,65
	M_9	-49,19	-81,38	-78,06	-35,39	-52,10
	M_{10}	62,59	44,45	47,54	82,91	59,48
	M_{12}	-49,85	-49,62	-49,66	-50,11	-49,81
	V_2	47,62	117,04	85,57	-12,75	51,54
	V_{10}	39,70	32,02	33,26	48,32	38,40
	V_{12}	37,58	37,12	37,20	38,11	37,51
E4	M_2	-76,61	-209,07	-161,71	60,18	-119,86
	M_8	-75,11	-74,57	-74,82	-75,53	-75,08
	M_9	-69,73	-116,83	-102,45	-60,47	-71,44
	M_{10}	92,49	65,53	77,98	112,87	90,57
	M_{12}	-72,42	-72,08	-72,24	-72,68	-72,40
	V_2	61,30	165,33	75,89	9,09	54,65
	V_{10}	58,26	46,88	52,06	66,89	57,48
	V_{12}	54,59	53,90	54,21	55,11	54,54
Αποκλίσεις						
	Προσομοίωμα:		Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=24k)
E1	M_2		147,58%	125,16%	-180,62%	50,71%
	M_8		-0,70%	-0,65%	0,74%	-0,07%
	M_9		64,36%	61,06%	-23,75%	3,28%
	M_{10}		-28,63%	-25,96%	30,06%	-2,86%
	M_{12}		-0,46%	-0,42%	0,47%	-0,05%
	V_2		139,80%	92,93%	-114,70%	-4,30%
	V_{10}		-19,02%	-17,41%	20,13%	-1,83%
	V_{12}		-1,23%	-1,12%	1,27%	-0,13%
E2	M_2		154,71%	124,06%	-202,16%	66,19%
	M_8		-0,70%	-0,59%	0,81%	-0,11%
	M_9		65,45%	58,69%	-28,06%	5,91%
	M_{10}		-28,98%	-24,05%	32,46%	-4,97%
	M_{12}		-0,46%	-0,39%	0,52%	-0,08%
	V_2		145,78%	79,69%	-126,78%	8,23%
	V_{10}		-19,33%	-16,22%	21,72%	-3,29%
	V_{12}		-1,22%	-1,02%	1,41%	-0,19%
E4	M_2		172,90%	111,08%	-178,56%	56,46%
	M_8		-0,72%	-0,39%	0,56%	-0,04%
	M_9		67,55%	46,92%	-13,28%	2,45%
	M_{10}		-29,15%	-15,68%	22,03%	-2,07%
	M_{12}		-0,47%	-0,25%	0,36%	-0,03%
	V_2		169,70%	23,79%	-85,17%	-10,85%
	V_{10}		-19,53%	-10,64%	14,82%	-1,34%
	V_{12}		-1,27%	-0,69%	0,96%	-0,09%



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 5.78. Αποκλίσεις των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π1, για όλες τις εξεταζόμενες κατηγορίες εδάφους. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=20m.

Από τον Πίνακα 5.17 και το Σχήμα 5.73, προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα για την περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώμα Αργίλου μέσης σκληρότητας:

- Όταν το βάθος του υποστρώματος είναι ίσο με 60 μέτρα, η υπεροχή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων με χρήση της τιμής n_{ck}=65 έναντι όλων των υπολοίπων είναι σαφής όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη στην περιοχή της θεμελίωσης. Οι αποκλίσεις που αποδίδει το εν λόγω προσομοίωμα είναι πολύ ικανοποιητικές, με εξαίρεση την απόκλιση της ροπής M_2 που είναι της τάξης του 80%. Ωστόσο, και στην περίπτωση αυτή εμφανίζεται αποδοτικότερο των υπολοίπων, καθώς η αμέσως μικρότερη απόκλιση για το εν λόγω εντατικό μέγεθος είναι της τάξης του 123%. Χαρακτηριστικό είναι μάλιστα το γεγονός, ότι οι τιμές που αποδίδει το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων όσον αφορά τις καμπτικές ροπές στους πόδες των υποστυλωμάτων M_9 και M_{10}, δεν υπερβαίνουν το 8%. Αναφορικά με τα υπόλοιπα προσομοιώματα, αποδοτικότερο εμφανίζεται το προσομοίωμα του Pasternak, ενώ υποδεέστερα και σχεδόν ισοδύναμα εμφανίζονται τα προσομοιώματα των Vlasov και Winkler. Τέλος, για τα εξεταζόμενα εντατικά μεγέθη στην κορυφή του πλαισίου προκύπτει το συμπέρασμα ότι η απόδοση όλων των προσομοιωμάτων είναι κάτι παραπάνω από ικανοποιητική, καθώς κανένα από αυτά δεν αποδίδει αποκλίσεις άνω του 2%.
- Όταν το βάθος του υποστρώματος είναι ίσο με 40 μέτρα, διατηρείται η ίδια εικόνα που περιγράφηκε και προηγουμένως με μόνες διαφορές, αφενός τις ακόμη μικρότερες αποκλίσεις που αποδίδει το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων (π.χ. οι αποκλίσεις των M_9, M_{10}, δεν υπερβαίνουν το 1%, και της M_2 το 47%), και αφετέρου το γεγονός ότι το προσομοίωμα του Vlasov εμφανίζεται λιγότερο αποδοτικό έναντι όλων των υπολοίπων.
- Και στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος 20 μέτρα, δεν παρατηρείται καμία ουσιαστική διαφοροποίηση με τις προηγούμενες περιπτώσεις κυρίως όσον αφορά την κατάταξη των προσομοιωμάτων με βάση την αποδοτικότητα τους. Εκείνο που ίσως θα άξιζε να σημειωθεί, είναι ότι η εικόνα που εμφανίζει το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων στην παρούσα περίπτωση είναι πιο κοντά στην αντίστοιχη εικόνα που παρουσιάζει στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος 60 μέτρα.

Στην περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώμα σκληρής Αργίλου (Πίνακας 5.18 και Σχήμα 5.74), έγινε χρήση της τιμής n_{ck}=75 για το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τις συγκρίσεις των αποτελεσμάτων, είναι σχεδόν ίδια με αυτά που προέκυψαν και κατά τη μελέτη της Αργίλου μέσης σκληρότητας. Έτσι, η σαφής υπεροχή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων έναντι όλων των υπολοίπων διατηρείται και στην παρούσα περίπτωση, ενώ η ιεράρχηση των υπολοίπων προσομοιωμάτων με βάση την αποδοτικότητα τους δεν μεταβάλλεται ουσιαστικά. Πέραν τούτου, και οι τιμές των αποκλίσεων όλων των εντατικών μεγεθών δεν μεταβάλλονται σημαντικά για κανένα από τα εξεταζόμενα προσομοιώματα. Έτσι, για την περίπτωση της μελέτης της σκληρής Αργίλου δεν κρίνεται απαραίτητη καμία επιπλέον αναφορά πέραν των όσων αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Για την περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώμα πυκνής Άμμου, έγινε χρήση της τιμής n_{ck}=60 για το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων (Πίνακας 5.19 και Σχήμα 5.75).

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τις συγκρίσεις των αποτελεσμάτων, είναι τα εξής:

- Όταν το βάθος του ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 60 μέτρα, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων εμφανίζεται και πάλι αποδοτικότερο στην προσέγγιση των εντατικών μεγεθών στην περιοχή της θεμελίωσης, με εξαίρεση την καμπτική ροπή M_2 για την οποία το προσομοίωμα του Pasternak αποδίδει ελαφρώς μικρότερη απόκλιση (83% έναντι 88%). Κατά τα λοιπά όμως, καμία από τις αποδιδόμενες από το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων αποκλίσεις δεν υπερβαίνει το 15%, ενώ ειδικότερα οι αποκλίσεις των μεγεθών M_9, M_{10} κυμαίνονται σε επίπεδα κάτω του 7%. Όσον αφορά την αξιολόγηση των υπολοίπων προσομοιωμάτων, σημαντικά βελτιωμένο σε σχέση με τις περιπτώσεις μελέτης υποστρωμάτων αργίλου εμφανίζεται το προσομοίωμα του Pasternak, το οποίο για ορισμένα από τα εντατικά μεγέθη αποδίδει αποκλίσεις άμεσα συγκρίσιμες με τις αποκλίσεις που αποδίδει το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων (π.χ. αποκλίσεις μεγεθών M_{10}, V_{10}). Το προσομοίωμα του Vlasov υπολείπεται σε αποδοτικότητα των δυο προηγουμένων, αλλά με σαφώς μικρότερες αποκλίσεις από την περίπτωση της μελέτης των στρωμάτων αργίλου. Παρόμοια συμπεράσματα εξάγονται και για το προσομοίωμα του Winkler. Τέλος, όσον αφορά τα εξεταζόμενα εντατικά μεγέθη στην κορυφή του πλαισίου θα πρέπει να τονιστεί ότι και στην παρούσα περίπτωση, οι αποκλίσεις που αποδίδουν όλα τα προσομοιώματα είναι πολύ μικρές και πιο συγκεκριμένα μικρότερες σε κάθε περίπτωση του 2%.
- Στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος ίσο με 40 μέτρα, ισχύουν εν πολλοίς τα συμπεράσματα που καταγράφηκαν προηγουμένως. Η μόνη διαφορά που αξίζει να σημειωθεί, είναι η σημαντική αύξηση της αποδοτικότητας του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων, που υπερτερεί σημαντικά των υπολοίπων για όλα τα εξεταζόμενα εντατικά μεγέθη στην περιοχή της θεμελίωσης.
- Ούτε και στην περίπτωση κατά την οποία το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος 20 μέτρα μεταβάλλονται σημαντικά τα αποτελέσματα των συγκρίσεων, από αυτά που καταγράφηκαν για τις δυο προηγούμενες περιπτώσεις. Εξαίρεση αποτελεί η υστέρηση που εμφανίζει το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων έναντι του προσομοιώματος του Pasternak όσον αφορά την προσέγγιση της τιμής της τέμνουσας V_2 (65% έναντι 24%), ενώ κατά τα άλλα διατηρείται η σαφής υπεροχή του έναντι των υπολοίπων.

Από τους Πίνακες 5.20 – 5.22 και τα Σχήματα 5.76 – 5.78, προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι συντελεστές συσχέτισης n_{ck}=85 για την περίπτωση που H_S=60m, n_{ck}=55 για την περίπτωση που H_S=40m, και n_{ck}=24 για την περίπτωση που H_S=20m, προσδίδουν στο προσομοίωμα των τριών παραμέτρων την απόλυτη υπεροχή έναντι όλων των υπολοίπων προσομοιωμάτων ανεξαρτήτως της κατηγορίας εδάφους. Αυτό σημαίνει ότι η κατηγοριοποίηση των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης, είναι πιο συγκεκριμένη και αποτελεσματική όταν γίνεται με βάση το βάθος του ελαστικού υποβάθρου και όχι με βάση τον τύπο του εδάφους θεμελίωσης.

Κλείνοντας την αναφορά στα συμπεράσματα των επιλύσεων του πλαισίου Π1, θα πρέπει να γίνει μια συνοπτική καταγραφή των βασικότερων από αυτά:

Συγκρίσεις των μεγεθών μετακίνησης

Όσον αφορά την σύγκριση των εξεταζόμενων μεγεθών μετακίνησης του πλαισίου Π1, αποδείχθηκε ότι η τιμή του συντελεστή συσχέτισης n_{ck}=17 καθιστά το προσομοίωμα τριών παραμέτρων αποδοτικότερο όλων των υπολοίπων. Η τιμή αυτή αποδίδει στο εν λόγω προσομοίωμα την κατά μέσον όρο καλύτερη απόδοση

ανεξαρτήτως τύπου εδάφους, και βάθους υποβάθρου. Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση Ε4 / H_S=20m. Για την συγκεκριμένη περίπτωση, αποδοτικότερο αποδεικνύεται το προσομοίωμα του Pasternak. Γενικότερα το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων εμφανίζεται να δίνει καλύτερα αποτελέσματα, και με μεγαλύτερη σταθερότητα στην περίπτωση μελέτης των αργιλικών εδαφών Ε1 και Ε2, που έχουν σχετικά μικρό μέτρο ελαστικότητας. Αντίθετα, στην περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώμα πυκνής άμμου η οποία έχει σχετικά μεγάλο μέτρο ελαστικότητας, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων αποδίδει μεν πολύ καλά αποτελέσματα, ωστόσο όμως εμφανίζει μια διασπορά όσον αφορά τις περιοχές των τιμών του συντελεστή συσχέτισης για τις οποίες επιτυγχάνεται η βέλτιστη σύγκλιση των διαφόρων μεγεθών μετακίνησης (Βλέπε Πίνακα 5.15). Αναφορικά με τα υπόλοιπα προσομοιώματα, το προσομοίωμα του Pasternak εμφανίζεται το αμέσως αποδοτικότερο κυρίως στην σύγκλιση των στροφικών μεγεθών μετακίνησης που ελέχθησαν, ενώ η γενικά η αποδοτικότητα του αυξάνεται για μικρά βάθη υποβάθρου. Το προσομοίωμα του Vlasov, εμφανίζεται να είναι μετά το προσομοίωμα τριών παραμέτρων το αμέσως αποδοτικότερο σχετικά με την σύγκλιση των κατακορύφων μετακινήσεων, αν εξαιρεθεί η περίπτωση Ε4 / H_S=20m. Τέλος, το προσομοίωμα του Winkler είναι με μεγάλη διαφορά το λιγότερο αποδοτικό από όλα τα υπόλοιπα σε κάθε μια από τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν και για όλα τα μεγέθη μετακίνησης.

Συγκρίσεις των μεγεθών έντασης

Τα εξεταζόμενα εντατικά μεγέθη, θα πρέπει να διακριθούν στα εντατικά μεγέθη στην περιοχή της θεμελίωσης, και στα εντατικά μεγέθη στην κορυφή του πλαισίου.

Ξεκινώντας την καταγραφή των συμπερασμάτων από τα εντατικά μεγέθη στην κορυφή του πλαισίου, θα πρέπει να υπογραμμιστεί το γενικό συμπέρασμα ότι όλα τα προσομοιώματα αποδίδουν πολύ ικανοποιητικές τιμές οι οποίες δεν αποκλίνουν περισσότερο από 2% από τη λύση αναφοράς. Αυτό σημαίνει ότι ο τύπος του εδαφικού προσομοιώματος που χρησιμοποιείται, έχει μηδαμινή επιρροή στα εντατικά μεγέθη που αναπτύσσονται σε περιοχές του πλαισίου οι οποίες βρίσκονται τοπολογικά σε μεγάλη απόσταση από την περιοχή θεμελίωσης.

Όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη στην περιοχή της θεμελίωσης, το βασικότερο συμπέρασμα είναι ότι ορίζονται συγκεκριμένοι βέλτιστοι συντελεστές συσχέτισης με βάση το βάθος του ελαστικού υποβάθρου και όχι με βάση τον τύπο του εδάφους. Οι συντελεστές αυτοί οι οποίοι είναι:

n_{ck}=85 για την περίπτωση που H_S=60m,

n_{ck}=55 για την περίπτωση που H_S=40m και,

n_{ck}=24 για την περίπτωση που H_S=20m,

δίνουν στο προσομοίωμα των τριών παραμέτρων, την ικανότητα υπολογισμού εντατικών μεγεθών στην περιοχή θεμελίωσης με αποκλίσεις που δεν υπερβαίνουν το ±20%, με εξαίρεση την τιμή της ροπής M_2 η οποία όμως σε κάθε περίπτωση είναι πιο κοντά στη λύση αναφοράς από τις αντίστοιχες τιμές των υπολοίπων εξεταζόμενων προσομοιωμάτων. Από τα υπόλοιπα προσομοιώματα, το προσομοίωμα του Pasternak εμφανίζεται ως το αμέσως μετά το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων αποδοτικότερο προσομοίωμα, στην πλειονότητα των εξεταζόμενων περιπτώσεων. Τέλος, τα προσομοιώματα των Vlasov και Winkler είναι τα λιγότερο αποδοτικά, χωρίς να παρατηρείται συστηματικά υπεροχή του ενός έναντι του άλλου.

Επίλυση πλαισίου Π2

Τα γεωμετρικά δεδομένα, και τα δεδομένα φόρτισης του πλαισίου Π2 δίνονται αναλυτικά στο σχήμα 5.63β. Το πλαίσιο αυτό αποτελεί τμήμα ενός συμμετρικού χωρικού φορέα, η θεμελίωση του οποίου αποτελείται από πέδιλα και συνδετήριες δοκούς. Η επιλογή μικρότερου ανοίγματος ζυγώματος, έγινε προκειμένου να επιτευχθούν ακόμα χαμηλότερες τιμές για το συντελεστή σχετικής δυσκαμψίας εδάφους / δοκού λ (Σχέση 2.134), απ' ότι στην περίπτωση του πλαισίου Π1. Έτσι, με βάση τα γεωμετρικά και ελαστικά χαρακτηριστικά της θεμελιοδοκού και των τύπων εδαφών που εξετάστηκαν, προκύπτουν οι παρακάτω τιμές:

- Έδαφος Ε1: λ=0,35.
- Έδαφος Ε2: λ=0,40.
- Έδαφος Ε4: λ=0,70.

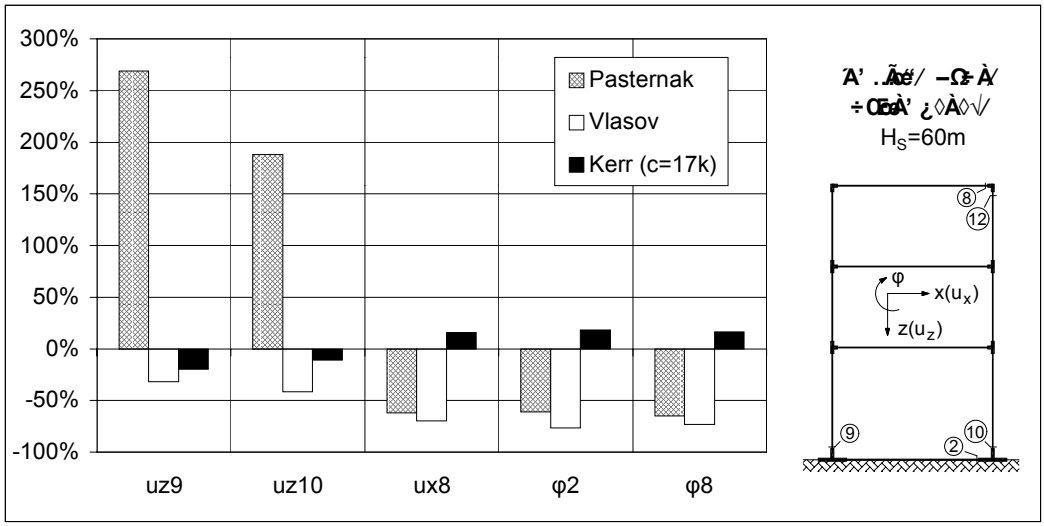
Οι δύο πρώτες αντιστοιχούν – με βάση τα κριτήρια των Vlasov και Leont'ev (1960) – σε πρακτικώς άκαμπτες δοκούς, ενώ η τρίτη σε δοκό πεπερασμένου μήκους. Επιπλέον, η τιμή λ=0,70 «γεφυρώνει» το χάσμα μεταξύ των τιμών λ=0,52 και λ=0,93 που εξετάστηκαν κατά την επίλυση του πλαισίου Π1.

Όπως τονίστηκε και στην γενική εκφώνηση του παραδείγματος, η παρουσίαση των αποτελεσμάτων των αναλύσεων του πλαισίου Π2 θα είναι πιο συνοπτική, και προσανατολισμένη προς την εκτίμηση των εξαγομένων σε συνδυασμό με τα εξαγόμενα από την ανάλυση του πλαισίου Π1. Για το λόγο αυτό, θα παρουσιαστούν μόνον οι πίνακες και τα σχήματα που αφορούν τις συγκρίσεις των μεγεθών μετακίνησης και έντασης των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων. Όσον αφορά τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την παραμετρική διερεύνηση των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης, θα παρουσιαστούν συνοπτικά τα αποτελέσματα χωρίς την αναλυτική παράθεση των σχετικών διαγραμμάτων.

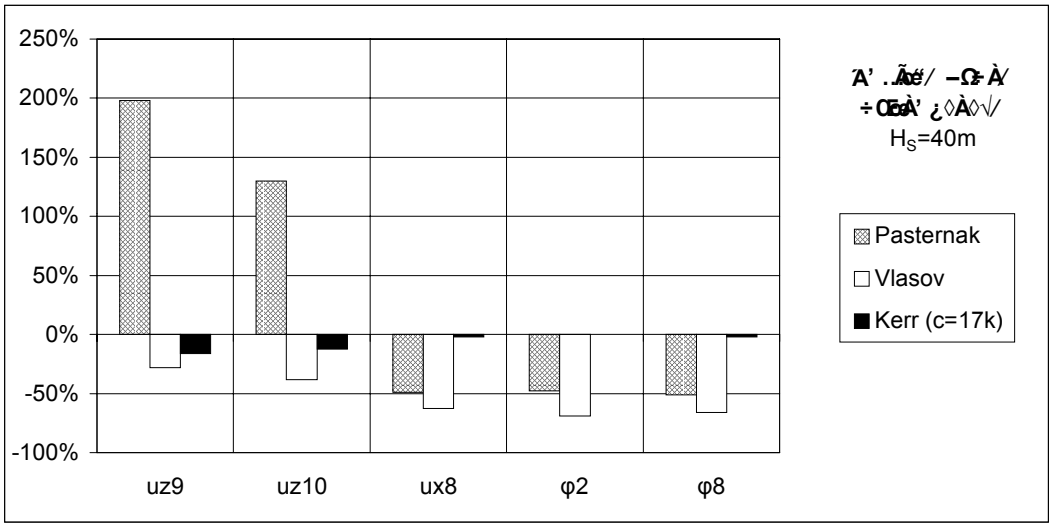
Στους πίνακες 5.23 – 5.25 και στα σχήματα 5.79 – 5.81, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των συγκρίσεων των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων, με τα αποτελέσματα του προσομοιώματος αναφοράς, όσον αφορά τα μεγέθη μετακίνησης. Για το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων έγινε χρήση της τιμής n_{ck}=17 για τον συντελεστή συσχέτισης. Η τιμή αυτή χρησιμοποιήθηκε, διότι όπως αποδείχθηκε κατά την ανάλυση του πλαισίου Π1 που προηγήθηκε, απέδωσε τα κατά μέσον όρο καλύτερα αποτελέσματα για τα ελεγχόμενα μεγέθη μετακίνησης ανεξαρτήτως του τύπου του εδάφους και του βάθους του ελαστικού υποβάθρου. Υπενθυμίζεται ότι η τιμή αυτή είχε αποδώσει στην περίπτωση της ανάλυσης του πλαισίου Π1, αποτελέσματα που δεν αποκλίνουν περισσότερο από ±20% από τη λύση αναφοράς, με εξαίρεση την περίπτωση μελέτης υποστρώματος που συνίσταται από πυκνή Άμμο (Πίνακας 5.14), κατά την οποία οι αποκλίσεις των στροφών φ_2, φ_8 είναι σημαντικά μεγαλύτερες. Και στην παρούσα περίπτωση, όπως θα αποδειχθεί παρακάτω, η τιμή n_{ck}=17 εξακολουθεί να αποδίδει αποτελέσματα που στην πλειονότητα των περιπτώσεων δεν αποκλίνουν περισσότερο από ±20% από την λύση αναφοράς. Εξαίρεση αποτελούν, οι αποδιδόμενες αποκλίσεις για τις στροφές φ_2, φ_8 οι οποίες σε μεμονωμένες περιπτώσεις, που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις σκληρής Αργίλου και πυκνής Άμμου, πλησιάζουν το 30% (βλέπε Πίνακες 5.24 και 5.25). Ωστόσο, οι συγκεκριμένες αποκλίσεις είναι κατά πολύ μικρότερες από τις αντίστοιχες που προέκυψαν κατά την επίλυση του πλαισίου Π1 (Βλέπε Πίνακες 5.14 και 5.25).

Πίνακας 5.23. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προς εξέταση προσομοιωμάτων όσον αφορά τα επιλεγμένα μεγέθη μετακίνησης του πλαισίου Π2. Περίπτωση Αργίλου μέσης σκληρότητας.

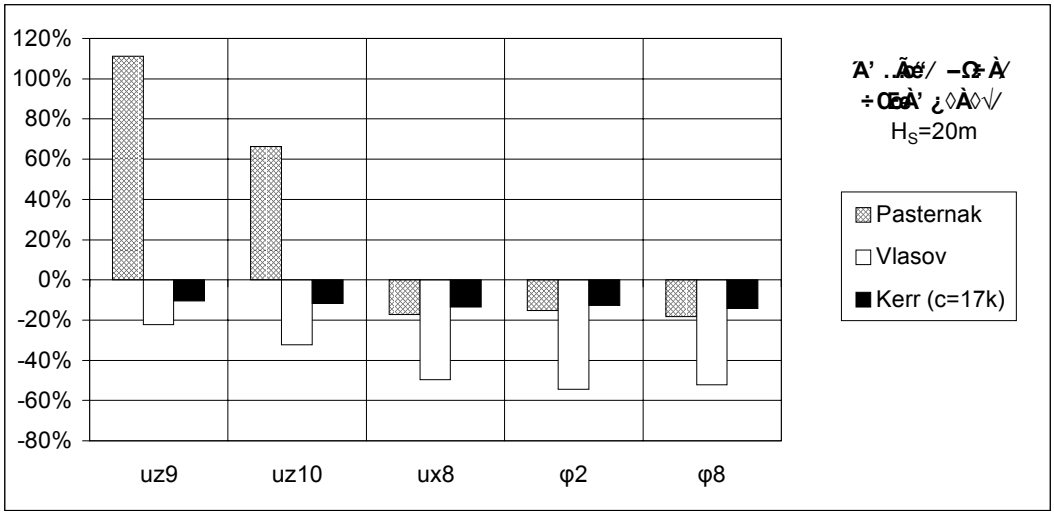
		Απόλυτες τιμές				
		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=17k)
H_s=60m	u_{z9}	0,141	0,191	0,519	0,096	0,113
	u_{z10}	0,186	0,863	0,535	0,108	0,165
	u_{x8}	0,085	1,226	0,032	0,026	0,098
	φ_2	0,0083	0,123	0,003	0,002	0,010
	φ_8	0,0081	0,1222	0,0028	0,0022	0,0094
H_s=40m	u_{z9}	0,1189	0,1324	0,3546	0,0856	0,0998
	u_{z10}	0,1637	0,5990	0,3768	0,1012	0,1437
	u_{x8}	0,0846	0,8514	0,0434	0,0315	0,0830
	φ_2	0,0082	0,0852	0,0043	0,0026	0,0082
	φ_8	0,0081	0,0847	0,0039	0,0028	0,0079
H_s=20m	u_{z9}	0,083	0,070	0,175	0,064	0,074
	u_{z10}	0,127	0,316	0,211	0,086	0,112
	u_{x8}	0,083	0,450	0,069	0,042	0,072
	φ_2	0,0081	0,045	0,007	0,004	0,007
	φ_8	0,0079	0,0446	0,0065	0,0038	0,0068
		Αποκλίσεις				
H_s=60m	u_{z9}	35,61%	268,88%	-31,79%	-19,61%	
	u_{z10}	365,00%	188,20%	-41,66%	-10,92%	
	u_{x8}	1344,46%	-61,93%	-69,86%	15,70%	
	φ_2	1382,56%	-61,14%	-76,49%	18,37%	
	φ_8	1412,06%	-65,12%	-73,29%	16,38%	
H_s=40m	u_{z9}	11,38%	198,25%	-28,03%	-16,07%	
	u_{z10}	265,86%	130,13%	-38,19%	-12,22%	
	u_{x8}	906,18%	-48,72%	-62,74%	-1,91%	
	φ_2	933,48%	-47,47%	-68,72%	-0,01%	
	φ_8	952,50%	-51,23%	-65,79%	-2,04%	
H_s=20m	u_{z9}	-15,47%	111,33%	-22,18%	-10,57%	
	u_{z10}	148,99%	66,31%	-32,42%	-11,77%	
	u_{x8}	439,98%	-17,33%	-49,68%	-13,46%	
	φ_2	454,27%	-15,21%	-54,29%	-12,85%	
	φ_8	462,81%	-18,26%	-52,13%	-14,16%	



(α)



(β)

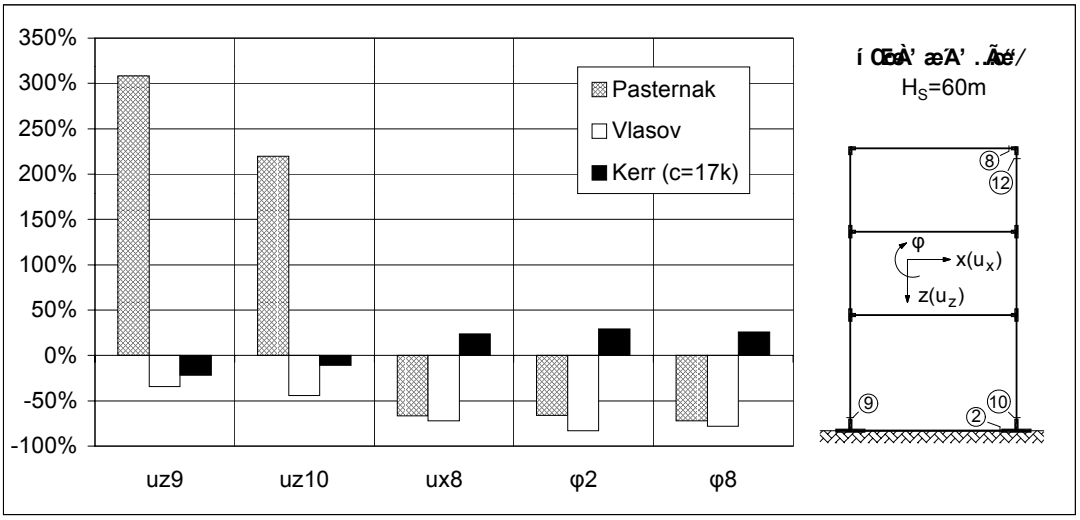


(γ)

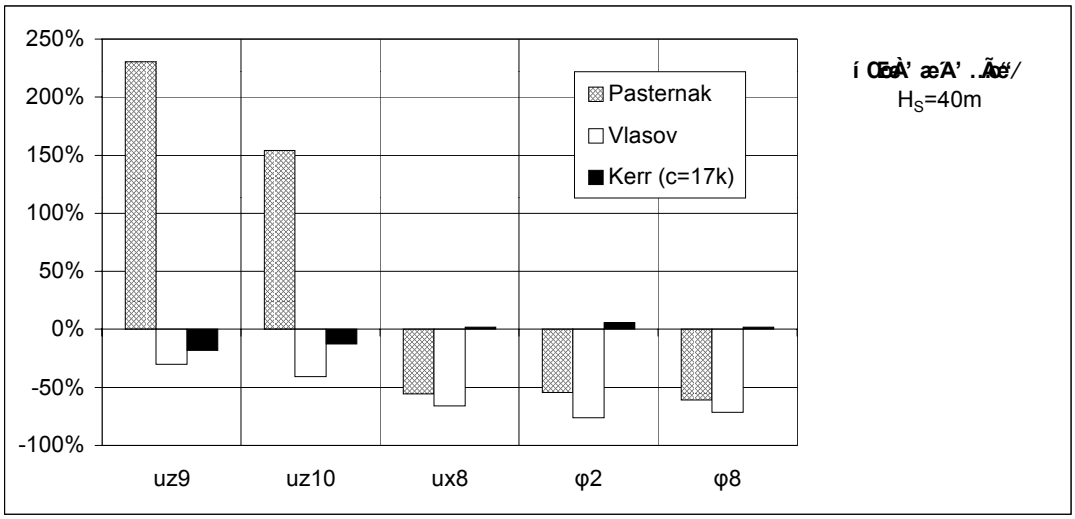
Σχήμα 5.79. Διάγραμμα αποκλίσεων των εξεταζόμενων εδαφικών προσομοιωμάτων από το προσομοίωμα αναφοράς, όσον αφορά τα μεγέθη μετακίνησης. Άργιλος μέσης σκληρότητας – Πλαίσιο Π2.

Πίνακας 5.24. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προς εξέταση προσομοιωμάτων όσον αφορά τα επιλεγμένα μεγέθη μετακίνησης του πλαισίου Π2. Περίπτωση Σκληρής Αργίλου.

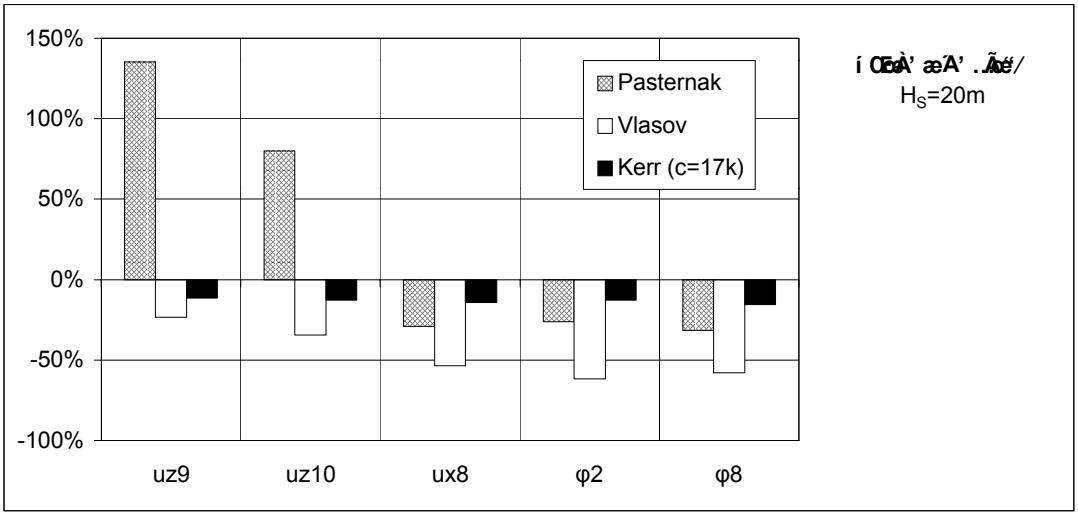
		Απόλυτες τιμές				
		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=17k)
H_s=60m	u_{z9}	0,088	0,132	0,361	0,058	0,069
	u_{z10}	0,115	0,597	0,369	0,064	0,103
	u_{x8}	0,052	0,849	0,017	0,015	0,065
	φ_2	0,0050	0,085	0,002	0,001	0,006
	φ_8	0,0048	0,0845	0,0013	0,0011	0,0060
H_s=40m	u_{z9}	0,0752	0,0920	0,2484	0,0526	0,0616
	u_{z10}	0,1021	0,4158	0,2593	0,0606	0,0891
	u_{x8}	0,0520	0,5919	0,0229	0,0177	0,0530
	φ_2	0,0050	0,0592	0,0023	0,0012	0,0053
	φ_8	0,0048	0,0588	0,0019	0,0014	0,0049
H_s=20m	u_{z9}	0,053	0,049	0,125	0,041	0,047
	u_{z10}	0,080	0,220	0,144	0,052	0,070
	u_{x8}	0,051	0,315	0,036	0,024	0,044
	φ_2	0,0049	0,032	0,004	0,002	0,004
	φ_8	0,0047	0,0311	0,0032	0,0020	0,0040
		Αποκλίσεις				
H_s=60m	u_{z9}	49,53%	308,42%	-34,24%	-21,85%	
	u_{z10}	418,17%	219,74%	-44,18%	-10,83%	
	u_{x8}	1529,18%	-66,59%	-72,16%	23,85%	
	φ_2	1601,65%	-65,89%	-83,06%	28,93%	
	φ_8	1659,99%	-72,32%	-78,09%	25,79%	
H_s=40m	u_{z9}	22,33%	230,38%	-30,06%	-18,05%	
	u_{z10}	307,41%	154,08%	-40,58%	-12,74%	
	u_{x8}	1038,73%	-55,86%	-65,86%	2,04%	
	φ_2	1088,89%	-54,48%	-76,04%	5,59%	
	φ_8	1127,02%	-60,72%	-71,30%	2,07%	
H_s=20m	u_{z9}	-8,41%	135,26%	-23,25%	-11,31%	
	u_{z10}	176,08%	80,07%	-34,45%	-12,58%	
	u_{x8}	514,16%	-29,03%	-53,54%	-14,15%	
	φ_2	540,81%	-26,25%	-61,83%	-12,78%	
	φ_8	558,81%	-31,62%	-57,98%	-15,42%	



(α)



(β)

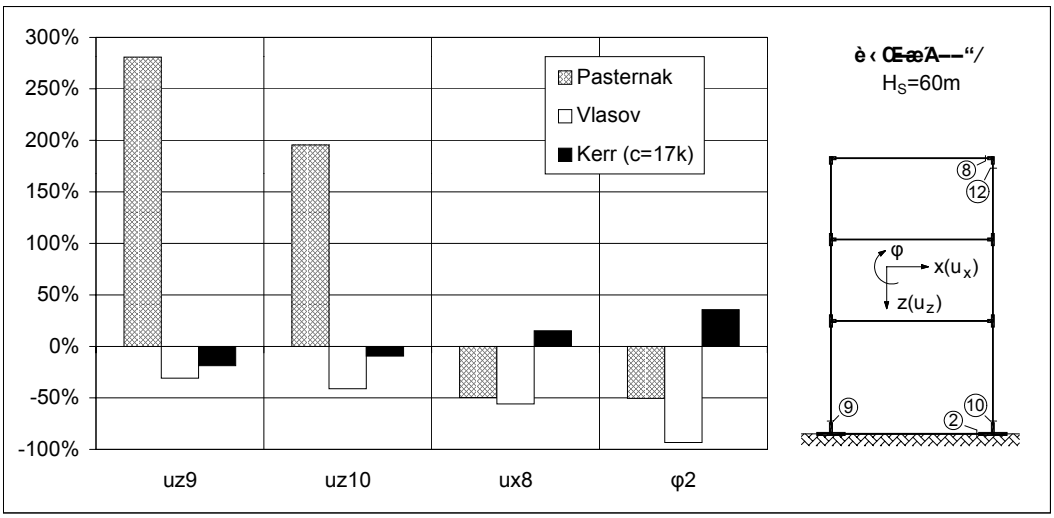


(γ)

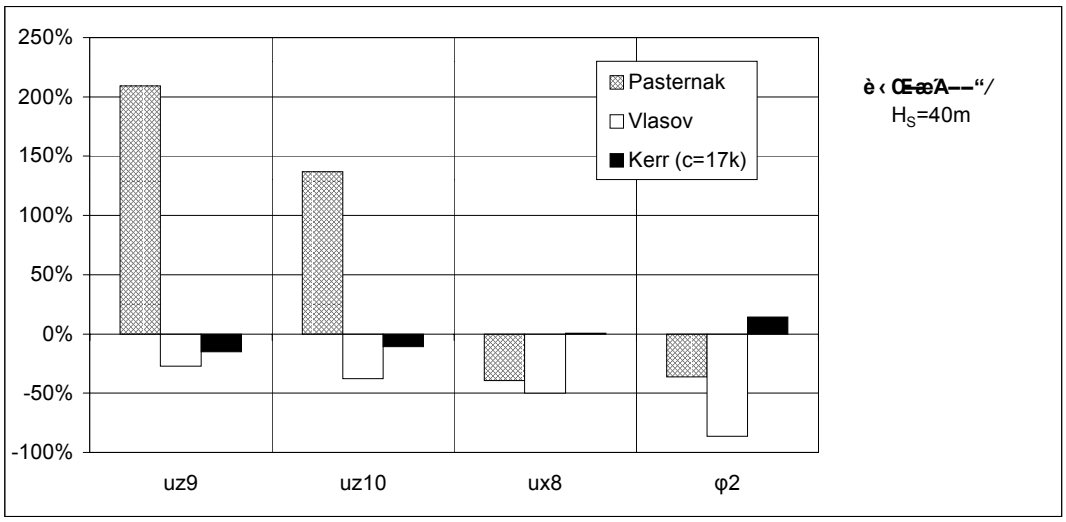
Σχήμα 5.80. Διάγραμμα αποκλίσεων των εξεταζόμενων εδαφικών προσομοιωμάτων από το προσομοίωμα αναφοράς, όσον αφορά τα μεγέθη μετακίνησης. Σκληρή Άργιλος – Πλαίσιο Π2.

Πίνακας 5.25. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προς εξέταση προσομοιωμάτων όσον αφορά τα επιλεγμένα μεγέθη μετακίνησης του πλαισίου Π2. Περίπτωση πυκνής Άμμου.

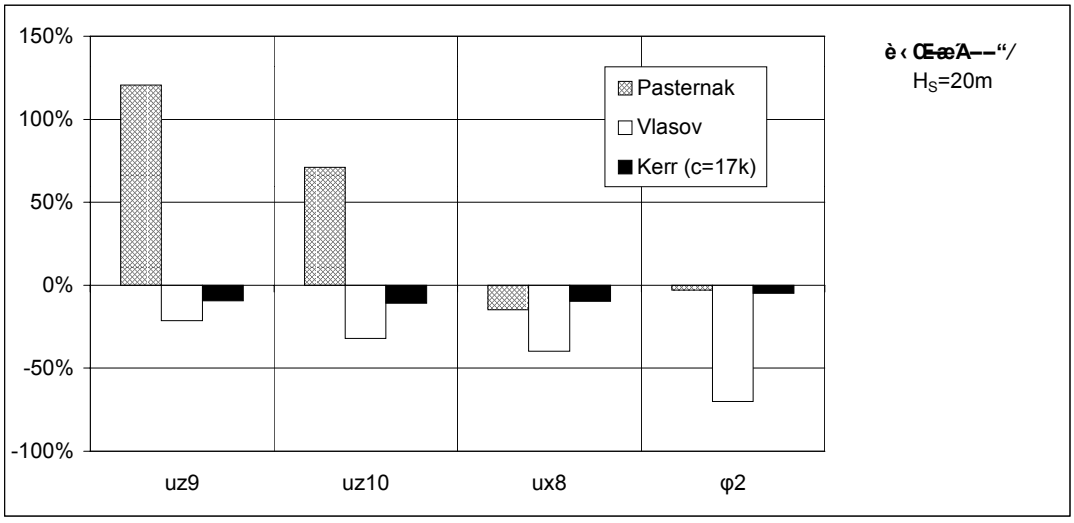
		Απόλυτες τιμές				
		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=17k)
H_s=60m	u_{z9}	0,038	0,051	0,144	0,026	0,031
	u_{z10}	0,050	0,242	0,148	0,029	0,045
	u_{x8}	0,030	0,355	0,015	0,013	0,034
	φ_2	2,380E-03	0,035	0,001	0,000	0,003
	φ_8	2,08E-03	0,0346	0,0006	0,0005	0,0025
H_s=40m	u_{z9}	0,03197	0,0354	0,0989	0,0233	0,0271
	u_{z10}	0,04425	0,1686	0,1048	0,0275	0,0394
	u_{x8}	0,02944	0,2494	0,0179	0,0147	0,0296
	φ_2	2,38E-03	0,0249	0,0015	0,0003	0,0027
	φ_8	2,07E-03	0,0240	0,0009	0,0006	0,0021
H_s=20m	u_{z9}	0,022	0,019	0,049	0,018	0,020
	u_{z10}	0,034	0,089	0,059	0,023	0,031
	u_{x8}	0,029	0,135	0,025	0,018	0,026
	φ_2	2,350E-03	0,013	0,002	0,001	0,002
	φ_8	2,04E-03	0,0126	0,0016	0,0009	0,0017
		Αποκλίσεις				
H_s=60m	u_{z9}	33,89%	280,72%	-30,91%	-18,77%	
	u_{z10}	382,67%	195,69%	-41,27%	-9,36%	
	u_{x8}	1102,68%	-49,42%	-55,58%	15,10%	
	φ_2	1389,56%	-50,54%	-93,36%	35,76%	
	φ_8	1563,29%	-70,48%	-78,24%	20,46%	
H_s=40m	u_{z9}	10,64%	209,20%	-27,03%	-15,11%	
	u_{z10}	281,00%	136,76%	-37,80%	-10,85%	
	u_{x8}	747,27%	-39,29%	-50,05%	0,45%	
	φ_2	946,34%	-36,14%	-86,41%	14,36%	
	φ_8	1061,79%	-56,20%	-70,43%	-0,07%	
H_s=20m	u_{z9}	-15,23%	120,46%	-21,15%	-9,44%	
	u_{z10}	159,76%	71,14%	-32,12%	-10,72%	
	u_{x8}	364,88%	-14,87%	-39,67%	-9,68%	
	φ_2	473,56%	-2,98%	-70,02%	-4,75%	
	φ_8	519,06%	-21,93%	-56,13%	-14,49%	



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 5.81. Διάγραμμα αποκλίσεων των εξεταζόμενων εδαφικών προσομοιωμάτων από το προσομοίωμα αναφοράς, όσον αφορά τα μεγέθη μετακίνησης. Πυκνή Άμμος – Πλαίσιο Π2.

Όσον αφορά την απόδοση των υπολοίπων προσομοιωμάτων, μπορούν να τονιστούν τα ακόλουθα.

Άργιλος μέσης σκληρότητας

- Στην περίπτωση που το βάθος του ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 60 μέτρα (Πίνακας 5.23), το προσομοίωμα του Vlasov αποδίδει μαζί με το προσομοίωμα του Pasternak τις καλύτερες τιμές, αν εξαιρεθεί το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων. Πιο συγκεκριμένα, το προσομοίωμα του Vlasov αποδίδει πολύ καλύτερα τις κατακόρυφες μετακινήσεις u_{z9}, u_{z10} (αποκλίσεις της τάξης του –35%), καθώς για τα μεγέθη αυτά το προσομοίωμα του Pasternak αποδίδει αποκλίσεις που υπερβαίνουν το 180%. Η εικόνα αλλάζει για τα υπόλοιπα μεγέθη που ελέχθησαν καθώς υπερτερεί, ελαφρά όμως, το προσομοίωμα του Pasternak. Τέλος, το προσομοίωμα του Winkler αστοχεί τελείως στην προσέγγιση των ελεγχόμενων μεγεθών μετακίνησης, και μάλιστα οι αποκλίσεις που αποδίδει ξεπερνούν το 1300%. Σε γενικές γραμμές η εικόνα που παρουσιάζουν τα αποτελέσματα όλων των προσομοιωμάτων δεν διαφέρουν ουσιαστικά από τα αντίστοιχα αποτελέσματα του πλαισίου Π1.
- Για την περίπτωση που το βάθος του ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 40 μέτρα, η γενική εικόνα των αποτελεσμάτων δεν διαφέρει ουσιαστικά ούτε από την περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος 60 μέτρα, ούτε και από την αντίστοιχη επίλυση του πλαισίου Π1.
- Τέλος όταν το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος 20 μέτρα, το προσομοίωμα του Pasternak εμφανίζεται ελαφρά κατώτερο από το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων όσον αφορά τα μεγέθη u_{x8}, φ_2 και φ_8, αλλά υστερεί σημαντικά στα υπόλοιπα. Το προσομοίωμα του Vlasov παρουσιάζει μια σταθερή εικόνα που είναι ανάλογη των δυο προηγουμένων περιπτώσεων, ενώ το προσομοίωμα του Winkler εξακολουθεί να αποδίδει με μεγάλη διαφορά τα χειρότερα αποτελέσματα.

Σκληρή Άργιλος

Στην περίπτωση αυτή, τα αποτελέσματα δεν διαφέρουν ουσιαστικά από τα αντίστοιχα αποτελέσματα της επίλυσης του πλαισίου Π1, ούτε όσον αφορά την ιεράρχηση των προσομοιωμάτων με βάση τις επιδόσεις τους, ούτε όσον αφορά το εύρος των αποκλίσεων (Βλέπε Πίνακες 5.13 και 5.24). Το μόνο ίσως που θα άξιζε να αναφερθεί, είναι η μικρή αύξηση των αποκλίσεων αυτών γενικά για όλα τα προσομοιώματα.

Πυκνή Άμμος

Η μόνη ουσιαστική διαφορά από τα αντίστοιχα αποτελέσματα του πλαισίου Π1, είναι ότι στην παρούσα περίπτωση όλα τα προσομοιώματα επιτυγχάνουν πολύ καλύτερη σύγκλιση όσον αφορά την τιμή της στροφής φ_8 (Βλέπε Πίνακες 5.14 και 5.25). Ενδεικτικά αναφέρεται, ότι η απόκλιση που αποδίδει το προσομοίωμα του Vlasov όταν το ελαστικό υπόβαθρο έχει βάθος 60 μέτρα, είναι στην παρούσα περίπτωση ίση με –78% ενώ στην περίπτωση του πλαισίου Π1 είναι –1200%. Πρόκειται βέβαια για μια επίσης σημαντική απόκλιση, αλλά αξίζει να καταγραφεί η διαφοροποίηση μεταξύ των επιλύσεων των πλαισίων Π1 και Π2. Τέλος θα πρέπει να τονιστεί, ότι και στην παρούσα περίπτωση παρατηρείται μια ελαφρά αύξηση των αποκλίσεων όλων των προσομοιωμάτων για τα υπόλοιπα μεγέθη μετακίνησης, έναντι των αποκλίσεων που προκύπτουν από την επίλυση του πλαισίου Π1, με ορισμένες βέβαια εξαιρέσεις. Οι εξαιρέσεις αυτές, αφορούν την περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει πάχος 20 μέτρα.

Κλείνοντας την αναφορά στα αποτελέσματα που αφορούν τα μεγέθη μετακίνησης, θα γίνει μια σύνοψη των αποτελεσμάτων της διερεύνησης των συντελεστών συσχέτισης μέσω των οποίων επιτυγχάνεται η βέλτιστη σύγκλιση των μεγεθών που ελέχθησαν κατά την επίλυση του πλαισίου Π2. Τα αποτελέσματα της διερεύνησης αυτής, είναι συγκεντρωμένα στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 5.26. Τιμές του συντελεστή συσχέτισης n_{ck} για τις οποίες επιτυγχάνεται η βέλτιστη σύγκλιση των τιμών των εξεταζόμενων μεγεθών μετακίνησης προς την λύση αναφοράς, κατά περίπτωση κατηγορίας εδάφους και βάθους του υποβάθρου θεμελίωσης του πλαισίου Π2.

	Άργιλος μέσης σκληρότητας (Ε1)			Σκληρή Άργιλος (Ε2)			Πυκνή Άμμος (Ε4)		
	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m
u_{z9}	5	5	6	5	5	6	5	5	7
u_{z10}	12	11	12	12	11	10	13	12	10
u_{x8}	21	16	10	23	18	12	22	17	12
φ_2	22	17	12	24	18	13	28	22	15
φ_8	21	16	12	23	18	12	22	17	12

Από την παράλληλη μελέτη των Πινάκων 5.15 και 5.26, προκύπτει ότι σε γενικές γραμμές τα συμπεράσματα είναι ίδια με αυτά που καταγράφηκαν και κατά την αντίστοιχη διερεύνηση που πραγματοποιήθηκε για το πλαίσιο Π1. Οι μόνες διαφορές που θα μπορούσαν ενδεχομένως να αναφερθούν, είναι αφενός η μείωση των τιμών του συντελεστή n_{ck} για τις οποίες επιτυγχάνεται η βέλτιστη σύγκλιση της κατακόρυφης μετακίνησης u_{z9}, και αφετέρου το γεγονός ότι η περίπτωση της πυκνής Άμμου δεν διαφέρει σημαντικά από τις περιπτώσεις των αργιλικών εδαφών όπως παρατηρήθηκε κατά την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων του πλαισίου Π1.

Τα συμπεράσματα που καταγράφηκαν παραπάνω, μπορούν να συνοψιστούν στα εξής σημεία:

- **Η τιμή n_{ck}=17 εξακολουθεί να προσδίδει στο προσομοίωμα των τριών παραμέτρων σαφή υπεροχή έναντι όλων των υπολοίπων, και κατά την επίλυση του πλαισίου Π2,**
- **Δεν εμφανίζεται ουσιαστική διαφοροποίηση από την επίλυση του πλαισίου Π1 όσον αφορά την ιεράρχηση των προσομοιωμάτων με βάση της αποδοτικότητα τους,**
- **Παρατηρείται σε γενικές γραμμές, μια μικρή αύξηση των αποκλίσεων των προσομοιωμάτων με εξαίρεση τις αποκλίσεις που αποδίδει το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων,**
- **Δεν παρατηρούνται οι υπερβολικά μεγάλες αποκλίσεις που παρατηρήθηκαν κατά την επίλυση του πλαισίου Π1 όσον αφορά την τιμή της στροφής του δεξιού κόμβου του ζυγώματος του τελευταίου ορόφου του πλαισίου (στροφή φ_8) όταν το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώμα πυκνής Άμμου.**
- **Λαμβάνοντας για τον συντελεστή συσχέτισης n_{ck} τιμές από το διάστημα 16 – 22, επιτυγχάνονται αποκλίσεις που δεν υπερβαίνουν το ±22% για κανένα από τα ελεγχόμενα μεγέθη μετακίνησης για τα αργιλικά εδάφη Ε1 και Ε2. Για το αμμώδες έδαφος Ε4, το αντίστοιχο διάστημα είναι 20 – 25.**

Η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων που αφορούν τα εντατικά μεγέθη ξεκινά, όπως και στην περίπτωση της επίλυσης του πλαισίου Π1, με τα αποτελέσματα της διαδικασίας εξεύρεσης των βέλτιστων πεδίων τιμών του συντελεστή συσχέτισης για τα εντατικά μεγέθη που αναπτύσσονται στην περιοχή της θεμελίωσης του πλαισίου. Τα αποτελέσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 5.27. Πεδία των βέλτιστων τιμών του συντελεστή συσχέτισης όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π2 στην περιοχή της θεμελίωσης (μεγέθη M_9, M_{10}, V_2, V_{10}), ανά κατηγορία εδάφους και βάθους του ελαστικού υποβάθρου.

Μέγιστη απόκλιση	**Άργιλος μέσης σκληρότητας**			**Σκληρή Άργιλος**			**Πυκνή Άμμος**		
	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m
<±15%	85 - 110	46 - 63	19 - 27	115- 140	61 – 81	23 - 33	77 – 97	45 – 56	19 – 25
<±20%	77 - 115	44 - 67	18 - 29	109- 145	57 – 86	22 - 36	74 – 100	42 – 59	18 – 26
<±25%	75 - 121	42 - 70	17 - 31	98- 160	54 – 90	21 - 37	71 – 104	41 – 61	17 – 27

Στον παραπάνω πίνακα δεν λαμβάνεται υπόψη η ροπή που αναπτύσσεται στο άκρο της δοκού θεμελίωσης (ροπή M_2). Όπως και στην περίπτωση της επίλυσης του πλαισίου Π1, αποδείχθηκε ότι το συγκεκριμένο εντατικό μέγεθος παρουσιάζει τις μικρότερες του αποκλίσεις εκτός των πεδίων τιμών του συντελεστή συσχέτισης που δίνονται στον παραπάνω πίνακα.

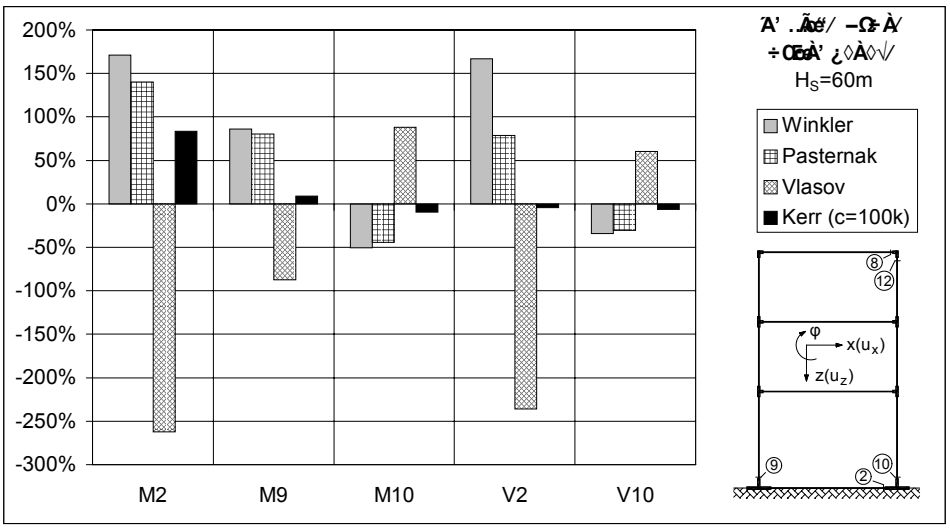
Από τη μελέτη του πίνακα 5.27 σε συνδυασμό με τον πίνακα 5.16, προκύπτει ότι σε γενικές γραμμές δεν υπάρχουν ουσιαστικές διαφορές μεταξύ των περιπτώσεων επίλυσης των πλαισίων Π1 και Π2. Έτσι, ενώ δεν υπάρχει δυνατότητα ορισμού κοινής περιοχής βέλτιστων τιμών του συντελεστή συσχέτισης για κάθε κατηγορία εδάφους και ανεξαρτήτως του βάθους του ελαστικού υποβάθρου, υπάρχει δυνατότητα ορισμού κοινής περιοχής τιμών για κάθε βάθος του ελαστικού υποβάθρου ξεχωριστά. Εξαίρεση αποτελεί το γεγονός, ότι στην παρούσα περίπτωση δεν υπάρχει δυνατότητα ορισμού κοινών πεδίων τιμών του συντελεστή n_{ck} για τις οποίες επιτυγχάνεται σύγκλιση μικρότερη του ±20%, όταν το βάθος του ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 60 μέτρα. Για το συγκεκριμένο βάθος του ελαστικού υποβάθρου, ορίζεται κοινή περιοχή βέλτιστων τιμών με κριτήριο τη μη υπέρβαση του ±25%. Αντίθετα για μικρότερα βάθη του ελαστικού υποβάθρου, ορίζονται κοινά πεδία βέλτιστων τιμών και με κριτήριο τη μη υπέρβαση του ±20%. Οι βέλτιστες περιοχές τιμών του συντελεστή συσχέτισης για την παρούσα περίπτωση είναι:

– H_S= 60m: n_{ck}= 98 – 104 (Κριτήριο μη υπέρβασης του ±25%)
– H_S= 40m: n_{ck}= 57 – 59 (Κριτήριο μη υπέρβασης του ±20%)
  n_{ck}= 54 – 61 (Κριτήριο μη υπέρβασης του ±25%)
– H_S= 20m: n_{ck}= 23 – 25 (Κριτήριο μη υπέρβασης του ±15%)
  n_{ck}= 22 – 26 (Κριτήριο μη υπέρβασης του ±20%)
  n_{ck}= 21 – 27 (Κριτήριο μη υπέρβασης του ±25%)

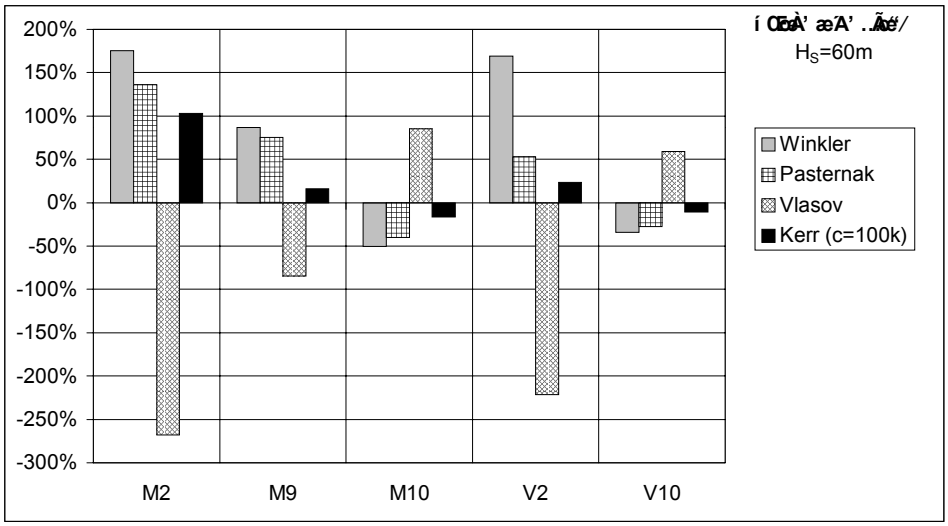
Κάνοντας χρήση των τιμών που βρίσκονται στο μέσον των παραπάνω διαστημάτων, δηλαδή n_{ck}=100 για H_S=60m, n_{ck}=60 για H_S=40m και n_{ck}=24 για H_S=20m, θα γίνουν συγκρίσεις με τα υπόλοιπα προσομοιώματα.

Πίνακας 5.28. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προσομοιωμάτων όσον αφορά τα ελεγχόμενα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π2. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

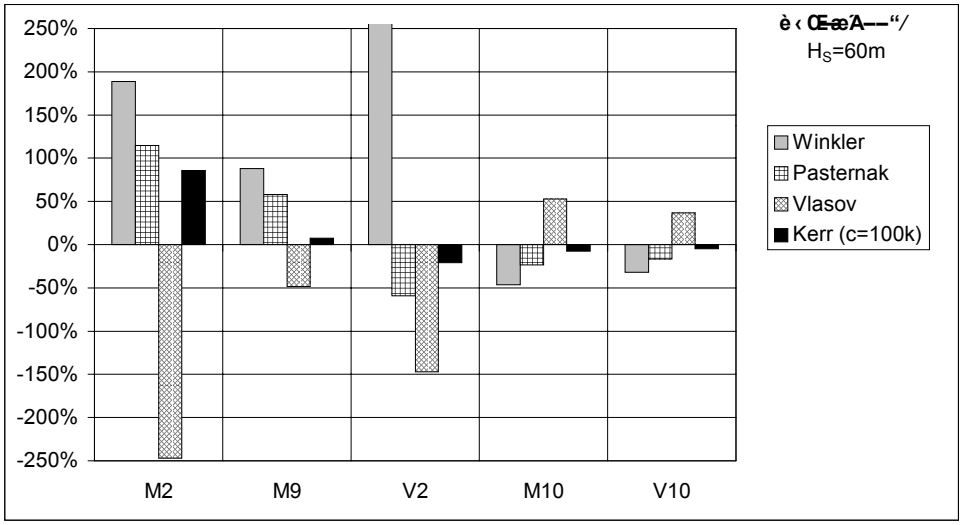
Απόλυτες τιμές						
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=100k)
E1	M_2	-21,43	-58,12	-51,41	34,75	-39,32
	M_8	-23,85	-23,52	-23,55	-24,42	-23,79
	M_9	-33,58	-62,44	-60,50	-4,31	-36,55
	M_{10}	35,15	17,47	19,52	66,05	31,82
	M_{12}	-24,43	-24,21	-24,24	-24,81	-24,39
	V_2	18,16	48,44	32,40	-24,71	17,37
	V_{10}	21,75	14,35	15,12	34,90	20,41
	V_{12}	17,92	17,52	17,56	18,64	17,85
E2	M_2	-21,10	-58,11	-49,79	35,51	-42,87
	M_8	-23,85	-23,52	-23,58	-24,41	-23,75
	M_9	-33,45	-62,44	-58,57	-5,08	-38,79
	M_{10}	35,29	17,48	21,15	65,43	29,52
	M_{12}	-24,43	-24,21	-24,26	-24,80	-24,36
	V_2	18,00	48,42	27,49	-21,88	22,21
	V_{10}	21,81	14,36	15,81	34,63	19,44
	V_{12}	17,93	17,52	17,60	18,63	17,80
E4	M_2	-44,47	-128,28	-95,54	65,20	-82,73
	M_8	-49,56	-48,83	-49,19	-50,41	-49,45
	M_9	-73,98	-138,95	-116,87	-38,15	-79,51
	M_{10}	85,95	46,15	65,87	131,16	79,69
	M_{12}	-50,19	-49,71	-49,94	-50,74	-50,12
	V_2	26,30	94,98	10,71	-12,37	20,81
	V_{10}	51,73	35,10	43,15	70,87	49,22
	V_{12}	37,02	36,11	36,55	38,07	36,88
Αποκλίσεις						
	Προσομοίωμα:		Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=100k)
E1	M_2		171,19%	139,88%	-262,16%	83,48%
	M_8		-1,38%	-1,24%	2,41%	-0,26%
	M_9		85,96%	80,17%	-87,15%	8,86%
	M_{10}		-50,29%	-44,46%	87,91%	-9,49%
	M_{12}		-0,88%	-0,80%	1,55%	-0,17%
	V_2		166,72%	78,42%	-236,05%	-4,33%
	V_{10}		-34,00%	-30,47%	60,44%	-6,18%
	V_{12}		-2,24%	-2,00%	4,04%	-0,39%
E2	M_2		175,40%	135,97%	-268,28%	103,18%
	M_8		-1,38%	-1,11%	2,36%	-0,44%
	M_9		86,66%	75,09%	-84,82%	15,96%
	M_{10}		-50,47%	-40,06%	85,40%	-16,34%
	M_{12}		-0,88%	-0,72%	1,51%	-0,28%
	V_2		169,02%	52,73%	-221,55%	23,41%
	V_{10}		-34,17%	-27,51%	58,78%	-10,86%
	V_{12}		-2,29%	-1,85%	3,90%	-0,74%
E4	M_2		188,48%	114,83%	-246,62%	86,03%
	M_8		-1,46%	-0,75%	1,71%	-0,21%
	M_9		87,82%	57,97%	-48,43%	7,48%
	M_{10}		-46,30%	-23,36%	52,60%	-7,28%
	M_{12}		-0,95%	-0,50%	1,10%	-0,14%
	V_2		261,14%	-59,26%	-147,05%	-20,89%
	V_{10}		-32,15%	-16,59%	37,00%	-4,86%
	V_{12}		-2,47%	-1,28%	2,82%	-0,38%



(α)



(β)



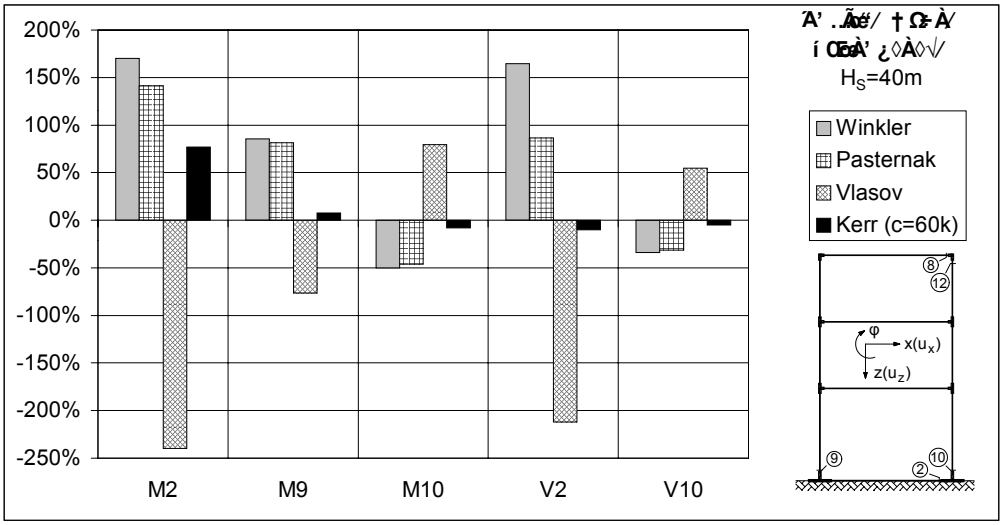
(γ)

Σχήμα 5.82. Αποκλίσεις των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π2, για όλες τις εξεταζόμενες κατηγορίες εδάφους. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

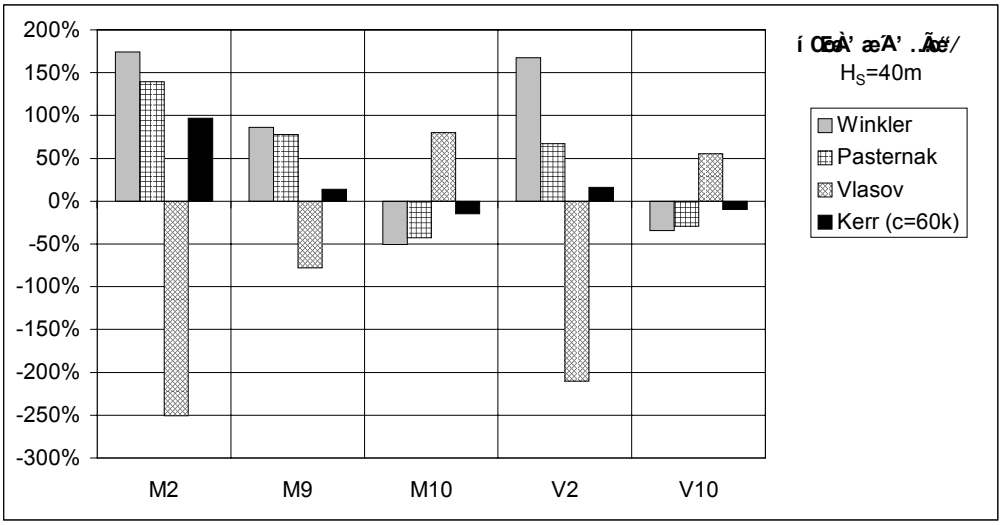
Πίνακας 5.29. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προσομοιωμάτων όσον αφορά τα ελεγχόμενα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π2. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=40m.

Απόλυτες τιμές						
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=60k)
E1	M_2	-21,53	-58,11	-51,99	30,15	-38,06
	M_8	-23,84	-23,52	-23,55	-24,37	-23,80
	M_9	-33,66	-62,44	-61,08	-8,02	-36,15
	M_{10}	35,08	17,48	19,02	63,03	32,25
	M_{12}	-24,43	-24,21	-24,23	-24,77	-24,39
	V_2	18,29	48,42	34,12	-20,49	16,43
	V_{10}	21,72	14,36	14,91	33,60	20,58
	V_{12}	17,92	17,52	17,55	18,57	17,86
E2	M_2	-21,18	-58,10	-50,73	31,91	-41,71
	M_8	-23,85	-23,52	-23,57	-24,38	-23,76
	M_9	-33,52	-62,43	-59,61	-7,45	-38,26
	M_{10}	35,22	17,49	20,27	63,50	30,08
	M_{12}	-24,43	-24,21	-24,24	-24,78	-24,37
	V_2	18,10	48,40	30,30	-20,01	21,00
	V_{10}	21,78	14,36	15,44	33,80	19,67
	V_{12}	17,93	17,52	17,58	18,58	17,81
E4	M_2	-44,67	-128,18	-100,30	59,08	-83,65
	M_8	-49,56	-48,84	-49,12	-50,40	-49,43
	M_9	-74,13	-138,83	-121,00	-38,66	-80,62
	M_{10}	85,80	46,25	62,31	130,73	78,57
	M_{12}	-50,19	-49,71	-49,90	-50,74	-50,10
	V_2	26,56	94,75	22,86	-18,36	23,48
	V_{10}	51,67	35,14	41,67	70,69	48,74
	V_{12}	37,01	36,11	36,47	38,06	36,85

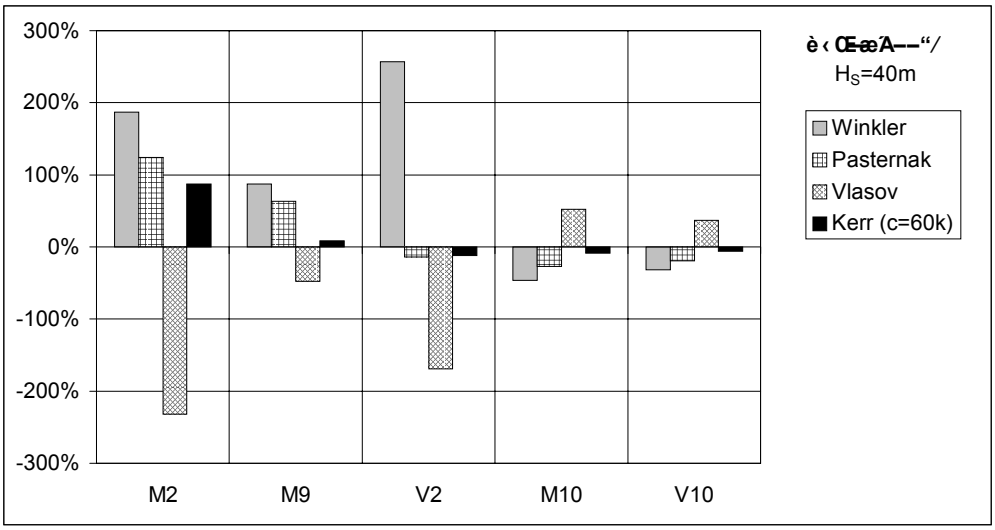
Αποκλίσεις					
	Προσομοίωμα:	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=60k)
E1	M_2	169,90%	141,49%	-240,03%	76,77%
	M_8	-1,34%	-1,24%	2,21%	-0,19%
	M_9	85,49%	81,47%	-76,16%	7,41%
	M_{10}	-50,18%	-45,78%	79,69%	-8,07%
	M_{12}	-0,88%	-0,82%	1,39%	-0,15%
	V_2	164,75%	86,54%	-212,01%	-10,18%
	V_{10}	-33,90%	-31,33%	54,70%	-5,23%
	V_{12}	-2,23%	-2,06%	3,65%	-0,33%
E2	M_2	174,32%	139,54%	-250,65%	96,91%
	M_8	-1,38%	-1,18%	2,21%	-0,40%
	M_9	86,24%	77,83%	-77,77%	14,14%
	M_{10}	-50,35%	-42,45%	80,29%	-14,60%
	M_{12}	-0,88%	-0,76%	1,42%	-0,26%
	V_2	167,42%	67,38%	-210,57%	16,04%
	V_{10}	-34,06%	-29,11%	55,19%	-9,67%
	V_{12}	-2,29%	-1,96%	3,65%	-0,67%
E4	M_2	186,95%	124,54%	-232,27%	87,27%
	M_8	-1,46%	-0,89%	1,69%	-0,26%
	M_9	87,28%	63,23%	-47,86%	8,76%
	M_{10}	-46,09%	-27,38%	52,36%	-8,43%
	M_{12}	-0,95%	-0,58%	1,09%	-0,17%
	V_2	256,75%	-13,91%	-169,11%	-11,59%
	V_{10}	-31,99%	-19,36%	36,80%	-5,67%
	V_{12}	-2,44%	-1,47%	2,83%	-0,42%



(α)



(β)

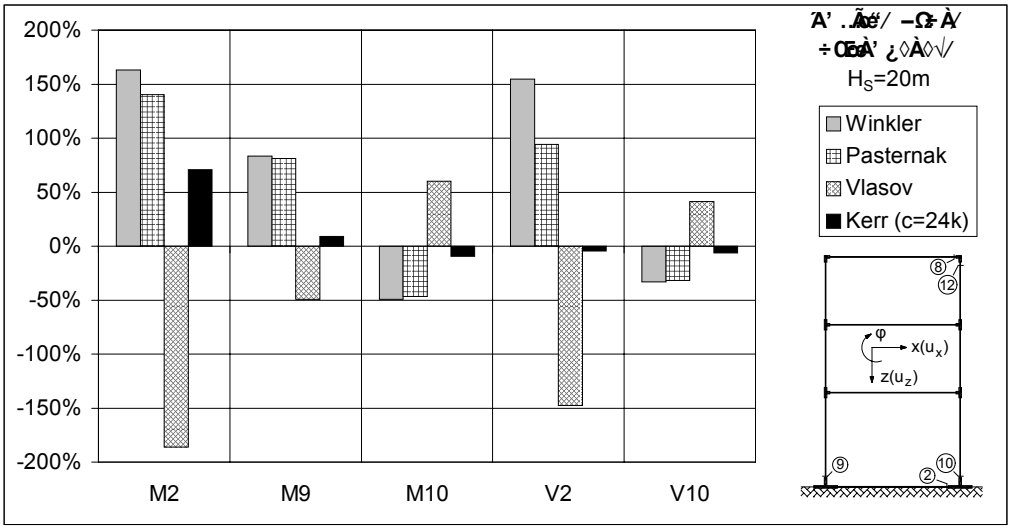


(γ)

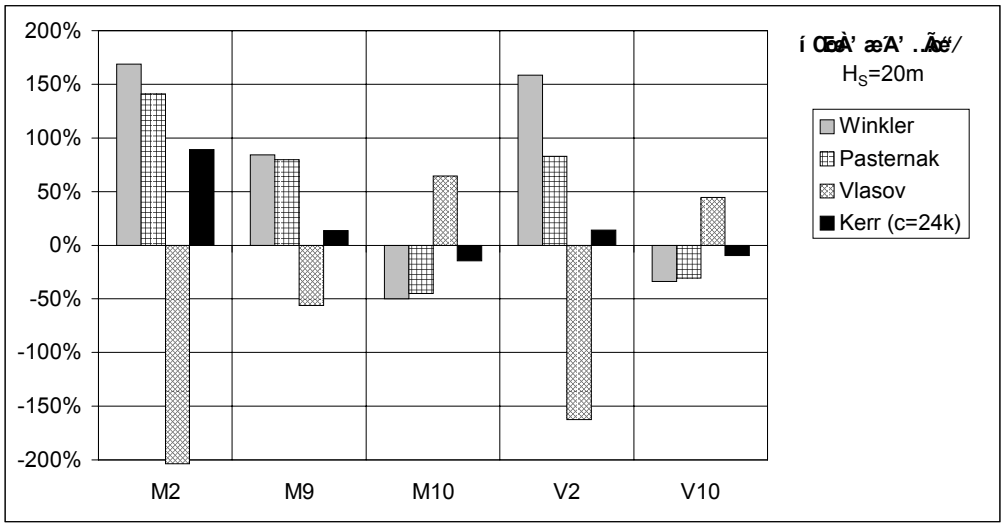
Σχήμα 5.83. Αποκλίσεις των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π2, για όλες τις εξεταζόμενες κατηγορίες εδάφους. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=40m.

Πίνακας 5.30. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προσομοιωμάτων όσον αφορά τα ελεγχόμενα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π2. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=20m.

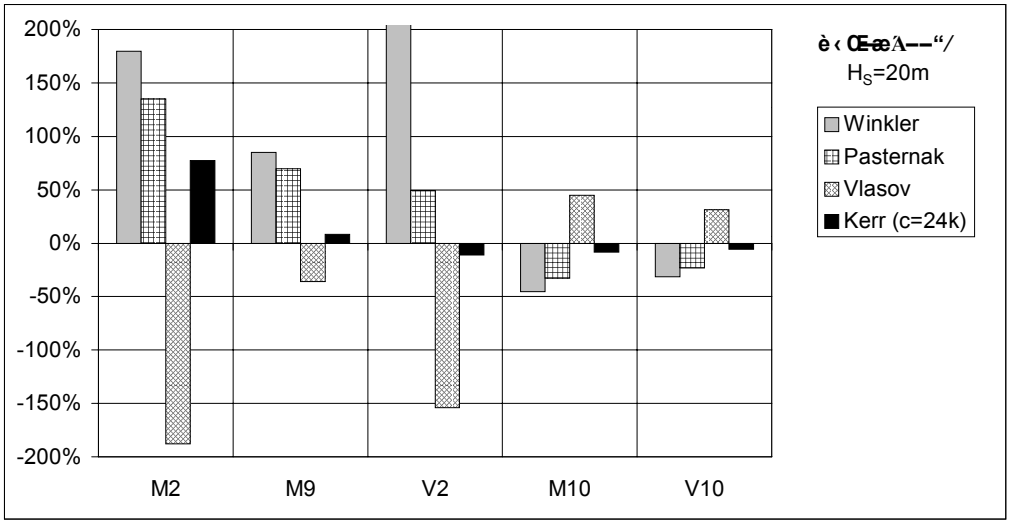
Απόλυτες τιμές						
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=24k)
E1	M_2	-22,05	-58,09	-53,02	18,97	-37,66
	M_8	-23,84	-23,52	-23,54	-24,23	-23,78
	M_9	-34,05	-62,41	-61,73	-17,20	-37,05
	M_{10}	34,68	17,50	18,44	55,54	31,41
	M_{12}	-24,42	-24,21	-24,22	-24,68	-24,38
	V_2	18,99	48,38	36,85	-9,05	18,18
	V_{10}	21,55	14,37	14,68	30,39	20,21
	V_{12}	17,92	17,52	17,54	18,40	17,84
E2	M_2	-21,62	-58,07	-52,10	22,35	-40,88
	M_8	-23,84	-23,52	-23,55	-24,26	-23,75
	M_9	-33,85	-62,39	-60,84	-14,84	-38,50
	M_{10}	34,89	17,51	19,20	57,48	29,88
	M_{12}	-24,42	-24,21	-24,23	-24,70	-24,36
	V_2	18,70	48,34	34,20	-11,66	21,35
	V_{10}	21,64	14,37	15,00	31,22	19,58
	V_{12}	17,92	17,52	17,55	18,44	17,81
E4	M_2	-45,69	-127,87	-107,35	40,14	-81,01
	M_8	-49,55	-48,84	-49,03	-50,25	-49,42
	M_9	-74,89	-138,48	-127,05	-47,96	-81,21
	M_{10}	85,04	46,55	57,06	123,09	78,09
	M_{12}	-50,18	-49,72	-49,84	-50,64	-50,10
	V_2	27,90	94,09	41,70	-15,05	24,76
	V_{10}	51,34	35,27	39,49	67,42	48,51
	V_{12}	37,00	36,12	36,35	37,88	36,84
Αποκλίσεις						
		Προσομοίωμα:	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=24k)
E1		M_2	163,45%	140,46%	-186,03%	70,80%
		M_8	-1,33%	-1,28%	1,62%	-0,26%
		M_9	83,30%	81,28%	-49,48%	8,80%
		M_{10}	-49,55%	-46,83%	60,16%	-9,44%
		M_{12}	-0,84%	-0,81%	1,05%	-0,15%
		V_2	154,77%	94,06%	-147,64%	-4,26%
		V_{10}	-33,34%	-31,88%	41,03%	-6,20%
		V_{12}	-2,23%	-2,14%	2,67%	-0,44%
E2		M_2	168,61%	140,99%	-203,36%	89,07%
		M_8	-1,33%	-1,22%	1,77%	-0,37%
		M_9	84,33%	79,72%	-56,15%	13,73%
		M_{10}	-49,80%	-44,96%	64,74%	-14,35%
		M_{12}	-0,84%	-0,77%	1,15%	-0,23%
		V_2	158,52%	82,88%	-162,34%	14,18%
		V_{10}	-33,58%	-30,69%	44,26%	-9,51%
		V_{12}	-2,23%	-2,04%	2,92%	-0,64%
E4		M_2	179,87%	134,95%	-187,86%	77,31%
		M_8	-1,43%	-1,06%	1,42%	-0,26%
		M_9	84,91%	69,65%	-35,95%	8,44%
		M_{10}	-45,26%	-32,90%	44,75%	-8,18%
		M_{12}	-0,93%	-0,69%	0,92%	-0,16%
		V_2	237,25%	49,48%	-153,94%	-11,24%
		V_{10}	-31,31%	-23,08%	31,33%	-5,51%
		V_{12}	-2,39%	-1,77%	2,37%	-0,43%



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 5.84. Αποκλίσεις των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π2, για όλες τις εξεταζόμενες κατηγορίες εδάφους. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=20m.

Από τους πίνακες 5.28 – 5.30 και τα σχήματα 5.82 – 5.84 καθίσταται σαφές, ότι οι τιμές του συντελεστή συσχέτισης οι οποίες προέκυψαν από την διαδικασία που περιγράφηκε προηγουμένως, προσδίδουν στο προσομοίωμα των τριών παραμέτρων μια ξεκάθαρη υπεροχή έναντι όλων των υπολοίπων και μάλιστα αποδίδοντας πολύ μικρότερες αποκλίσεις από αυτά. Ακόμα και για το μέγεθος της ροπής M_2 η σύγκλιση της οποίας, όπως τονίστηκε και προηγουμένως, δεν επιτυγχάνεται για τιμές του συντελεστή n_{ck} που βρίσκονται εντός του βέλτιστου πεδίου τιμών των υπολοίπων εντατικών μεγεθών στην περιοχή της θεμελίωσης, οι συγκεκριμένες τιμές του συντελεστή συσχέτισης αποδίδουν μικρότερες αποκλίσεις από τα υπόλοιπα προσομοιώματα. Όσον αφορά τις αποδόσεις των υπολοίπων προσομοιωμάτων μπορούν, να τονιστούν τα εξής:

Άργιλος μέσης σκληρότητας

Από την μελέτη των πινάκων 5.28 – 5.30 στους οποίους παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επίλυσης του πλαισίου Π2, και των πινάκων 5.20 – 5.22 στους οποίους παρουσιάζονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα της επίλυσης του πλαισίου Π1, βγαίνει το συμπέρασμα ότι δεν υφίσταται καμία διαφορά μεταξύ των δυο περιπτώσεων όσον αφορά την ιεράρχηση των προσομοιωμάτων με βάση την αποδοτικότητα τους. Επομένως, δεν έχει νόημα να προστεθεί τίποτα περισσότερο από αυτά που ήδη καταγράφηκαν κατά την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της επίλυσης του πλαισίου Π1. Η μόνη διαφορά που θα άξιζε να αναφερθεί, είναι μια αύξηση των αποκλίσεων που αποδίδονται στην παρούσα περίπτωση έναντι της περίπτωσης του πλαισίου Π1.

Σκληρή Άργιλος

Και για την περίπτωση της σκληρής Αργίλου, ισχύουν σε γενικές γραμμές αυτά που τονίστηκαν για την περίπτωση της Αργίλου μέσης σκληρότητας.

Πυκνή Άμμος

Ούτε και στην περίπτωση της πυκνής Άμμου δεν παρατηρείται καμία ποιοτική διαφορά μεταξύ των επιλύσεων των πλαισίων Π1και Π2, υπό την έννοια ότι διατηρείται η ίδια ταξινόμηση των προσομοιωμάτων με βάση την αποδοτικότητα τους. Επομένως ισχύουν αυτά που καταγράφηκαν κατά την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της επίλυσης του πλαισίου Π1. Ωστόσο, και στην παρούσα περίπτωση υφίσταται μια ποσοτική διαφοροποίηση, καθώς οι αποκλίσεις που προκύπτουν από την επίλυση του πλαισίου Π2, είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες αποκλίσεις που προκύπτουν από την επίλυση του πλαισίου Π1.

Τέλος, όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη που αναπτύσσονται στο ζύγωμα του τελευταίου ορόφου του πλαισίου, οι αποκλίσεις όλων των προσομοιωμάτων είναι πολύ μικρές και στην παρούσα περίπτωση. Ωστόσο, εμφανίζονται ελαφρά μεγαλύτερες απ' ότι στην περίπτωση της επίλυσης του πλαισίου Π1, χωρίς να υπερβαίνουν όμως το 3.5% (βλέπε Πίνακες 5.28 – 5.30). Επομένως, η επιρροή του χρησιμοποιούμενου εδαφικού προσομοιώματος σε περιοχές του πλαισίου που βρίσκονται μακριά από την περιοχή της θεμελίωσης του μπορεί να θεωρηθεί και εδώ αμελητέα.

Κλείνοντας την αναφορά στα αποτελέσματα της επίλυσης του πλαισίου Π2, θα πρέπει να γίνει μια σύνοψη των συμπερασμάτων που κατεγράφησαν παραπάνω.

Συγκρίσεις μεγεθών μετακίνησης

Όπως και στην περίπτωση της επίλυσης του πλαισίου Π1, έτσι και στην παρούσα περίπτωση η τιμή του συντελεστή συσχέτισης n_{ck}=17 προσδίδει στο προσομοίωμα των τριών παραμέτρων, μια σαφή υπεροχή έναντι των υπολοίπων που εξετάστηκαν. Γενικότερα, αν για τον συντελεστή συσχέτισης ληφθούν τιμές από το πεδίο 16 – 22 για τα αργιλικά εδάφη Ε1 και Ε2, ή το πεδίο 20 – 24 για το αμμώδες έδαφος Ε4, τότε κανένα από τα ελεγχόμενα μεγέθη μετακίνησης δεν παρουσιάζει απόκλιση μεγαλύτερη του ±20% από τη λύση αναφοράς. Τέλος, τα υπόλοιπα προσομοιώματα παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά με αυτή που καταγράφηκε και κατά την επίλυση του πλαισίου Π1, με εξαίρεση ίσως την μικρή αύξηση των αποκλίσεων τους στην παρούσα περίπτωση.

Συγκρίσεις των εντατικών μεγεθών

Όσον αφορά τα ελεγχόμενα εντατικά μεγέθη στην περιοχή της θεμελίωσης, ορίζονται όπως και στην περίπτωση του πλαισίου Π1 συγκεκριμένοι βέλτιστοι συντελεστές συσχέτισης με βάση το βάθος του ελαστικού υποβάθρου. Διαφοροποίηση παρουσιάζεται, αφενός όσον αφορά τις τιμές των συντελεστών αυτών, και αφετέρου στο γεγονός ότι ο βέλτιστος συντελεστής που αντιστοιχεί σε βάθος ελαστικού υποβάθρου 60 μέτρων επιτυγχάνει αποκλίσεις που δεν υπερβαίνουν το ±25% έναντι του ±20% που επιτυγχάνει ο αντίστοιχος συντελεστής στην περίπτωση της επίλυσης του πλαισίου Π1. Οι βέλτιστοι συντελεστές είναι:

n_{ck}= 100 για την περίπτωση που H_S=60m (αντίστοιχη τιμή για το πλαίσιο Π1: n_{ck}= 85)

n_{ck}= 60 για την περίπτωση που H_S=40m (αντίστοιχη τιμή για το πλαίσιο Π1: n_{ck}= 55)

n_{ck}= 24 για την περίπτωση που H_S=20m (αντίστοιχη τιμή για το πλαίσιο Π1: n_{ck}= 24)

Το συμπέρασμα που εξάγεται από την μελέτη των παραπάνω τιμών είναι ότι υφίσταται μια διαφοροποίηση των βέλτιστων συντελεστών μεταξύ των επιλύσεων των πλαισίων Π1 και Π2, ειδικά για μεγάλα βάθη του ελαστικού υποβάθρου. Αντίθετα, οι διαφορές μειώνονται και εξαλείφονται για μεσαία και μικρά βάθη αντίστοιχα. Εξαίρεση στις συγκλίσεις που επιτυγχάνουν οι προαναφερόμενοι συντελεστές, αποτελεί η καμπτική ροπή M_2 που αναπτύσσεται στο άκρο της δοκού θεμελίωσης. Το συγκεκριμένο εντατικό μέγεθος λαμβάνει τις βέλτιστές του τιμές με διαφορετικές τιμές του συντελεστή συσχέτισης. Ωστόσο, και με τις προαναφερόμενες τιμές του n_{ck} το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων αποδίδει για τη ροπή M_2 καλύτερες τιμές από τα υπόλοιπα προσομοιώματα.

Όσον αφορά τις αποδόσεις των υπολοίπων προσομοιωμάτων για τα εντατικά μεγέθη στην περιοχή της θεμελίωσης, ισχύουν τα συμπεράσματα που παρουσιάστηκαν αναλυτικά κατά την παράθεση των αποτελεσμάτων των επιλύσεων του πλαισίου Π1, χωρίς ουσιαστικές διαφοροποιήσεις πέραν της παρατηρούμενης αύξησης των αποκλίσεων.

Τέλος, για τα εντατικά μεγέθη στην κορυφή του πλαισίου όλα τα προσομοιώματα αποδίδουν πολύ καλές τιμές, οι οποίες σε καμία περίπτωση δεν αποκλίνουν περισσότερο από ±3.5% από τις τιμές αναφοράς.

Επίλυση πλαισίου Π3

Τα γεωμετρικά δεδομένα και τα δεδομένα φόρτισης του πλαισίου Π3, δίνονται αναλυτικά στο σχήμα 5.63γ. Το μήκος των ζυγωμάτων του πλαισίου, και κατά συνέπεια και της δοκού θεμελίωσης, είναι εξαιρετικά μεγάλο και πιθανώς μη σύνηθες. Η επιλογή αυτή όμως έγινε σκόπιμα προκειμένου να επιτευχθούν και να μελετηθούν υψηλότερες τιμές του συντελεστή λ (Σχέση 2.134), απ' τις αντίστοιχες που μελετήθηκαν στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις. Έτσι, με βάση τις τιμές των γεωμετρικών και ελαστικών δεδομένων της δοκού θεμελίωσης και των τύπων του εδάφους που εξετάστηκαν, προκύπτουν για την παρούσα περίπτωση:

– Έδαφος Ε1: λ= 1,01.
– Έδαφος Ε2: λ= 1,15.
– Έδαφος Ε4: λ= 2,02.

Οι δυο πρώτες τιμές, αν και με βάση τα κριτήρια των Vlasov και Leont'ev (1960) αντιστοιχούν σε δοκούς πεπερασμένου μήκους που έχουν ήδη μελετηθεί, είναι μεγαλύτερες της μονάδας και πλησιάζουν την τιμή που οριοθετεί τις περιοχές που αντιστοιχούν σε δοκούς πεπερασμένου και «απείρου» μήκους αντίστοιχα. Η τρίτη τιμή αντιστοιχεί σε δοκούς «απείρου» μήκους, που δεν έχουν ελεγχθεί στις δυο προηγούμενες επιλύσεις.

Όσον αφορά την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων των μεγεθών μετακίνησης, ακολουθώντας την διαδικασία που ακολουθήθηκε και στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις, έγινε διερεύνηση τόσο των τιμών του συντελεστή συσχέτισης που αποδίδουν τις βέλτιστες τιμές για κάθε ελεγχόμενο μέγεθος ξεχωριστά, όσο και των πεδίων τιμών του εντός των οποίων επιτυγχάνεται η βέλτιστη απόδοση του προσομοιώματος για το σύνολο των μεγεθών μετακίνησης που εξετάστηκαν. Ακολούθησε η συγκριτική αξιολόγηση όλων των προσομοιωμάτων, και η καταγραφή των συμπερασμάτων η οποία έγινε υπό το πρίσμα της σύγκρισης με τα αντίστοιχα συμπεράσματα των δυο προηγούμενων επιλύσεων.

Στους δυο πίνακες που ακολουθούν (Πίνακες 5.31 και 5.32), καταγράφονται τα αποτελέσματα των διερευνήσεων για τις βέλτιστες τιμές του συντελεστή συσχέτισης, ανά μέγεθος ξεχωριστά και ως σύνολο.

Πίνακας 5.31. Τιμές του συντελεστή συσχέτισης n_{ck} για τις οποίες επιτυγχάνεται η βέλτιστη σύγκλιση των τιμών των εξεταζόμενων μεγεθών μετακίνησης προς την λύση αναφοράς, κατά περίπτωση κατηγορίας εδάφους και βάθους του υποβάθρου θεμελίωσης του πλαισίου Π3.

	Άργιλος μέσης σκληρότητας (Ε1)			Σκληρή Άργιλος (Ε2)			Πυκνή Άμμος (Ε4)		
	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m
u_{z9}	8	8	9	8	9	10	10	10	11
u_{z10}	10	9	10	10	10	10	12	12	11
u_{x8}	16	13	10	17	14	10	20	17	12
φ_2	28	20	14	38	27	17	45	32	19
φ_8	15	12	10	15	12	10	16	13	11

Πίνακας 5.32. Πεδία των βέλτιστων τιμών του συντελεστή συσχέτισης όσον αφορά ελεγχόμενα μεγέθη μετακίνησης του φορέα (μεγέθη u_{z9}, u_{z10}, u_{x8}, φ_2 και φ_8), ανά κατηγορία εδάφους και βάθους του ελαστικού υποβάθρου του πλαισίου Π3.

Μέγιστη απόκλιση	**Άργιλος μέσης σκληρότητας**			**Σκληρή Άργιλος***			**Πυκνή Άμμος**		
	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m	H_S=60m*	H_S=40m*	H_S=20m
<±10%	-	-	-	-	12 – 13	9 – 10	14 – 17	-	-
<±15%	-	15 – 16	10 – 13	14 – 16	12 – 14	9 – 12	13 – 20	11 – 18	15 – 18
<±20%	-	14 – 17	9 – 16	13 – 17	11 – 15	9 – 16	12 – 22	10 – 20	13 – 22
<±25%	13 – 20	13 – 18	8 – 17	13 – 18	11 – 17	9 – 22	12 – 24	9 – 24	12 – 30

* Δεν επιτυγχάνεται σύγκλιση της τιμής της στροφής φ_2

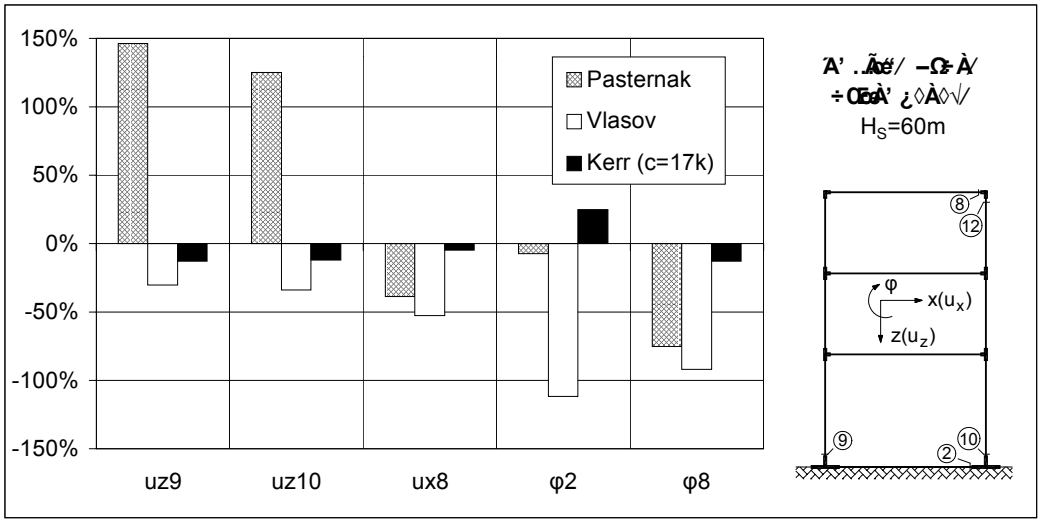
Από την μελέτη του Πίνακα 5.31 σε συνδυασμό με τη μελέτη των Πινάκων 5.15 και 5.26, προκύπτει η γενική διαπίστωση ότι δεν υπάρχουν σοβαρές διαφοροποιήσεις μεταξύ των επιλύσεων των πλαισίων Π1, Π2 και Π3 όσον αφορά τη μεταβολή των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης σε συνάρτηση με τον τύπο του εδάφους και το βάθος του ελαστικού υποβάθρου. Έτσι, και στην παρούσα περίπτωση οι τιμές του n_{ck} για τις οποίες αποδίδονται οι βέλτιστες τιμές των κατακορύφων μετακινήσεων u_{z9}, u_{z10}, παραμένουν σχεδόν σταθερές ανεξαρτήτως του τύπου εδάφους και του βάθους του ελαστικού υποβάθρου. Αντιθέτως, οι τιμές του n_{ck} για τις οποίες αποδίδονται οι βέλτιστες τιμές της οριζόντιας μετακίνησης u_{x8}, και των στροφών φ_2 και φ_8, εμφανίζουν μια σαφή μείωση καθώς μειώνεται το βάθος του ελαστικού υποβάθρου.

Από τη μελέτη του Πίνακα 5.32 προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

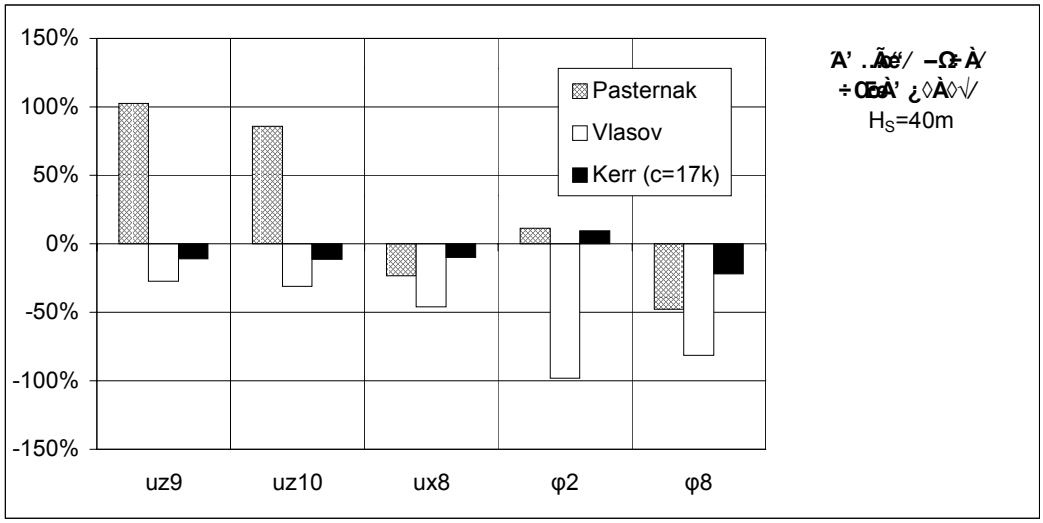
- Σε αντίθεση με τις επιλύσεις των πλαισίων Π1 και Π2, δεν είναι εφικτή η επίτευξη αποκλίσεων μικρότερων από ±10% για το σύνολο των εξεταζόμενων μεγεθών μετακίνησης, στις περισσότερες από τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν.
- Η σύγκλιση της τιμής της στροφής στο άκρο της δοκού θεμελίωσης φ_2, επιτυγχάνεται για τιμές του n_{ck} που βρίσκονται εκτός του πεδίου τιμών με τις οποίες επιτυγχάνεται η σύγκλιση όλων των υπολοίπων μεγεθών μετακίνησης που εξετάστηκαν. Η παρατήρηση αυτή, ισχύει για την περίπτωση μελέτης της σκληρής Αργίλου, καθώς και για την περίπτωση της πυκνής Άμμου (με εξαίρεση την περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει πολύ μικρό βάθος).
- Η τιμή n_{ck}=17 η οποία κατά τις επιλύσεις των άλλων δυο πλαισίων απέδωσε αποκλίσεις που δεν υπερβαίνουν σε γενικές γραμμές το 20 – 25% (πέραν ορισμένων εξαιρέσεων), εξακολουθεί να έχει και στην παρούσα περίπτωση το ίδιο επίπεδο απόδοσης. Επισημαίνεται μάλιστα, ότι για τους περισσότερους από τους συνδυασμούς κατηγορίας εδάφους και βάθους ελαστικού υποβάθρου που εξετάστηκαν, αποδίδει αποκλίσεις μικρότερες και από 20%.
- Λαμβάνοντας για τον συντελεστή συσχέτισης τιμές από το διάστημα 13 – 18 και για τις τρεις κατηγορίες εδάφους, επιτυγχάνονται αποκλίσεις που δεν υπερβαίνουν σε γενικές γραμμές το 25% για κανένα από τα εξεταζόμενα μεγέθη μετακίνησης, εκτός ορισμένων εξαιρέσεων που αφορούν κυρίως την στροφή φ_2.

Πίνακας 5.33. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προς εξέταση προσομοιωμάτων όσον αφορά τα επιλεγμένα μεγέθη μετακίνησης του πλαισίου Π3. Περίπτωση Αργίλου μέσης σκληρότητας.

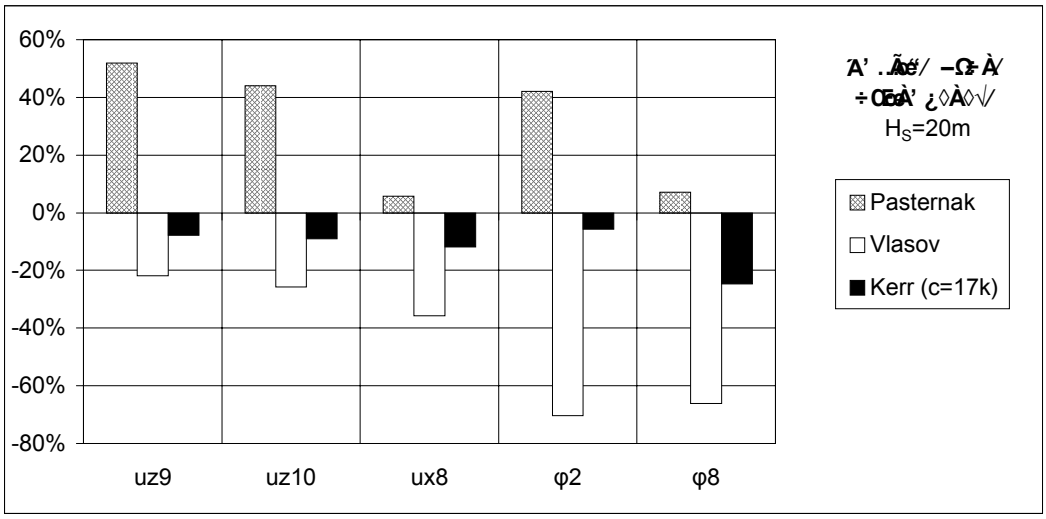
		Απόλυτες τιμές				
		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=17k)
H_s=60m	u_{z9}	0,120	0,237	0,297	0,084	0,105
	u_{z10}	0,135	0,367	0,305	0,089	0,119
	u_{x8}	0,017	0,121	0,010	0,008	0,016
	φ_2	0,0018	0,013	0,002	0,000	0,002
	φ_8	0,0009	0,0113	0,0002	0,0001	0,0008
H_s=40m	u_{z9}	0,0995	0,1630	0,2016	0,0724	0,0887
	u_{z10}	0,1143	0,2520	0,2121	0,0789	0,1015
	u_{x8}	0,0166	0,0842	0,0127	0,0089	0,0149
	φ_2	0,0018	0,0095	0,0020	0,0000	0,0020
	φ_8	0,0009	0,0076	0,0005	0,0002	0,0007
H_s=20m	u_{z9}	0,066	0,085	0,100	0,051	0,061
	u_{z10}	0,080	0,131	0,115	0,059	0,073
	u_{x8}	0,016	0,045	0,017	0,010	0,014
	φ_2	0,0018	0,006	0,003	0,001	0,002
	φ_8	0,0008	0,0037	0,0009	0,0003	0,0006
		Αποκλίσεις				
H_s=60m	u_{z9}	96,67%	146,53%	-30,37%	-12,75%	
	u_{z10}	170,82%	125,20%	-34,06%	-12,07%	
	u_{x8}	626,04%	-38,55%	-52,47%	-4,60%	
	φ_2	641,48%	-7,14%	-111,62%	24,72%	
	φ_8	1177,66%	-75,31%	-92,10%	-12,80%	
H_s=40m	u_{z9}	63,81%	102,55%	-27,26%	-10,89%	
	u_{z10}	120,49%	85,60%	-30,98%	-11,16%	
	u_{x8}	408,11%	-23,39%	-46,04%	-9,98%	
	φ_2	433,03%	11,49%	-98,35%	9,60%	
	φ_8	772,05%	-47,65%	-81,28%	-21,85%	
H_s=20m	u_{z9}	28,97%	51,85%	-21,89%	-7,78%	
	u_{z10}	63,84%	43,98%	-25,75%	-9,07%	
	u_{x8}	183,67%	5,65%	-35,74%	-11,91%	
	φ_2	214,19%	42,03%	-70,32%	-5,67%	
	φ_8	358,90%	7,05%	-66,17%	-24,68%	



(α)



(β)

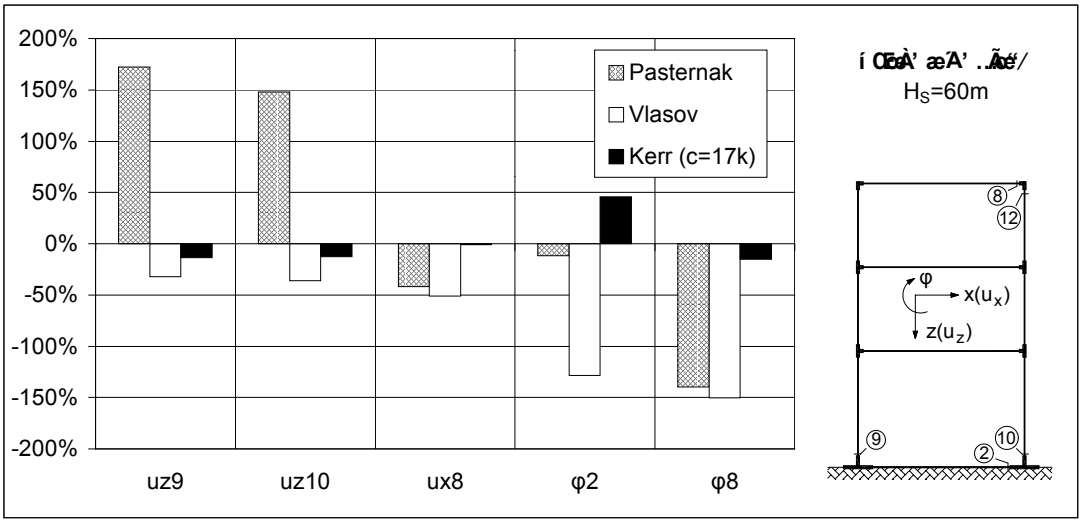


(γ)

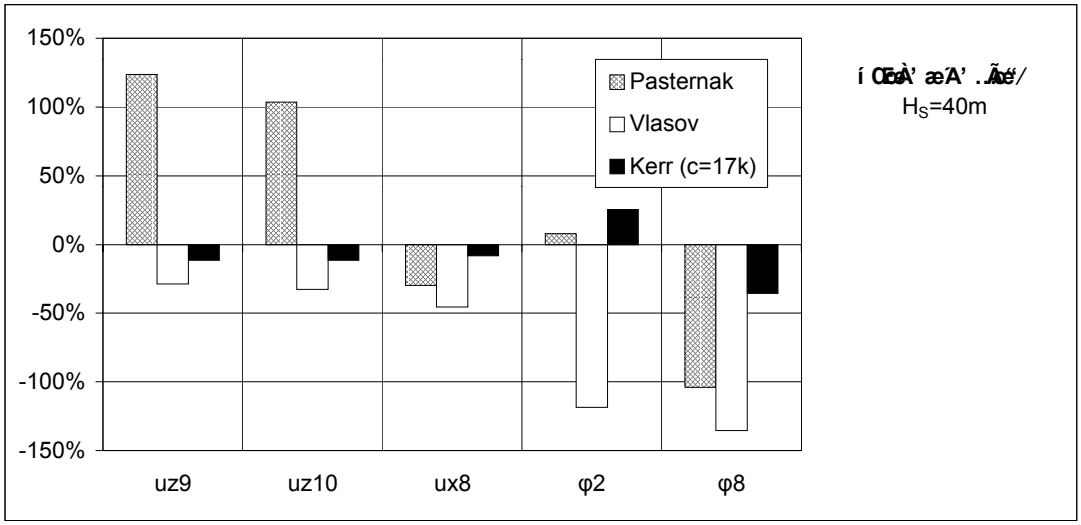
Σχήμα 5.85. Διάγραμμα αποκλίσεων των εξεταζόμενων εδαφικών προσομοιωμάτων από το προσομοίωμα αναφοράς, όσον αφορά τα μεγέθη μετακίνησης. Άργιλος μέσης σκληρότητας – Πλαίσιο Π3.

Πίνακας 5.34. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προς εξέταση προσομοιωμάτων όσον αφορά τα επιλεγμένα μεγέθη μετακίνησης του πλαισίου Π3. Περίπτωση σκληρής Αργίλου.

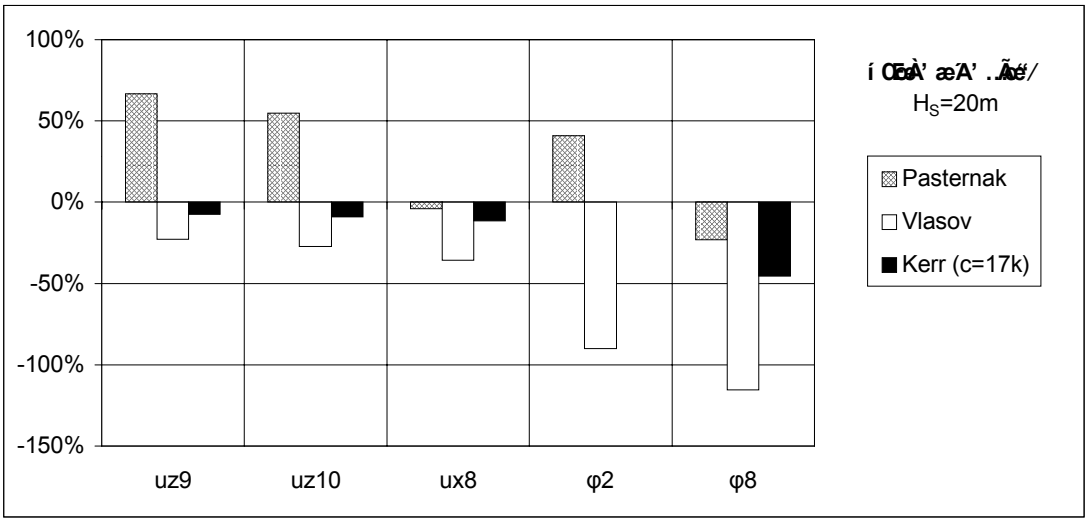
		Απόλυτες τιμές				
		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=17k)
H_s=60m	u_{z9}	0,076	0,165	0,207	0,052	0,066
	u_{z10}	0,085	0,256	0,211	0,054	0,074
	u_{x8}	0,011	0,085	0,007	0,006	0,011
	φ_2	0,0012	0,010	0,001	0,000	0,002
	φ_8	0,0003	0,0077	-0,0001	-0,0002	0,0003
H_s=40m	u_{z9}	0,0635	0,1146	0,1420	0,0452	0,0563
	u_{z10}	0,0724	0,1768	0,1473	0,0487	0,0641
	u_{x8}	0,0112	0,0599	0,0079	0,0061	0,0103
	φ_2	0,0012	0,0071	0,0013	-0,0002	0,0015
	φ_8	0,0003	0,0051	0,0000	-0,0001	0,0002
H_s=20m	u_{z9}	0,043	0,060	0,072	0,033	0,040
	u_{z10}	0,052	0,093	0,080	0,038	0,047
	u_{x8}	0,011	0,033	0,010	0,007	0,010
	φ_2	0,0012	0,004	0,002	0,000	0,001
	φ_8	0,0003	0,0024	0,0002	0,0000	0,0002
		Αποκλίσεις				
H_s=60m	u_{z9}	117,19%	172,21%	-32,32%	-13,57%	
	u_{z10}	200,39%	148,15%	-36,17%	-12,47%	
	u_{x8}	656,82%	-41,62%	-50,98%	-1,16%	
	φ_2	693,85%	-11,60%	-128,67%	45,90%	
	φ_8	2147,88%	-139,42%	-150,52%	-15,14%	
H_s=40m	u_{z9}	80,37%	123,54%	-28,79%	-11,38%	
	u_{z10}	144,23%	103,44%	-32,80%	-11,52%	
	u_{x8}	434,84%	-29,70%	-45,38%	-8,08%	
	φ_2	482,80%	7,72%	-118,51%	25,55%	
	φ_8	1437,52%	-104,09%	-135,42%	-35,75%	
H_s=20m	u_{z9}	40,12%	66,77%	-22,94%	-7,57%	
	u_{z10}	79,81%	54,88%	-27,21%	-9,09%	
	u_{x8}	201,63%	-4,02%	-35,64%	-11,52%	
	φ_2	253,84%	41,04%	-90,03%	0,08%	
	φ_8	716,73%	-23,13%	-115,51%	-45,43%	



(α)



(β)

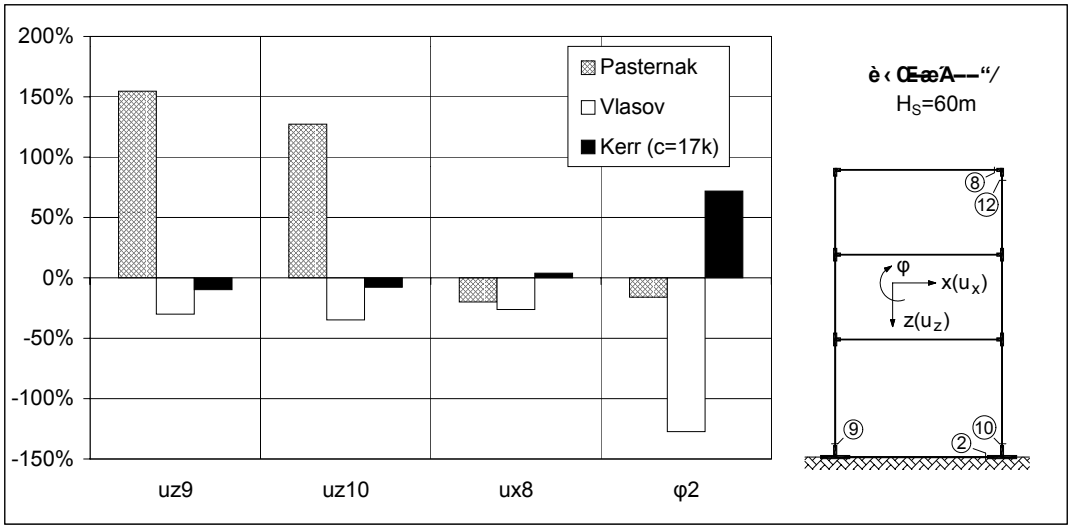


(γ)

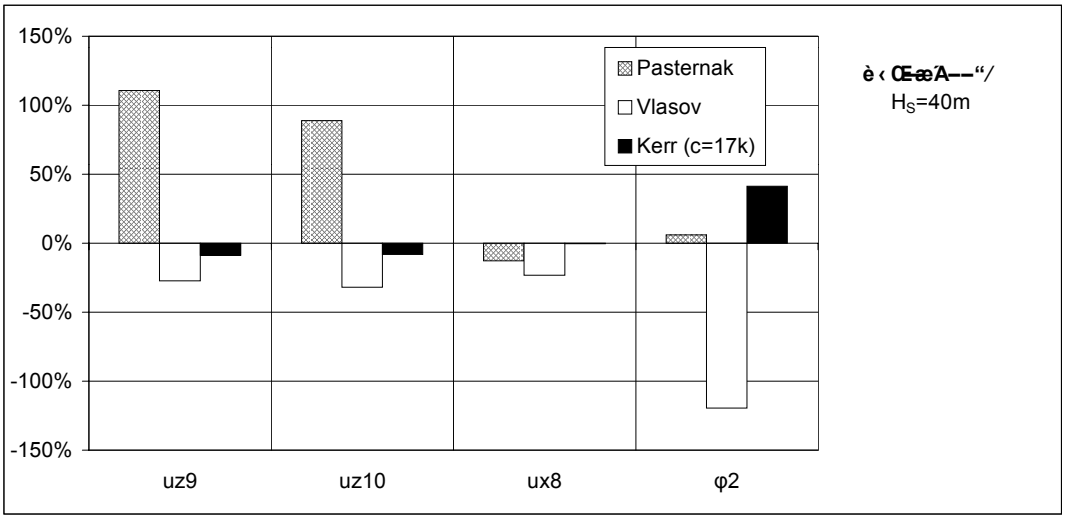
Σχήμα 5.86. Διάγραμμα αποκλίσεων των εξεταζόμενων εδαφικών προσομοιωμάτων από το προσομοίωμα αναφοράς, όσον αφορά τα μεγέθη μετακίνησης. Σκληρή Άργιλος – Πλαίσιο Π3.

Πίνακας 5.35. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προς εξέταση προσομοιωμάτων όσον αφορά τα επιλεγμένα μεγέθη μετακίνησης του πλαισίου Π3. Περίπτωση πυκνής Άμμου.

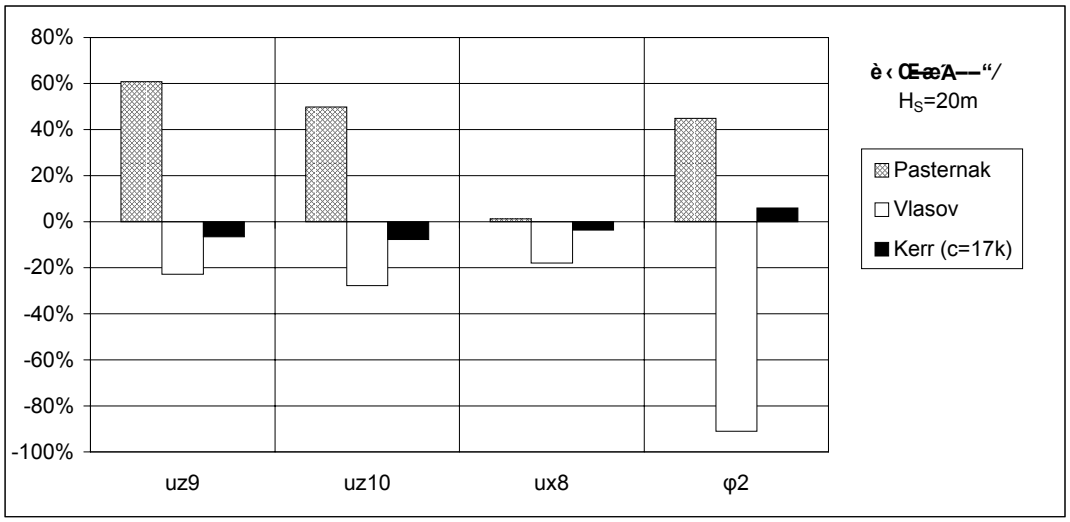
		Απόλυτες τιμές				
		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr (c=17k)
H_s=60m	u_{z9}	0,023	0,047	0,059	0,016	0,021
	u_{z10}	0,027	0,080	0,061	0,018	0,025
	u_{x8}	0,009	0,036	0,008	0,007	0,010
	φ_2	8,580E-04	0,005	0,001	0,000	0,001
	φ_8	-2,67E-04	0,0023	-0,0004	-0,0004	-0,0003
H_s=40m	u_{z9}	0,01931	0,0335	0,0407	0,0141	0,0176
	u_{z10}	0,02288	0,0563	0,0432	0,0156	0,0210
	u_{x8}	0,00935	0,0273	0,0082	0,0072	0,0093
	φ_2	8,65E-04	0,0044	0,0009	-0,0002	0,0012
	φ_8	-2,70E-04	0,0014	-0,0004	-0,0004	-0,0003
H_s=20m	u_{z9}	0,013	0,019	0,021	0,010	0,012
	u_{z10}	0,016	0,031	0,024	0,012	0,015
	u_{x8}	0,009	0,018	0,009	0,008	0,009
	φ_2	8,963E-04	0,003	0,001	0,000	0,001
	φ_8	-2,88E-04	0,0004	-0,0003	-0,0004	-0,0003
		Αποκλίσεις				
H_s=60m	u_{z9}	102,22%	154,68%	-29,93%	-9,63%	
	u_{z10}	197,26%	127,44%	-34,69%	-7,87%	
	u_{x8}	288,85%	-19,80%	-26,22%	3,76%	
	φ_2	523,24%	-16,04%	-127,34%	71,72%	
	φ_8	-967,25%	61,84%	66,47%	5,06%	
H_s=40m	u_{z9}	73,34%	110,88%	-27,13%	-8,66%	
	u_{z10}	146,04%	88,86%	-31,96%	-8,19%	
	u_{x8}	192,27%	-12,83%	-23,18%	-0,31%	
	φ_2	405,77%	6,07%	-119,34%	41,33%	
	φ_8	-618,46%	40,70%	56,43%	12,61%	
H_s=20m	u_{z9}	44,52%	60,91%	-22,90%	-6,61%	
	u_{z10}	88,44%	49,72%	-27,74%	-7,69%	
	u_{x8}	90,54%	1,23%	-17,89%	-3,73%	
	φ_2	260,96%	44,89%	-90,94%	5,97%	
	φ_8	-249,86%	-0,03%	39,60%	14,25%	



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 5.87. Διάγραμμα αποκλίσεων των εξεταζόμενων εδαφικών προσομοιωμάτων από το προσομοίωμα αναφοράς, όσον αφορά τα μεγέθη μετακίνησης. Πυκνή Άμμος – Πλαίσιο Π3.

Από τη μελέτη των πινάκων 5.33 – 5.35 και των σχημάτων 5.85 – 5.87, προκύπτουν τα κάτωθι συμπεράσματα αναφορικά με την αποδοτικότητα των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων, πέραν του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων που και στην παρούσα περίπτωση υπερτερεί όλων των υπολοίπων εκτός ελαχίστων εξαιρέσεων.

Άργιλος μέσης σκληρότητας

Στην περίπτωση αυτή, το προσομοίωμα του Vlasov εμφανίζεται αποδοτικότερο όσον αφορά την προσέγγιση των κατακορύφων μετακινήσεων u_{z9} και u_{z10}, ενώ το προσομοίωμα του Pasternak αποδίδει γενικώς καλύτερα την οριζόντια μετακίνηση της κορυφής του πλαισίου u_{x8} αλλά και τις στροφές φ_2, και φ_8. Θα πρέπει μάλιστα να τονιστεί ότι σε ορισμένες περιπτώσεις, το προσομοίωμα του Pasternak εμφανίζεται ισοδύναμο ή και ελαφρά καλύτερο του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων όσον αφορά τα συγκεκριμένα μεγέθη μετακίνησης (π.χ. αποδίδει για τη στροφή φ_2 απόκλιση 7.14% έναντι του 24.7% που αποδίδει το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων στην περίπτωση Ε1 / H_S=20m). Τέλος, το προσομοίωμα του Winkler αποδίδει με μεγάλη διαφορά τις χειρότερες τιμές από όλα τα προσομοιώματα.

Σκληρή Άργιλος

Και στην περίπτωση αυτή διατηρείται σε γενικές γραμμές η ίδια εικόνα, με το προσομοίωμα του Vlasov να υπερέχει στην προσέγγιση των κατακορύφων μετακινήσεων u_{z9} και u_{z10}, και το προσομοίωμα του Pasternak να υπερέχει στην προσέγγιση των υπολοίπων μεγεθών μετακίνησης που εξετάστηκαν. Το προσομοίωμα του Winkler εμφανίζεται και πάλι το λιγότερο αποδοτικό, και μάλιστα αποδίδει μεγαλύτερες αποκλίσεις απ' ότι στην περίπτωση της Αργίλου μέσης σκληρότητας.

Πυκνή Άμμος

Η γενική εικόνα παραμένει η ίδια και στην περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώματα πυκνής Άμμου, και επομένως δεν έχει νόημα μια αναλυτικότερη αναφορά στα αποτελέσματα.

Ανακεφαλαιώνοντας θα πρέπει να τονιστεί ότι σε γενικές γραμμές, τα συμπεράσματα που εκτέθηκαν παραπάνω είναι σε πλήρη συμφωνία με αυτά που προέκυψαν από την επίλυση του πλαισίου Π1.

Η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων που αφορούν τα εντατικά μεγέθη, ξεκινά με τη διερεύνηση των τιμών του συντελεστή συσχέτισης με τις οποίες επιτυγχάνεται η βέλτιστη απόδοση των τιμών των εντατικών μεγεθών του πλαισίου στην περιοχή της θεμελίωσης.

Πίνακας 5.36. Πεδία των βέλτιστων τιμών του συντελεστή συσχέτισης όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη στην περιοχή της θεμελίωσης του πλαισίου Π3 (μεγέθη M_9, M_{10}, V_2, V_{10}), ανά κατηγορία εδάφους και βάθους του ελαστικού υποβάθρου.

Μέγιστη απόκλιση	**Άργιλος μέσης σκληρότητας**			**Σκληρή Άργιλος**			**Πυκνή Άμμος**		
	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m	H_S=60m	H_S=40m	H_S=20m
<±15%	59 – 61	-	-	73 – 76	-	-	-	-	-
<±20%	58 – 64	38 – 40	22 – 24	71 – 79	45 – 48	24 – 25	44 – 46	29 – 31	16 – 18
<±25%	57 – 68	37 – 44	21 – 25	68 – 84	44 – 53	22 – 29	40 – 50	27 – 33	15 – 20
<±30%	56 – 72	36 – 46	21 – 25	67 – 88	43 – 55	21 – 29	37 – 54	25 – 37	14 – 22

Από τον παραπάνω πίνακα απουσιάζουν, όπως και στις περιπτώσεις επίλυσης των πλαισίων Π1 και Π2, τα δεδομένα που αφορούν τη ροπή M_2. Ο λόγος είναι ότι και στην παρούσα περίπτωση το συγκεκριμένο εντατικό μέγεθος παρουσιάζει τις βέλτιστες αποκλίσεις του, εκτός των πεδίων τιμών του συντελεστή συσχέτισης που δίνονται στον πίνακα αυτό.

Από τη μελέτη του πίνακα 5.36 προκύπτει ένα καινούργιο συμπέρασμα που διαφοροποιεί την παρούσα περίπτωση από τις περιπτώσεις επίλυσης των πλαισίων Π1 και Π2. Το συμπέρασμα αυτό έγκειται στο γεγονός, ότι δεν υπάρχει δυνατότητα ορισμού ενός βέλτιστου συντελεστή συσχέτισης κοινού για κάθε βάθος του ελαστικού υποβάθρου και ανεξάρτητου της κατηγορίας εδάφους. Υφίσταται μια σαφής διαφοροποίηση μεταξύ των εδαφών με μικρό μέτρο ελαστικότητας (Αργιλικά εδάφη Ε1 και Ε2), και των εδαφών με μεγάλο μέτρο ελαστικότητας (Αμμώδες έδαφος Ε4), κάτι που δεν προέκυψε στις προηγούμενες περιπτώσεις. Έτσι, μπορούν να οριστούν κοινοί βέλτιστοι συντελεστές συσχέτισης για τα εδάφη Ε1 και Ε2, οι οποίοι όμως δεν καλύπτουν την περίπτωση του εδάφους Ε4.

Ένα ακόμα συμπέρασμα που διαφοροποιεί την παρούσα περίπτωση από τις δυο προηγούμενες, αφορά το γεγονός ότι το εύρος των πεδίων βέλτιστων τιμών των συντελεστών συσχέτισης είναι πολύ μικρότερο, ενώ ταυτόχρονα δεν υπάρχει για τους περισσότερους από τους συνδυασμούς κατηγορίας εδάφους και βάθους του ελαστικού υποβάθρου που μελετήθηκαν, η δυνατότητα ορισμού πεδίων τιμών για τις οποίες επιτυγχάνονται αποκλίσεις μικρότερες του 15%. Έτσι, οι περιοχές των βέλτιστων τιμών του συντελεστή συσχέτισης είναι:

Αργιλικά Εδάφη Ε1 και Ε2

- H_S= 60m: n_{ck}= 67 – 72 (Κριτήριο η μη υπέρβαση του ±30%)
- H_S= 40m: n_{ck}= 43 – 46 (Κριτήριο η μη υπέρβαση του ±30%)
- H_S= 20m: n_{ck}= 22 – 25 (Κριτήριο η μη υπέρβαση του ±25%)

Αμμώδες Έδαφος Ε4

- H_S= 60m: n_{ck}= 44 – 46 (Κριτήριο η μη υπέρβαση του ±20%)
- H_S= 40m: n_{ck}= 27 – 33 (Κριτήριο η μη υπέρβαση του ±25%)
- H_S= 20m: n_{ck}= 15 – 20 (Κριτήριο η μη υπέρβαση του ±25%)

Οι συγκρίσεις του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων με τα υπόλοιπα προσομοιώματα, θα γίνουν με χρήση των παρακάτω τιμών για τον συντελεστή συσχέτισης:

Αργιλικά Εδάφη Ε1 και Ε2

H_S= 60m: n_{ck}= 70, H_S= 40m: n_{ck}= 45 και H_S= 20m: n_{ck}= 24.

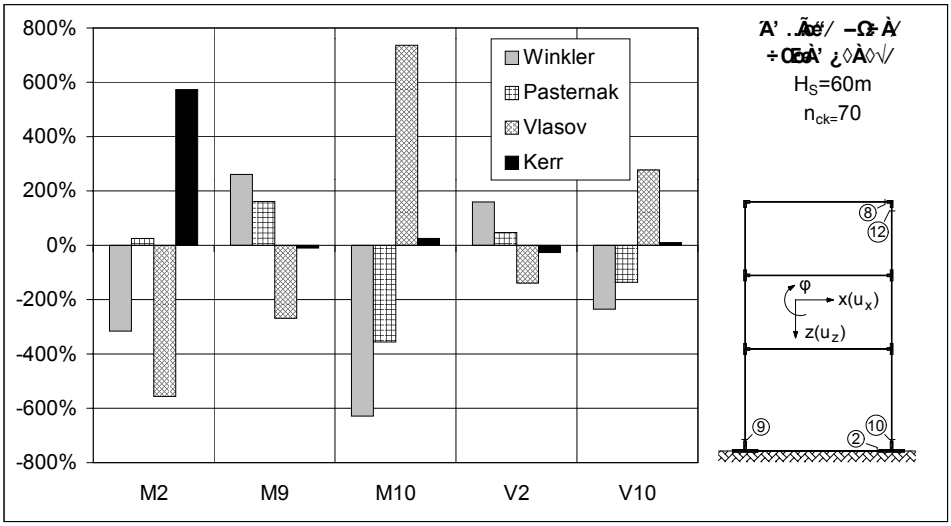
Αμμώδες Έδαφος Ε4

H_S= 60m: n_{ck}= 45, H_S= 40m: n_{ck}= 30 και H_S= 20m: n_{ck}= 20.

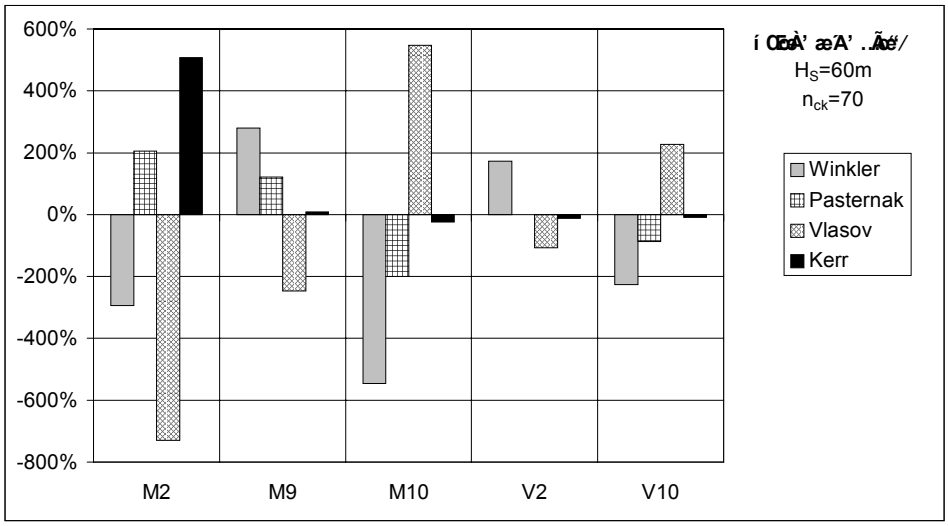
Τα αποτελέσματα των συγκρίσεων αυτών δίνονται στους παρακάτω πίνακες και σχήματα, και ακολουθεί η καταγραφή των σχετικών συμπερασμάτων.

Πίνακας 5.37. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προσομοιωμάτων όσον αφορά τα ελεγχόμενα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π3. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

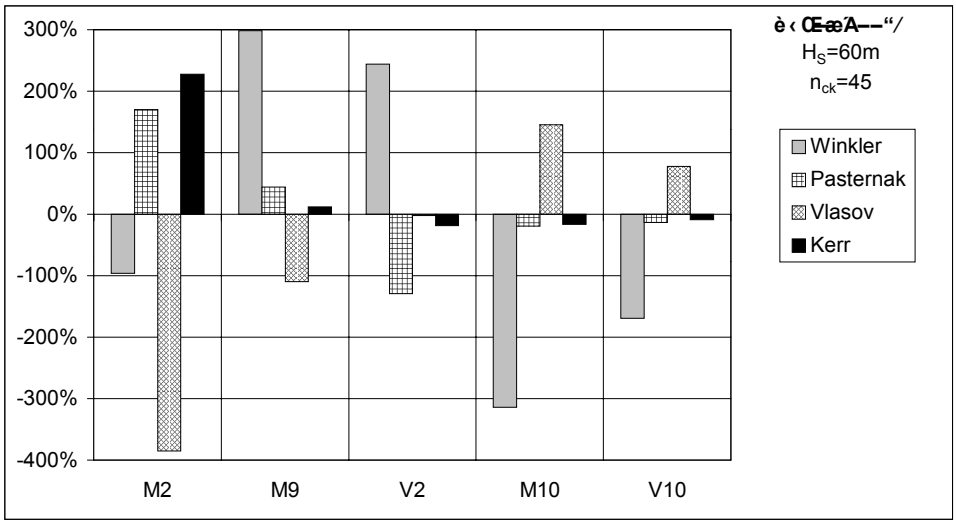
Απόλυτες τιμές						
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr
E1	M_2	-8,06	17,40	-10,09	36,76	-54,24
	M_8	-99,04	-95,43	-96,93	-103,38	-99,24
	M_9	-84,45	-304,31	-221,21	142,94	-76,23
	M_{10}	27,68	-146,12	-70,93	231,46	34,89
	M_{12}	-91,27	-89,46	-90,20	-93,47	-91,38
	V_2	58,20	151,22	85,50	-22,83	42,57
	V_{10}	30,49	-41,26	-11,25	115,14	33,72
	V_{12}	65,17	60,01	62,17	71,28	65,41
E2	M_2	-8,77	16,93	-26,81	55,15	-53,31
	M_8	-99,14	-95,45	-97,73	-102,93	-99,02
	M_9	-79,88	-303,28	-176,58	116,99	-86,54
	M_{10}	32,61	-145,25	-32,55	211,16	24,79
	M_{12}	-91,32	-89,47	-90,60	-93,23	-91,27
	V_2	55,30	150,72	55,49	-3,85	48,68
	V_{10}	32,48	-40,90	4,49	106,37	29,45
	V_{12}	65,31	60,03	63,31	70,65	65,11
E4	M_2	-32,84	-1,29	-88,77	93,71	-107,58
	M_8	-159,27	-152,81	-158,75	-162,28	-158,98
	M_9	-129,77	-516,72	-186,43	12,42	-145,32
	M_{10}	100,15	-214,69	80,55	246,19	83,75
	M_{12}	-144,12	-140,90	-143,84	-145,62	-143,98
	V_2	72,23	248,39	-21,03	70,40	58,62
	V_{10}	76,01	-52,69	65,92	135,03	69,33
	V_{12}	106,99	97,73	106,28	111,26	106,52
Αποκλίσεις						
		Προσομοίωμα:	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr
E1		M_2	-315,85%	25,13%	-556,04%	572,95%
		M_8	-3,64%	-2,13%	4,39%	0,21%
		M_9	260,35%	161,94%	-269,26%	-9,73%
		M_{10}	-627,89%	-356,26%	736,21%	26,04%
		M_{12}	-1,98%	-1,17%	2,41%	0,12%
		V_2	159,83%	46,91%	-139,23%	-26,86%
		V_{10}	-235,32%	-136,88%	277,62%	10,60%
		V_{12}	-7,92%	-4,60%	9,38%	0,37%
E2		M_2	-293,08%	205,65%	-728,89%	507,92%
		M_8	-3,72%	-1,43%	3,82%	-0,12%
		M_9	279,67%	121,06%	-246,45%	8,33%
		M_{10}	-545,42%	-199,82%	547,52%	-23,99%
		M_{12}	-2,02%	-0,79%	2,09%	-0,05%
		V_2	172,55%	0,35%	-106,96%	-11,98%
		V_{10}	-225,92%	-86,17%	227,48%	-9,34%
		V_{12}	-8,08%	-3,07%	8,18%	-0,31%
E4		M_2	-96,09%	170,32%	-385,36%	227,59%
		M_8	-4,06%	-0,33%	1,89%	-0,18%
		M_9	298,18%	43,66%	-109,57%	11,98%
		M_{10}	-314,36%	-19,57%	145,82%	-16,37%
		M_{12}	-2,24%	-0,19%	1,04%	-0,10%
		V_2	243,89%	-129,12%	-2,53%	-18,84%
		V_{10}	-169,32%	-13,28%	77,65%	-8,79%
		V_{12}	-8,66%	-0,67%	3,99%	-0,44%



(α)



(β)



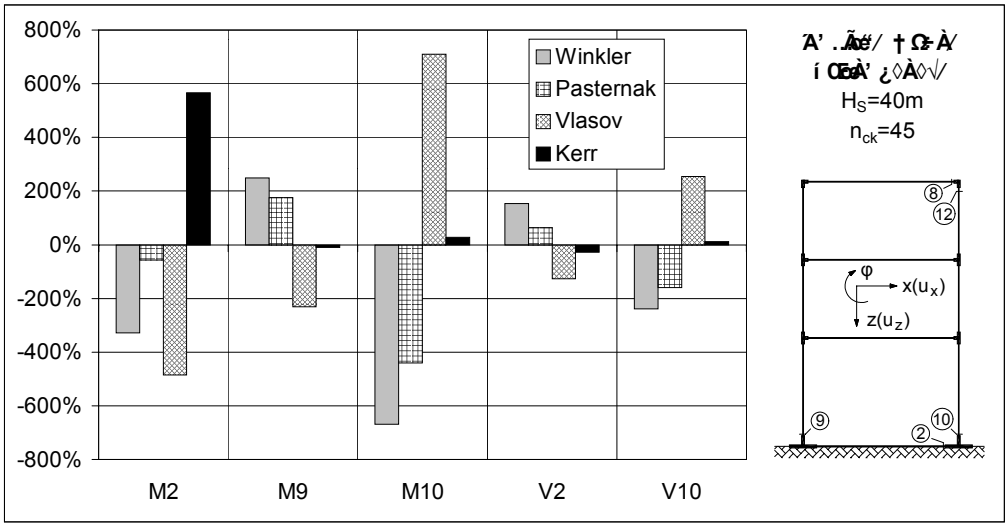
(γ)

Σχήμα 5.88. Αποκλίσεις των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς, όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π3, για όλες τις εξεταζόμενες κατηγορίες εδάφους. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=60m.

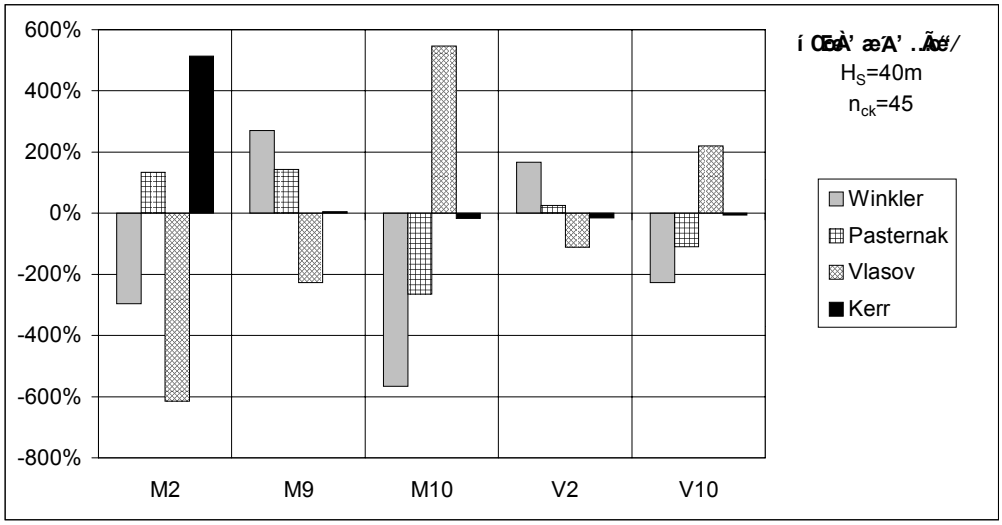
Πίνακας 5.38. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προσομοιωμάτων όσον αφορά τα ελεγχόμενα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π3. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=40m.

Απόλυτες τιμές						
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr
E1	M_2	-7,40	16,91	-3,14	28,55	-49,28
	M_8	-99,00	-95,45	-96,61	-102,85	-99,20
	M_9	-86,63	-303,23	-239,17	113,02	-78,45
	M_{10}	25,51	-145,21	-86,52	206,45	32,85
	M_{12}	-91,24	-89,47	-90,04	-93,20	-91,36
	V_2	59,36	150,70	97,77	-15,45	43,15
	V_{10}	29,58	-40,88	-17,61	104,72	32,83
	V_{12}	65,10	60,04	61,71	70,53	65,35
E2	M_2	-8,27	16,25	-19,37	42,61	-50,71
	M_8	-99,11	-95,48	-97,34	-102,69	-99,04
	M_9	-81,61	-301,77	-197,92	103,76	-85,84
	M_{10}	30,89	-143,97	-51,05	199,77	25,56
	M_{12}	-91,30	-89,48	-90,41	-93,11	-91,28
	V_2	56,23	149,99	70,68	-6,22	47,83
	V_{10}	31,75	-40,37	-3,06	101,70	29,75
	V_{12}	65,26	60,07	62,76	70,31	65,13
E4	M_2	-32,45	-6,83	-88,16	75,75	-102,77
	M_8	-159,23	-153,04	-158,29	-162,16	-158,93
	M_9	-131,62	-504,05	-211,98	6,15	-147,24
	M_{10}	98,31	-203,95	57,71	239,91	81,60
	M_{12}	-144,10	-141,01	-143,61	-145,57	-143,96
	V_2	73,23	242,14	3,28	52,20	60,34
	V_{10}	75,24	-48,25	56,74	132,65	68,47
	V_{12}	106,93	98,05	105,61	111,09	106,46

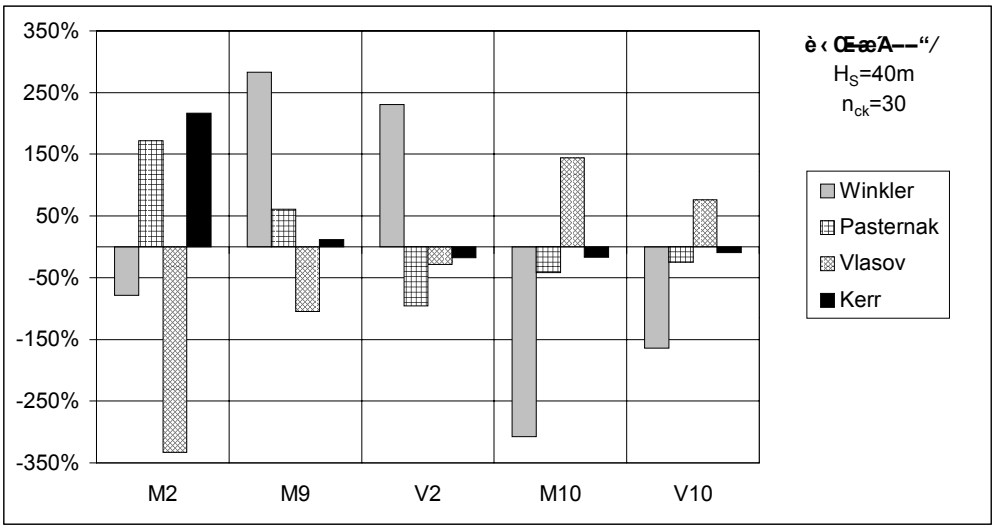
Αποκλίσεις					
	Προσομοίωμα:	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr
E1	M_2	-328,53%	-57,53%	-485,77%	565,93%
	M_8	-3,59%	-2,42%	3,89%	0,20%
	M_9	250,03%	176,08%	-230,46%	-9,44%
	M_{10}	-669,22%	-439,17%	709,29%	28,76%
	M_{12}	-1,94%	-1,31%	2,15%	0,13%
	V_2	153,87%	64,71%	-126,03%	-27,31%
	V_{10}	-238,21%	-159,53%	254,03%	10,98%
	V_{12}	-7,78%	-5,20%	8,34%	0,38%
E2	M_2	-296,52%	134,22%	-615,21%	513,14%
	M_8	-3,67%	-1,78%	3,61%	-0,07%
	M_9	269,76%	142,51%	-227,15%	5,19%
	M_{10}	-566,08%	-265,26%	546,70%	-17,27%
	M_{12}	-1,99%	-0,97%	1,99%	-0,02%
	V_2	166,74%	25,70%	-111,06%	-14,94%
	V_{10}	-227,15%	-109,64%	220,31%	-6,29%
	V_{12}	-7,95%	-3,83%	7,74%	-0,20%
E4	M_2	-78,94%	171,68%	-333,42%	216,72%
	M_8	-3,89%	-0,59%	1,84%	-0,19%
	M_9	282,96%	61,05%	-104,67%	11,87%
	M_{10}	-307,46%	-41,30%	144,03%	-16,99%
	M_{12}	-2,14%	-0,34%	1,02%	-0,10%
	V_2	230,65%	-95,53%	-28,72%	-17,60%
	V_{10}	-164,13%	-24,58%	76,30%	-8,99%
	V_{12}	-8,31%	-1,23%	3,89%	-0,44%



(α)



(β)

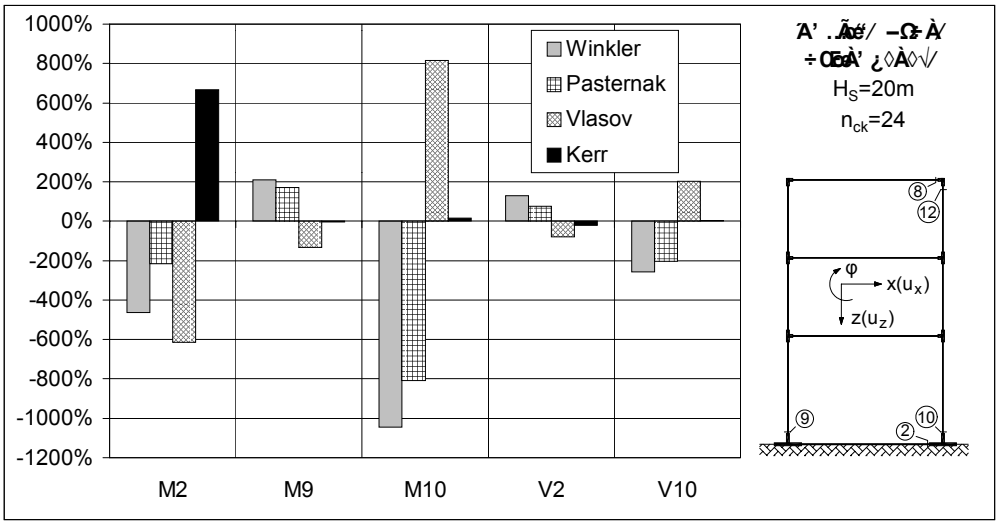


(γ)

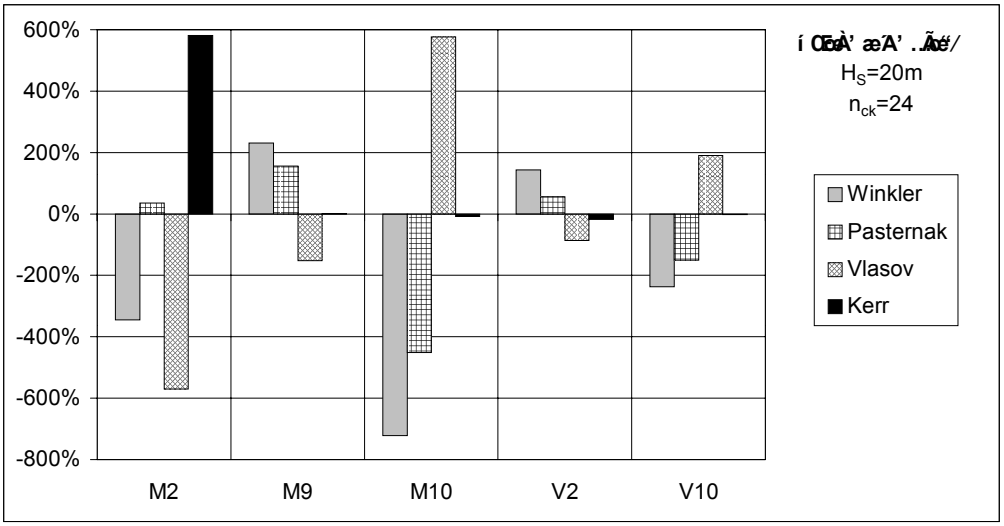
Σχήμα 5.89. Αποκλίσεις των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς, όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π3, για όλες τις εξεταζόμενες κατηγορίες εδάφους. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=40m.

Πίνακας 5.39. Απόλυτες τιμές και αποκλίσεις από την λύση αναφοράς, των προσομοιωμάτων όσον αφορά τα ελεγχόμενα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π3. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=20m.

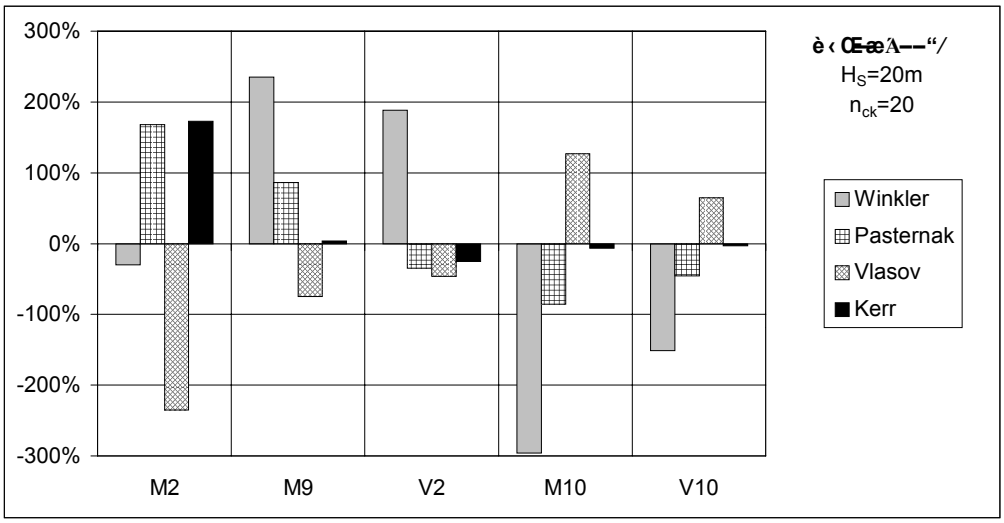
Απόλυτες τιμές						
Προσομοίωμα:		FEM	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr
E1	M_2	-4,27	15,48	4,90	21,94	-32,71
	M_8	-98,77	-95,51	-96,20	-101,40	-98,86
	M_9	-97,02	-300,05	-262,11	31,09	-94,11
	M_{10}	15,09	-142,52	-107,00	138,17	17,59
	M_{12}	-91,13	-89,50	-89,84	-92,46	-91,19
	V_2	65,00	149,16	115,32	12,84	51,13
	V_{10}	25,22	-39,77	-25,84	76,24	26,35
	V_{12}	64,79	60,12	61,12	68,48	64,88
E2	M_2	-5,84	14,27	-7,92	27,44	-39,80
	M_8	-98,93	-95,55	-96,77	-101,69	-98,93
	M_9	-89,94	-297,34	-230,10	47,35	-91,21
	M_{10}	22,54	-140,24	-79,29	152,41	20,59
	M_{12}	-91,21	-89,52	-90,12	-92,61	-91,22
	V_2	60,72	147,85	94,25	7,75	49,62
	V_{10}	28,26	-38,82	-14,52	82,02	27,59
	V_{12}	65,01	60,18	61,94	68,89	64,97
E4	M_2	-30,59	-21,43	-82,00	41,36	-83,52
	M_8	-159,04	-153,64	-157,40	-161,41	-158,97
	M_9	-140,37	-470,32	-261,57	-35,74	-145,88
	M_{10}	89,53	-175,31	12,96	203,14	84,01
	M_{12}	-144,00	-141,31	-143,17	-145,20	-143,98
	V_2	78,06	225,31	51,09	41,92	58,18
	V_{10}	71,57	-36,42	38,85	117,73	69,26
	V_{12}	106,67	98,90	104,33	110,01	106,52
Αποκλίσεις						
		Προσομοίωμα:	Winkler	Pasternak	Vlasov	Kerr
E1		M_2	-462,55%	-214,71%	-613,81%	665,97%
		M_8	-3,30%	-2,61%	2,66%	0,10%
		M_9	209,26%	170,16%	-132,04%	-3,00%
		M_{10}	-1044,50%	-809,05%	815,67%	16,59%
		M_{12}	-1,79%	-1,42%	1,46%	0,06%
		V_2	129,48%	77,42%	-80,25%	-21,34%
		V_{10}	-257,69%	-202,45%	202,30%	4,50%
		V_{12}	-7,21%	-5,66%	5,69%	0,14%
E2		M_2	-344,31%	35,67%	-569,92%	581,55%
		M_8	-3,41%	-2,19%	2,79%	0,00%
		M_9	230,60%	155,84%	-152,65%	1,41%
		M_{10}	-722,20%	-451,76%	576,17%	-8,63%
		M_{12}	-1,85%	-1,19%	1,53%	0,01%
		V_2	143,50%	55,23%	-87,24%	-18,28%
		V_{10}	-237,38%	-151,36%	190,24%	-2,37%
		V_{12}	-7,42%	-4,73%	5,98%	-0,06%
E4		M_2	-29,96%	168,05%	-235,21%	173,04%
		M_8	-3,40%	-1,03%	1,49%	-0,04%
		M_9	235,05%	86,35%	-74,54%	3,92%
		M_{10}	-295,81%	-85,53%	126,90%	-6,17%
		M_{12}	-1,87%	-0,57%	0,83%	-0,02%
		V_2	188,66%	-34,54%	-46,29%	-25,47%
		V_{10}	-150,89%	-45,71%	64,50%	-3,22%
		V_{12}	-7,28%	-2,20%	3,13%	-0,14%



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 5.90. Αποκλίσεις των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων από την λύση αναφοράς, όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη του πλαισίου Π3, για όλες τις εξεταζόμενες κατηγορίες εδάφους. Βάθος ελαστικού υποβάθρου H_S=20m.

Από τους πίνακες 5.37 – 5.39 και τα σχήματα 5.88 – 5.90, προκύπτει μια σειρά γενικών συμπερασμάτων, που αφορούν την διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων της επίλυσης του πλαισίου Π3 από τα αποτελέσματα των επιλύσεων των πλαισίων Π1 και Π2. Τα συμπεράσματα αυτά είναι:

- Οι πολύ μεγάλες αποκλίσεις όλων των προσομοιωμάτων – πλην του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων – όσον αφορά τις ροπές των στύλων στην στάθμη της θεμελίωσης (ροπές M_9 και M_{10}). Πιο συγκεκριμένα, στην παρούσα περίπτωση οι αποκλίσεις κυμαίνονται σε γενικές γραμμές – πλην ορισμένων εξαιρέσεων – σε επίπεδα άνω του 160%, ενώ στις προηγούμενες περιπτώσεις δεν ξεπερνούσαν το 80% (βλέπε Πίνακες 5.28 – 5.30 και Πίνακες 5.20 – 5.22).
- Ανάλογη είναι και η αστοχία των προσομοιωμάτων – πλην του προσομοιώματος του Kerr – όσον αφορά την τέμνουσα που αναπτύσσεται στη βάση του δεξιού υποστυλώματος του πλαισίου (τέμνουσα V_{10}). Έτσι, ενώ στην παρούσα περίπτωση οι αποκλίσεις είναι κατά κανόνα μεγαλύτερες του 100%, στις προηγούμενες περιπτώσεις δεν υπερέβαιναν το 60%.
- Σημαντική είναι και η διαφοροποίηση που παρατηρείται στις αποκλίσεις των εντατικών μεγεθών στην κορυφή του πλαισίου (M_8, M_{12},V_{12}). Έτσι, ενώ κατά τις επιλύσεις των πλαισίων Π1 και Π2 τα συγκεκριμένα εντατικά μεγέθη δεν απέκλιναν περισσότερο από 3.5% από τις τιμές αναφοράς, στην παρούσα περίπτωση ξεπερνούν πολλές φορές το 4.0%. Ειδικότερα, τις μεγαλύτερες αποκλίσεις εμφανίζει η τέμνουσα V_{12} καθώς σε πολλές περιπτώσεις ξεπερνά το 5%, ενώ σε ορισμένες αγγίζει και το 9%. Εξαίρεση αποτελεί το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων το οποίο και στην παρούσα περίπτωση αποδίδει αποκλίσεις χαμηλότερες του 1.0%.

Πέραν των παραπάνω συμπερασμάτων, θα εκτεθεί και μια σειρά παρατηρήσεων που αφορούν την συγκριτική αξιολόγηση των προσομοιωμάτων:

Άργιλος μέσης σκληρότητας

Παρά τις μεγάλες του αποκλίσεις, το προσομοίωμα του Pasternak παρουσιάζεται το πιο αποδοτικό προσομοίωμα μετά το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων, και αποδίδει μάλιστα πολύ καλύτερη τιμή από το τελευταίο για την ροπή M_2. Χαρακτηριστικά αναφέρεται, ότι στην περίπτωση H_S=60m η απόκλιση που αποδίδει το προσομοίωμα του Pasternak είναι της τάξης του 25%, ενώ η αντίστοιχη απόκλιση που αποδίδει το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων είναι άνω του 550%. Τα προσομοιώματα των Vlasov και Winkler αποδίδουν τις μεγαλύτερες αποκλίσεις για όλα τα ελεγχόμενα εντατικά μεγέθη.

Σκληρή Άργιλος

Δεν παρατηρείται ουσιαστική διαφοροποίηση, κυρίως όσον αφορά την ιεράρχηση των προσομοιωμάτων με βάση την αποδοτικότητα τους. Ελαφρά βελτίωση της απόδοσης τους, σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση, παρουσιάζουν σε γενικές γραμμές όλα τα προσομοιώματα.

Πυκνή Άμμος

Ούτε και στην περίπτωση αυτή μεταβάλλεται η ιεράρχηση των προσομοιωμάτων με βάση την αποδοτικότητα τους. Ωστόσο, η σημαντική διαφοροποίηση που εμφανίζεται αφορά την περαιτέρω μείωση των αποκλίσεων που αποδίδουν όλα τα προσομοιώματα, σε σχέση με τις δυο προηγούμενες περιπτώσεις των αργιλικών εδαφών.

Γενικά συμπεράσματα από τις επιλύσεις των τριών πλαισίων

Μεγέθη μετακινήσεων

Από τις αναλύσεις των τριών πλαισίων προέκυψε το συμπέρασμα, ότι ανεξαρτήτως του τύπου του εδάφους και του βάθους του ελαστικού υποβάθρου, η τιμή του συντελεστή συσχέτισης n_{ck}=17 προσδίδει στο προσομοίωμα των τριών παραμέτρων την δυνατότητα απόδοσης αποκλίσεων που δεν υπερβαίνουν το 18 – 22%. Εξαίρεση στο συμπέρασμα αυτό, αποτελούν οι στροφές φ_2 και φ_8 για τις οποίες η συγκεκριμένη τιμή του συντελεστή συσχέτισης δεν επιτυγχάνει σε μεμονωμένες μόνο περιπτώσεις ικανοποιητική σύγκλιση.

Γενικότερα, αν ληφθούν για τον συντελεστή n_{ck} τιμές από το διάστημα 15 – 20 τότε οι αποκλίσεις των μεγεθών μετακίνησης δεν υπερβαίνουν, πλην ορισμένων εξαιρέσεων που αφορούν κυρίως τις στροφές φ_2 και φ_8, το 25%. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει για τα αργιλικά εδάφη Ε1 και Ε2, και για τα τρία πλαίσια που επιλύθηκαν. Για το αμμώδες έδαφος Ε4, το αντίστοιχο διάστημα είναι 20 – 25. Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση Ε4 / H_S=20m κατά την επίλυση του πλαισίου Π1. Θα πρέπει επίσης να υπογραμμισθεί, ότι τα μικρά μεγέθη των πεδίων που δόθηκαν παραπάνω, οφείλονται κατά κύριο λόγο στα στροφικά μεγέθη μετακίνησης φ_2 και φ_8. Αν περιοριστεί κανείς στην απαίτηση για σύγκλιση μόνον των μεταφορικών μεγεθών μετακίνησης u_{z9}, u_{z10}, u_{x8}, τα αντίστοιχα μεγέθη είναι σημαντικά μεγαλύτερα.

Για τιμές του συντελεστή συσχέτισης που ανήκουν στα πεδία που παρουσιάστηκαν παραπάνω, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων υπερτερεί σαφώς των προσομοιωμάτων των Vlasov, Pasternak και Winkler. Εξαίρεση στον κανόνα αυτό, αποτελούν μεμονωμένες περιπτώσεις οι οποίες αφορούν την σύγκλιση της στροφής φ_2, για την οποία αποδίδει ικανοποιητικότερες τιμές το προσομοίωμα του Pasternak.

Όσον αφορά την απόδοση των υπολοίπων προσομοιωμάτων, μπορούν σε γενικές γραμμές να τονιστούν τα εξής:

- Το προσομοίωμα του Vlasov αποδίδει σε γενικές γραμμές καλύτερα τις κατακόρυφες μετακινήσεις, αν εξαιρεθεί το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων. Το γεγονός αυτό, οφείλεται στη δυνατότητα του προσομοιώματος στο να λαμβάνει υπόψη την επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν των εδραζόμενων φορέων. Αντίθετα, δεν αποδίδει ικανοποιητικές τιμές για τις στροφές φ_2 και φ_8, οι αποκλίσεις των οποίων σε ορισμένες περιπτώσεις είναι πολύ μεγάλες. Αντίστοιχη αδυναμία παρουσιάζει και στην σύγκλιση της οριζόντιας μετακίνησης του τελευταίου ορόφου του πλαισίου, με μικρότερες όμως αποκλίσεις.
- Το προσομοίωμα του Pasternak εμφανίζεται πολύ αποδοτικό στην προσέγγιση των στροφικών μεγεθών μετακίνησης φ_2 και φ_8. Σε πολλές περιπτώσεις μάλιστα, αποδίδει εφάμιλλα ή και ελαφρώς καλύτερα αποτελέσματα από το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων, κυρίως για μικρά βάθη υποβάθρου. Αντίθετα, υστερεί στην προσέγγιση των κατακορύφων μετακινήσεων u_{z9}, u_{z10}, λόγω του γεγονότος ότι δεν λαμβάνει υπόψη την επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν των πλαισίων.
- Τέλος το προσομοίωμα του Winkler, αποδίδει με μεγάλη διαφορά τα χειρότερα αποτελέσματα σε όλες τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν, και για κάθε ένα από τα μεγέθη μετακίνησης που εξετάστηκαν, με πολύ ελάχιστες εξαιρέσεις.

Μεγέθη έντασης

Όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη, δεν στάθηκε δυνατός ο προσδιορισμός ενός συγκεκριμένου και κοινού για όλες τις περιπτώσεις συντελεστή συσχέτισης με τον οποίον επιτυγχάνεται η σύγκλιση όλων των μεγεθών έντασης που εξετάστηκαν. Όπως αποδείχθηκε, οι βέλτιστοι συντελεστές συσχέτισης μπορούν να ομαδοποιηθούν με βάση το βάθος του ελαστικού υποβάθρου H_S, ανεξαρτήτως του τύπου του εδάφους. Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση επίλυσης του πλαισίου Π3 κατά την οποία υφίσταται διαφοροποίηση μεταξύ των αργιλικών (Ε1 και Ε2), και του αμμώδους εδάφους (Ε4) που μελετήθηκαν. Επιπλέον, υφίστανται διαφοροποιήσεις στις τιμές των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης, και μεταξύ των επιλύσεων των τριών πλαισίων. Έτσι τίθεται το ερώτημα της ύπαρξης ή όχι, κάποιου συγκεκριμένου νόμου μεταβολής των βέλτιστων συντελεστών n_{ck}, αλλά και το ερώτημα της συσχέτισης τους με κάποιο μέγεθος που χαρακτηρίζει τη δοκό ή το έδαφος θεμελίωσης. Για το λόγο αυτό διερευνήθηκε, όπως και στην περίπτωση του παραδείγματος δοκού πεπερασμένου μήκους υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση (Παράγραφος 5.3.2.1), η δυνατότητα συσχετισμού του n_{ck} με το δείκτη λ των Vlasov και Leont'ev (Σχέση 2.134), ο οποίος αποτελεί ένα μέτρο της σχετικής δυσκαμψίας εδάφους / δοκού. Έτσι, ομαδοποιήθηκαν τα δεδομένα των πινάκων 5.16, 5.27 και 5.35, με κριτήριο το βάθος του ελαστικού υποβάθρου και τοποθετήθηκαν στον πίνακα 5.40. Λαμβάνοντας από κάθε κατηγορία επίλυσης μια ενδεικτική τιμή για το συντελεστή συσχέτισης (στήλη 6) με κριτήριο να βρίσκεται εντός του εύρους του εκάστοτε βέλτιστου πεδίου τιμών, σχηματίστηκαν τα διαγράμματα n_{ck} – λ που δίνονται στο σχήμα 5.91. Με βάση τα ζεύγη τιμών (n_{ck}, λ) πραγματοποιήθηκε μια ανάλυση μη γραμμικής παλινδρόμησης, προκειμένου να διερευνηθεί η δυνατότητα σχηματισμού μιας σχέσης που να συνδέει τα μεγέθη αυτά. Πράγματι, όπως καθίσταται σαφές από την μελέτη του σχήματος 5.91, υπάρχει συσχέτιση των n_{ck} και λ, μέσω των ακολούθων εκθετικών σχέσεων:

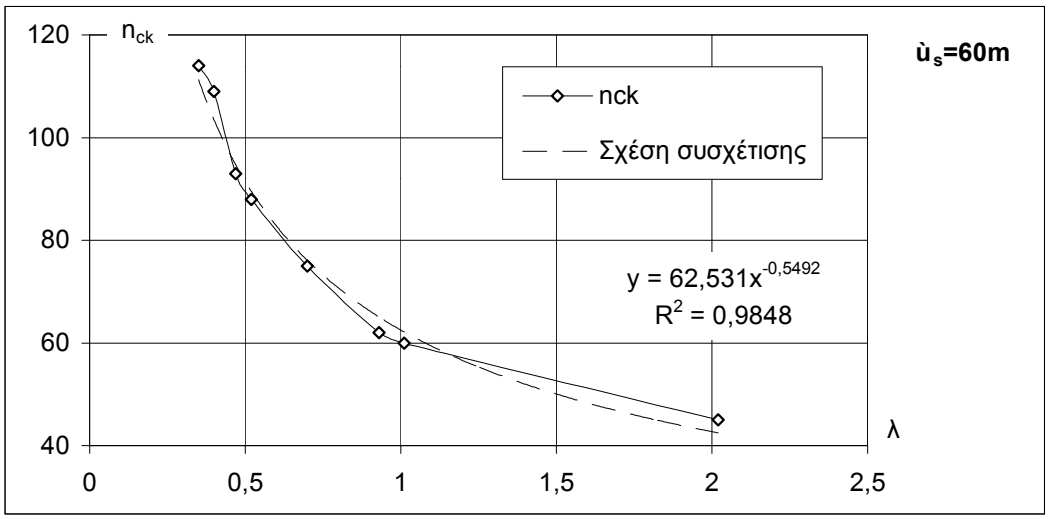
- Βάθος H_S= 60m $\quad n_{ck} = 62{,}531\lambda^{-0{,}5492} \quad (R^2 = 0{,}985)$
- Βάθος H_S= 40m $\quad n_{ck} = 37{,}615\lambda^{-0{,}5043} \quad (R^2 = 0{,}997)$
- Βάθος H_S= 20m $\quad n_{ck} = 22{,}627\lambda^{-0{,}1865} \quad (R^2 = 0{,}99)$

Οι σχέσεις αυτές έχουν δείκτες συσχέτισης κοντά στη μονάδα ($R^2 \approx 1$), κάτι που σημαίνει ότι τα μεγέθη n_{ck} και λ έχουν υψηλό βαθμό συσχέτισης. Επομένως, με την εφαρμογή των σχέσεων αυτών είναι δυνατό να εκτιμηθεί ο βέλτιστος κατά περίπτωση συντελεστής συσχέτισης των ελατηριακών σταθερών του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων, έτσι ώστε να αποδίδονται τιμές εντατικών μεγεθών που δεν αποκλίνουν περισσότερο από 20 – 25% από τις τιμές αναφοράς των συγκεκριμένων εντατικών μεγεθών στην περιοχή της θεμελίωσης του πλαισίου. Δεν θα πρέπει όμως να λησμονείται το γεγονός, ότι οι παραπάνω σχέσεις δεν καλύπτουν την καμπτική ροπή που αναπτύσσεται στο άκρο της δοκού θεμελίωσης (ροπή M_2) η οποία όπως επανειλημμένως τονίστηκε, λαμβάνει τις βέλτιστες τιμές της για τιμές του συντελεστή συσχέτισης που βρίσκονται εκτός των πεδίων που αποδίδουν τις βέλτιστες τιμές των υπολοίπων εντατικών μεγεθών στην περιοχή της θεμελίωσης. Ωστόσο όπως αποδείχθηκε, ακόμα και για αυτές τις τιμές του n_{ck} η τιμή της ροπής M_2 όπως προκύπτει από την εφαρμογή του προσομοιώματος των τριών

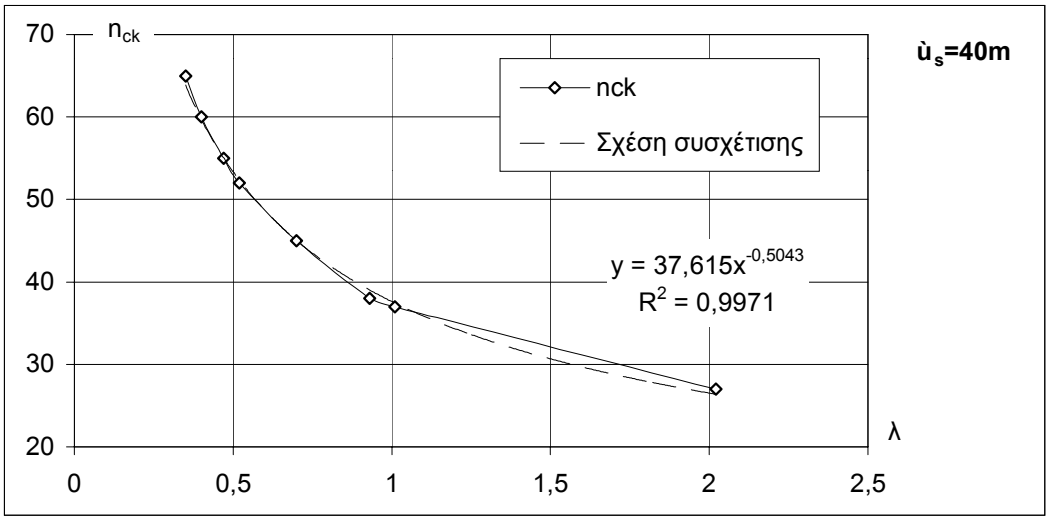
παραμέτρων είναι στην πλειοψηφία των περιπτώσεων εγγύτερα στην τιμή αναφοράς, απ' ότι οι τιμές που προκύπτουν από την εφαρμογή των υπολοίπων προσομοιωμάτων που εξετάστηκαν.

Πίνακας 5.40. Πίνακας τιμών των συντελεστών συσχέτισης που επιτυγχάνουν την μη υπέρβαση του 20 – 25% από την λύση αναφοράς στις τιμές των εντατικών μεγεθών στην περιοχή της θεμελίωσης των πλαισίων, συναρτήσει του δείκτη λ.

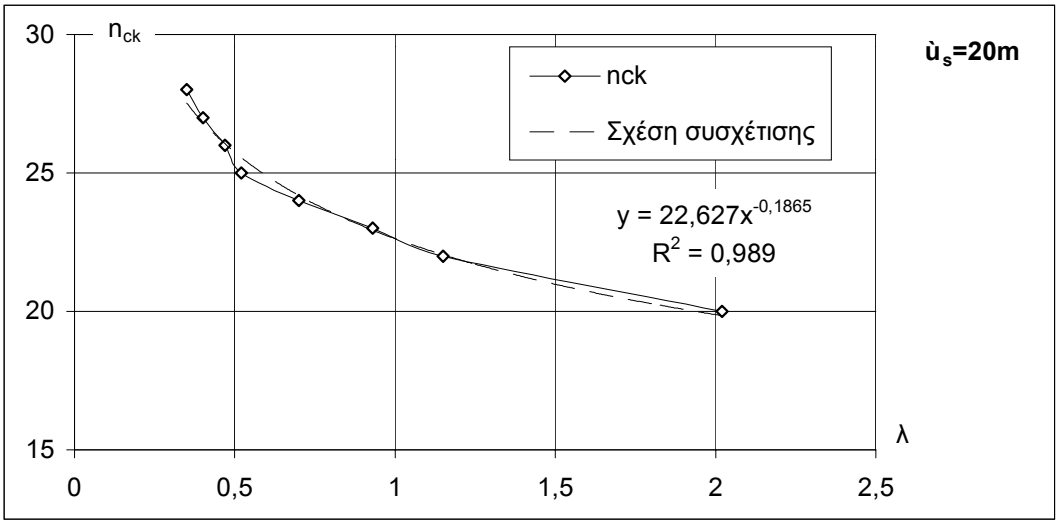
Βάθος	Έδαφος	Πλαίσιο	Συντελεστής λ	Εύρος συντελεστή n_{ck}	Ενδεικτική τιμή του n_{ck}	Τιμή του n_{ck} από τη σχέση παλινδρόμησης
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
H_S=60m	Ε1	Π1	0.47	65 – 110	93	95
		Π2	0.35	77 – 115	114	111
		Π3	1.01	58 – 64	60	62
	Ε2	Π1	0.52	85 – 135	88	90
		Π2	0.40	109 – 145	110	106
		Π3	1.15	68 – 84	68	60
	Ε3	Π1	0.93	55 – 90	62	65
		Π2	0.70	74 – 100	75	76
		Π3	2.02	40 – 50	45	43
H_S=40m	Ε1	Π1	0.47	38 – 70	55	55
		Π2	0.35	44 – 67	65	64
		Π3	1.01	33 – 47	37	37
	Ε2	Π1	0.52	50 – 80	52	52
		Π2	0.40	54 – 90	60	60
		Π3	1.15	44 – 55	44	35
	Ε3	Π1	0.93	34 – 55	38	39
		Π2	0.70	42 – 59	45	45
		Π3	2.02	27 – 33	27	27
H_S=20m	Ε1	Π1	0.47	17 – 30	26	26
		Π2	0.35	18 – 29	28	28
		Π3	1.01	21 – 25	22	23
	Ε2	Π1	0.52	20 – 36	25	26
		Π2	0.40	22 – 36	27	27
		Π3	1.15	22 – 29	22	22
	Ε3	Π1	0.93	16 – 28	23	23
		Π2	0.70	18 – 26	24	24
		Π3	2.02	15 – 20	20	20



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 5.91 Ανάλυση μη γραμμικής παλινδρόμησης μεταξύ των συντελεστών συσχέτισης n_{ck}, και των δεικτών σχετικής δυσκαμψίας εδάφους / δοκού λ.

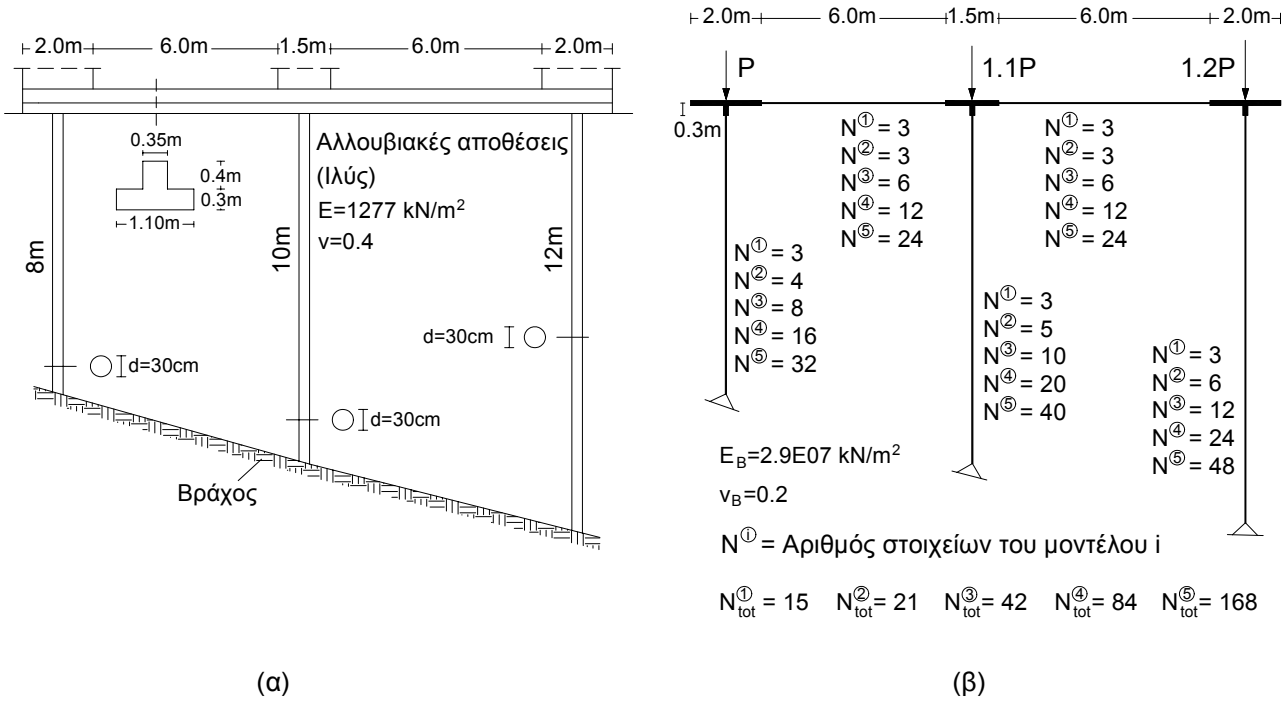
Όσον αφορά την απόδοση των υπολοίπων προσομοιωμάτων στην προσέγγιση των εντατικών μεγεθών στην περιοχή της θεμελίωσης, προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

– Σε γενικές γραμμές, το προσομοίωμα του Pasternak παρά τις μεγάλες αποκλίσεις που αποδίδει σε πολλές από τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, εμφανίζεται το πιο αποδοτικό από τα υπόλοιπα.
– Τα προσομοιώματα του Vlasov και του Winkler, παρουσιάζονται υποδεέστερα του προσομοιώματος του Pasternak. Η υπεροχή όμως του ενός έναντι του άλλου, αποδεικνύεται ότι εξαρτάται κατά κύριο λόγο από τον συντελεστή σχετικής δυσκαμψίας εδάφους / δοκού λ, και κατά δεύτερο λόγο από το βάθος H_S του ελαστικού υποβάθρου. Έτσι:
  - Όταν λ<0.5 το προσομοίωμα του Winkler υπερτερεί του προσομοιώματος του Vlasov, ανεξαρτήτως του βάθους του ελαστικού υποβάθρου. Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό το γεγονός, ότι για τις μικρές τιμές του λ η απόδοση του προσομοιώματος του Winkler πλησιάζει σε γενικές γραμμές την απόδοση του προσομοιώματος του Pasternak.
  - Όταν 0.5<λ<0.9 η απόδοση των προσομοιωμάτων εξαρτάται από το βάθος του ελαστικού υποβάθρου H_S. Πιο συγκεκριμένα:
    - Όταν H_S=60 μέτρα, το προσομοίωμα του Winkler εμφανίζεται αποδοτικότερο για τιμές του λ κοντά στο κάτω όριο του διαστήματος (δηλαδή όταν λ→0.5), ενώ για μεγαλύτερες τιμές του λ, εμφανίζεται αποδοτικότερο το προσομοίωμα του Vlasov.
    - Όταν H_S=40 μέτρα, ισχύουν σε γενικές γραμμές αυτά που ισχύουν και στην περίπτωση που H_S=60 μέτρα. Η μόνη διαφορά είναι ότι στην παρούσα περίπτωση, η υπεροχή του προσομοιώματος του Vlasov έναντι του προσομοιώματος του Winkler γίνεται σαφής μόνο όταν λ>0.7.
    - Όταν το βάθος του ελαστικού υποβάθρου είναι ίσο με 20 μέτρα, το προσομοίωμα του Vlasov υπερέχει του προσομοιώματος του Winkler σε όλο το εύρος του διαστήματος (0.5 – 0.9).
  - Όταν λ>0.9 το βάθος του ελαστικού υποβάθρου δεν έχει τόσο μεγάλη επιρροή, καθώς σε γενικές γραμμές το προσομοίωμα του Vlasov αποδεικνύεται αποδοτικότερο του προσομοιώματος του Winkler, ειδικότερα στις περιπτώσεις που το ελαστικό υπόβαθρο έχει μέσο ή μικρό βάθος. Για μεγάλα βάθη, οι μεταξύ των δυο προσομοιωμάτων διαφορές αμβλύνονται για τιμές του λ κοντά στο όριο λ=0.9. Αντίθετα όσο το λ λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές, το προσομοίωμα του Vlasov παρουσιάζει και πάλι σαφή υπεροχή έναντι του προσομοιώματος του Winkler.

Τέλος, όσον αφορά τα εξεταζόμενα εντατικά μεγέθη στην κορυφή του πλαισίου, όλα τα προσομοιώματα αποδεικνύονται ιδιαίτερα αποδοτικά κυρίως κατά τις επιλύσεις των πλαισίων Π1 και Π2, όπου δεν παρατηρούνται αποκλίσεις μεγαλύτερες του 2 – 3% από τις τιμές αναφοράς. Αντίθετα, ελαφρά αυξημένες εμφανίζονται οι αποκλίσεις κατά την επίλυση του πλαισίου Π3. Πιο συγκεκριμένα, αποδίδονται αποκλίσεις που στην περίπτωση της τέμνουσας V_{12} φτάνουν – σε μεμονωμένες περιπτώσεις πάντως – έως και το 9%. Οι αποκλίσεις των υπόλοιπων μεγεθών που εξετάστηκαν πλησιάζουν, χωρίς να ξεπερνούν, σε ορισμένες περιπτώσεις το 5%. Έτσι, μπορεί να διατυπωθεί το συμπέρασμα ότι ο τύπος του εδαφικού προσομοιώματος δεν επηρεάζει σχεδόν καθόλου τις αποκλίσεις των τιμών των εντατικών μεγεθών στην κορυφή του πλαισίου, καθώς όλα τα προσομοιώματα αποδίδουν πολύ ικανοποιητικές τιμές, πλην ελαχίστων εξαιρέσεων.

5.3.3.3. Παράδειγμα 3γ: Ελαστική ευστάθεια πασσαλοθεμελίωσης

Το παράδειγμα αυτό αφορά την μελέτη της ελαστικής ευστάθειας φορέως θεμελίωσης, ο οποίος αποτελείται από μια πεδιλοδοκό που εδράζεται μέσω πασσάλων σε ακλόνητο υπόβαθρο – βράχο (Σχήμα 5.92α). Το περιβάλλον τους πασσάλους έδαφος θεωρείται ελαστικώς ενδόσιμο και κατά την οριζόντια έννοια. Γίνεται η παραδοχή, ότι η ανωδομή είναι εξαιρετικά δύσκαμπτη (αποτελούμενη από ισχυρά τοιχώματα) και επομένως το πιθανό πρόβλημα ευστάθειας περιορίζεται στη θεμελίωση. Οι πάσσαλοι μεταβιβάζουν το κατακόρυφο φορτίο τους στο βραχώδες υπόβαθρο εξ ολοκλήρου μέσω της αιχμής τους, και όχι με πλευρική τριβή. Το γεγονός αυτό, κάνει περιττή την προσομοίωση των αντιστάσεων λόγω τριβών (π.χ. με ελατήρια τοποθετημένα κατά την έννοια του άξονα του πασσάλου). Έτσι, το εν προκειμένω ενδεικνυόμενο και επαρκές προσομοίωμα είναι αυτό που δίνεται στο σχήμα 5.92β, σε πέντε παραλλαγές ως προς την πυκνότητα της διακριτοποίησης.



Σχήμα 5.92. Φορέας θεμελίωσης με πασσάλους με ακλόνητη έδραση στην αιχμή τους, εντός οριζοντίως ενδόσιμου εδάφους: (α) Δεδομένα πραγματικού φορέα, (β) Πέντε συμβατικά προσομοιώματα διαφορετικής πυκνότητας κανάβου.

Στόχοι του παραδείγματος είναι:

- η εφαρμογή του νέου πεπερασμένου στοιχείου που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, σε προβλήματα στα οποία απαιτείται ο προσδιορισμός κρίσιμου φορτίου λυγισμού και,
- η διερεύνηση της επιρροής της δεύτερης εδαφικής παραμέτρου στην τιμή του κρισίμου φορτίου λυγισμού, μέσω επίλυσης με το αντίστοιχο προσομοίωμα.

Για το σκοπό αυτό πραγματοποιήθηκαν καταρχήν επιλύσεις με το προσομοίωμα του Winkler, προκειμένου να πραγματοποιηθεί σύγκριση της τιμής του κρίσιμου φορτίου λυγισμού που προκύπτει αφενός από την χρήση του νέου στοιχείου, και αφετέρου από την χρήση συμβατικών τεχνικών προσομοίωσης.

Για τις επιλύσεις με το νέο πεπερασμένο στοιχείο συντάχθηκε ειδικός αλγόριθμος, σε γλώσσα Fortran 90, μέσω του οποίου επιτυγχάνεται ο προσδιορισμός του κρίσιμου φορτίου λυγισμού του φορέα θεμελίωσης του σχήματος 5.92, τόσο με το προσομοίωμα του Winkler, όσο και με το προσομοίωμα του Pasternak. Ο αλγόριθμος αυτός πέραν του γεγονότος ότι είναι επαναληπτικός, απαραίτητη προϋπόθεση καθώς καλείται να επιλύσει ένα μη γραμμικό πρόβλημα, έχει ενσωματωμένες όλες τις περιπτώσεις λύσεις των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος οι οποίες είναι πιθανό να εμφανιστούν (Περιπτώσεις 1 και 3, Σχήμα 4.2).

Πρέπει να τονιστεί εδώ, ότι στην περίπτωση των κατά την οριζόντια έννοια ελαστικώς εδραζομένων πασσάλων, η θεώρηση του προσομοιώματος των δυο παραμέτρων θέτει το πρόβλημα προσδιορισμού μιας δεύτερης παραμέτρου ανάλογης του δείκτη οριζόντιας αντίστασης του εδάφους k_{Gh}, και το πρώτο ερώτημα που τίθεται είναι κατά πόσο η τιμή της παραμέτρου αυτής διαφοροποιείται – και κατά ποιο τρόπο – από την αντίστοιχη τιμή της παραμέτρου k_G που αφορά τις συνθήκες κατακόρυφης φόρτισης. Στα πλαίσια του παραδείγματος τέθηκε αρχικά $k_{Gh}=k_G$, ενώ για λόγους διερεύνησης της επιρροής της τιμής της δεύτερης παραμέτρου επί της τιμής του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, τέθηκαν διαδοχικά $k_{Gh}= (1/2)k_G$ και $k_{Gh}= 2k_G$.

Όσον αφορά τις τιμές του δείκτη οριζόντιας αντίστασης του εδάφους k_h, έγιναν οι εξής παραδοχές:

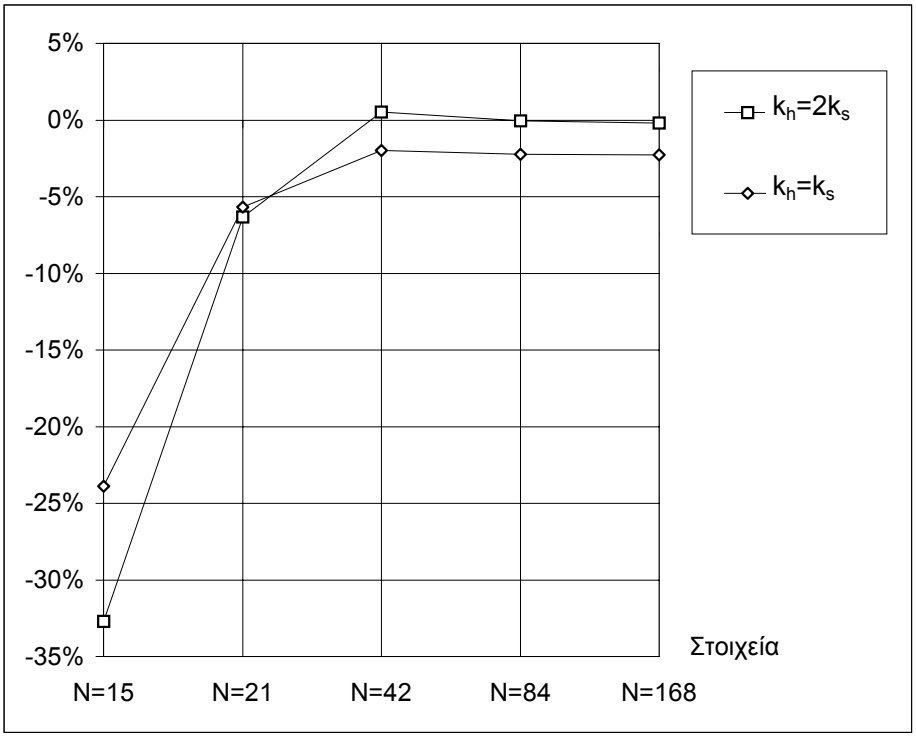
1. Θεωρήθηκε ότι το έδαφος θεμελίωσης αποτελείται από προσχώσεις μαλακής ιλύος (soft alluvial silt), και επομένως ο συντελεστής οριζόντιας αντίστασης μπορεί να θεωρηθεί σταθερός σε σχέση με το βάθος (Terzaghi 1955).
2. Οι ελαστικές σταθερές του εδάφους θεωρήθηκαν ίσες με $E=1277kN/m^2$ και $\nu=0.4$ (Bowles (1988), σελ.776).
3. Ο δείκτης οριζόντιας αντίστασης του εδάφους k_h θεωρήθηκε ότι:
   α. προκύπτει με διπλασιασμό της τιμής του δείκτη k_s (Bowles (1988)),
   β. είναι ίσος με το δείκτη κατακόρυφης αντίστασης k_s (Terzaghi (1955)).
4. Για τον υπολογισμό των δεικτών k_s και k_h χρησιμοποιήθηκε η σχέση που πρότεινε ο Biot (1937), και με βάση τα γεωμετρικά δεδομένα των διατομών της πεδιλοδοκού και των πασσάλων, τα οποία δίνονται στο σχήμα 5.92α, προέκυψαν οι εξής τιμές:
   – $k_h=3671\ kN/m^3$ και $k_s=566.21\ kN/m^3$ με βάση την παραδοχή $k_h=2k_s$
   – $k_h=1835\ kN/m^3$ και $k_s=566.21\ kN/m^3$ με βάση την παραδοχή $k_h=k_s$.

Για τον υπολογισμό της τιμής της δεύτερης παραμέτρου χρησιμοποιήθηκε και στο παρόν παράδειγμα, το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov (Vallabhan και Das (1988)). Θεωρήθηκε ότι το υπόστρωμα της ιλύος έχει μέσο βάθος 10m με ελαστικές σταθερές $E=1277kN/m^2$ και $\nu=0.4$, και η τιμή η οποία προέκυψε με βάση τη διαδικασία αυτή είναι $k_G=1457.2$ kN. Για λόγους σύγκρισης με τις προηγούμενες επιλύσεις, ως τιμές των δεικτών k_s και k_h χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές που δόθηκαν παραπάνω.

Οι αρχικές συγκρίσεις περιορίστηκαν στις επιλύσεις με το προσομοίωμα του Winkler προκειμένου να συγκριθούν τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την επίλυση με το προτεινόμενο στοιχείο, με τα αντίστοιχα αποτελέσματα από συμβατικές αναλύσεις με προσομοιώματα διαφορετικής πυκνότητας διακριτοποίησης (Σχήμα 5.92β), οι οποίες έγιναν με το πρόγραμμα SAP2000. Οι συγκρίσεις αυτές πραγματοποιήθηκαν με τις παραδοχές $k_h=k_s$ και $k_h=2k_s$.

Στο σχήμα 5.93 δίνονται οι αποκλίσεις των τιμών του κρίσιμου φορτίου λυγισμού που προκύπτουν από τις επιλύσεις με τα συμβατικά προσομοιώματα, από την τιμή που προκύπτει από την επίλυση με το προτεινόμενο στοιχείο. Όπως φαίνεται από το σχήμα αυτό, η προσέγγιση της ακριβούς τιμής του κρίσιμου φορτίου με απόκλιση κάτω του 1% επιτυγχάνεται από συμβατικά προσομοιώματα που αποτελούνται από 42 ή και περισσότερα συμβατικά στοιχεία δοκού. Το προσομοίωμα που αποτελείται από 21 στοιχεία επιτυγχάνει αποτελέσματα με αποκλίσεις της τάξης του 7%, οι οποίες μπορεί να θεωρηθούν αποδεκτές. Τέλος, το προσομοίωμα των 15 στοιχείων αποδίδει αποκλίσεις της τάξης του 30% και επομένως θα πρέπει να θεωρηθεί απορριπτέο.

Στο σημείο αυτό, ενδιαφέρον παρουσιάζει και η σύγκριση του αριθμού των στοιχείων που απαιτούνται για την προσέγγιση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, με τον αντίστοιχο αριθμό στοιχείων που απαιτούνται για την σύγκλιση των εντατικών μεγεθών κατά την ανάλυση στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης που παρουσιάστηκε στο Παράδειγμα 3α (Παράγραφος 5.3.3.1). Από την σύγκριση αυτή προκύπτει το συμπέρασμα, ότι τα συμβατικά προσομοιώματα έχουν μικρότερες απαιτήσεις σε αριθμό στοιχείων για τον αξιόπιστο υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Πιο συγκεκριμένα, κατά την ανάλυση στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης και με στόχο τον αξιόπιστο υπολογισμό των εντατικών μεγεθών, απαιτήθηκαν 20 στοιχεία για την προσομοίωση μιας μόνον δοκού μήκους 13.8 μέτρων. Αντίστοιχα, για τον αξιόπιστο προσδιορισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού απαιτείται προσομοίωμα αποτελούμενο από 21 στοιχεία, για την προσομοίωση ενός φορέα ο οποίος αποτελείται από 5 δομικά στοιχεία με μήκη από 8 έως 10 μέτρα.



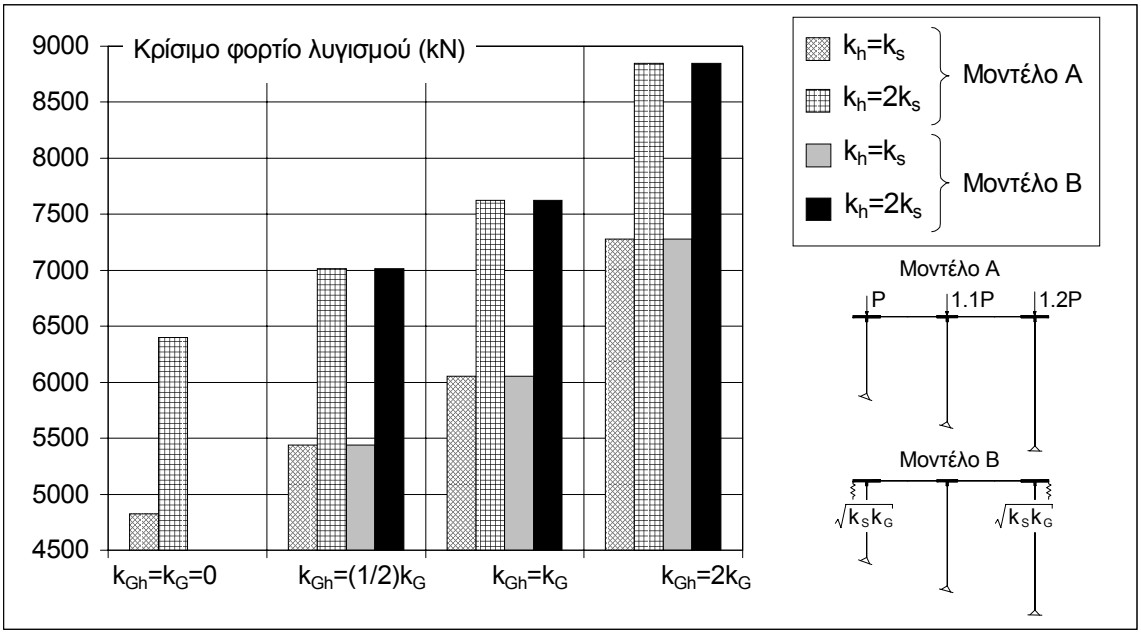
Σχήμα 5.93. Αποκλίσεις της τιμής του κρίσιμου φορτίου λυγισμού που προκύπτει από την επίλυση συμβατικών προσομοιωμάτων (επίλυση με το πρόγραμμα SAP2000), από την αντίστοιχη τιμή που προκύπτει από την επίλυση με το προτεινόμενο στοιχείο δοκού.

Στην δεύτερη κατηγορία αναλύσεων χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά το προτεινόμενο νέο στοιχείο. Το έδαφος προσομοιώθηκε αφενός με το προσομοίωμα του Winkler, και αφετέρου με το προσομοίωμα των δύο παραμέτρων. Όσον αφορά στη χρήση του προσομοιώματος των δύο παραμέτρων, θα πρέπει να τονιστεί ότι έγιναν αναλύσεις τόσο με θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν του φορέα, όσο και χωρίς τη θεώρησης της επιρροής αυτής. Στόχος των αναλύσεων αυτών, είναι ο προσδιορισμός του εύρους διακύμανσης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως προκύπτει από τις διάφορες παραδοχές που γίνονται για τις τιμές των εδαφικών παραμέτρων. Από το Σχήμα 5.94 προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

1. Όσον αναφορά τις επιλύσεις με το προσομοίωμα του Winkler, η διαφορά της τιμής του κρίσιμου φορτίου λυγισμού υπό την παραδοχή $k_h=2k_S$ έναντι της τιμής του υπό την παραδοχή $k_h=k_S$ είναι της τάξης του 33%, διαφορά η οποία μπορεί να θεωρηθεί σημαντική. Δηλαδή, ο διπλασιασμός της τιμής του δείκτη της οριζόντιας αντίστασης του εδάφους προκαλεί μείωση του φορτίου λυγισμού κατά το ένα τρίτο, κάτι που σημαίνει ότι η ευαισθησία που παρουσιάζει η τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού στην μεταβολή της παραμέτρου «οριζόντια αντίδραση του εδάφους» είναι σημαντική.
2. Η θεώρηση του προσομοιώματος των δύο παραμέτρων αυξάνει εν γένει τις τιμές του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο, αφού η θεώρηση του διατμητικού επιπέδου στα πλαίσια του εν λόγω προσομοιώματος, προσδίδει στην ελαστική έδραση της δοκού μια πρόσθετη αντίσταση στις εγκάρσιες μετακινήσεις. Όσον αφορά την παραδοχή για τη συσχέτιση των k_{Gh} και k_G, μπορούν να επισημανθούν τα εξής:

   α. Αν θεωρηθεί ότι $k_h=k_S$, τότε η μεταβολή της τιμής του κρίσιμου φορτίου λυγισμού μεταξύ των περιπτώσεων στις οποίες γίνονται οι παραδοχές $k_{Gh}=(1/2)k_G$ και $k_{Gh}=2k_G$, είναι της τάξης του 25%.

   β. Με τη θεώρηση ότι $k_h=2k_S$ η αντίστοιχη μεταβολή είναι της τάξης του 21%.



Σχήμα 5.94. Τιμές του κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως προκύπτουν από τη χρήση των προσομοιωμάτων μιας και δυο παραμέτρων, και τις παραδοχές για τις τιμές των παραμέτρων τους.

Επομένως το εύρος διακύμανσης της τιμής του κρίσιμου φορτίου λυγισμού που προκύπτει από τις αναλύσεις με τις δυο ακραίες, στα πλαίσια του παρόντος παραδείγματος, τιμές της παραμέτρου k_{Gh} οι οποίες διαφέρουν μεταξύ τους κατά 300%, είναι της τάξης του 20 – 25%. Αυτό σημαίνει ότι η μεταβολή της τιμής της παραμέτρου k_{Gh}, δεν έχει ιδιαίτερα μεγάλη επιρροή στην τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού.

3. Η διαφορά στις τιμές του κρίσιμου φορτίου λυγισμού που προκύπτουν με ή χωρίς τη θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν του φορέα, είναι αμελητέα σε κάθε περίπτωση. Το συμπέρασμα αυτό, μπορεί να αποδοθεί στην μορφή έδρασης του φορέα: Το γεγονός ότι ο φορέας θεμελίωσης εδράζεται επί ακλόνητης βάσης, μειώνει σε πολύ μεγάλο βαθμό τις κατακόρυφες μετακινήσεις των άκρων του. Όπως όμως είναι γνωστό, η «ακαμψία» που προσδίδει στην θεμελίωση η θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν αυτής, και η οποία εκφράζεται με τη βοήθεια κατακόρυφων μεταφορικών ελατηρίων (Μοντέλο Β, Σχήμα 5.94), είναι ανάλογη των μετακινήσεων αυτών (Vallabhan και Das (1991)). Επομένως στην παρούσα περίπτωση, η επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν του φορέα θεμελίωσης δε μεταβάλλει ουσιαστικά την συμπεριφορά του.
4. Η διαφορά μεταξύ του προσομοιώματος των δύο παραμέτρων και του προσομοιώματος του Winkler κυμαίνεται από 11% έως 33% για την περίπτωση στην οποία γίνεται η παραδοχή $k_h=k_S$, και από 9% έως 28% για την περίπτωση που $k_h=2k_S$. Τα δυο αυτά διαστήματα τιμών των αποκλίσεων (11% - 33%, και 9% - 28%) εξαρτώνται από την παραδοχή που γίνεται για το συσχετισμό τιμών των k_{Gh} και k_G. Πρόκειται χωρίς αμφιβολία για αξιοσημείωτες διαφορές που δεν μπορούν να αγνοηθούν, και επομένως καθιστούν τον ακριβέστερο προσδιορισμό της παραμέτρου k_{Gh}, αντικείμενο που χρήζει περαιτέρω διερεύνησης. Μια τέτοια διερεύνηση ξεφεύγει από τους στόχους της παρούσας διατριβής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. Συμπεράσματα

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής πραγματοποιήθηκε διερεύνηση της εφαρμοσιμότητας και της αξιοπιστίας των εδαφικών προσομοιωμάτων δυο και τριών παραμέτρων, καθώς και η ανάπτυξη ενός γενικευμένου πεπερασμένου στοιχείου δοκού προσανατολισμένου κυρίως στην προσομοίωση δομικών στοιχείων φορέων θεμελίωσης, αλλά και με δυνατότητες αντιμετώπισης προβλημάτων προσομοίωσης δομικών στοιχείων ανωδομής. Επιπλέον, εφαρμόστηκε μια αναλυτική μέθοδος προσδιορισμού των τιμών των δυο εδαφικών παραμέτρων, η οποία στηρίζεται στις εξισώσεις του γνωστού και τεκμηριωμένου τροποποιημένου προσομοιώματος δυο παραμέτρων του Vlasov, ενώ διερευνήθηκε και η δυνατότητα συσχετισμού των τιμών των τριών παραμέτρων του αντίστοιχου προσομοιώματος.

Με δεδομένη την από πολλές πηγές τεκμηριωμένη αδυναμία του ευρέως διαδεδομένου στην πράξη (λόγω κυρίως της απλοϊκότητάς του) προσομοιώματος του Winkler, τέθηκε ο προβληματισμός της προσομοίωσης του εδάφους θεμελίωσης και με διαφορετικά προσομοιώματα. Κριτήριο για τον χαρακτηρισμό ενός εδαφικού προσομοιώματος ως καταλληλότερου για εφαρμογή έναντι του προσομοιώματος Winkler θεωρήθηκε κατά πρώτο και κύριο λόγο η δυνατότητά του να αντιμετωπίσει με αξιόπιστο τρόπο προβλήματα που δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν με το προσομοίωμα του Winkler, και κατά δεύτερο λόγο η απλότητα της μαθηματικής του διατύπωσης, έτσι ώστε να είναι δυνατή η χρήση του στην ανάπτυξη σχετικών υπολογιστικών «εργαλείων» χωρίς να υφίσταται ανάγκη προσφυγής σε πολύπλοκες αριθμητικώς διαδικασίες.

Για την εκπλήρωση των παραπάνω στόχων ακολουθήθηκε μια ερευνητική διαδικασία, που συνίσταται σε μια αλληλουχία ενεργειών, οι οποίες συνοπτικά είναι οι εξής:

- Διερεύνηση της βιβλιογραφίας που αφορά τόσο στο πρόβλημα της προσομοίωσης του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου, όσο και στο πρόβλημα της ελαστικώς εδραζόμενης δοκού.
- Συγκέντρωση από τη διεθνή βιβλιογραφία των απαραιτήτων στοιχείων που αφορούν στα χαρακτηριστικά των προσομοιωμάτων, όπως αυτά διαμορφώνονται από τις παραδοχές βάσει των οποίων έχουν αναπτυχθεί, και εντοπισμός αναλόγων ερευνητικών προσπαθειών του παρελθόντος, όσον αφορά στο πρόβλημα της ελαστικώς εδραζόμενης δοκού.
- Επιλογή των εδαφικών προσομοιωμάτων, τα οποία αφενός εκπληρώνουν τα κριτήρια που έχουν τεθεί και αφετέρου εμφανίζονται να μην έχουν διερευνηθεί επαρκώς κατά το παρελθόν.
- Σχηματισμός των υπολογιστικών «εργαλείων» που απαιτούνται για την αντιμετώπιση του προβλήματος της προσομοίωσης φορέων θεμελίωσης με τα επιλεγμένα εδαφικά προσομοιώματα, για χρήση – εφαρμογή στα πλαίσια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.
- Σχηματισμός μητρώων δυσκαμψίας, μεταφοράς και φόρτισης τόσο με βάση τις αναλυτικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τα επιλεγμένα προσομοιώματα όσο και με βάση αλγεβρικές συναρτήσεις παρεμβολής. Με τα υπολογιστικά αυτά «εργαλεία» είναι δυνατή η αντιμετώπιση διαφόρων προβλημάτων πέραν αυτών που αντιμετωπίστηκαν στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, όπως π.χ.

προβλήματα αποκόλλησης δοκών από το έδαφος, τα οποία παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην περίπτωση του αντισεισμικού υπολογισμού των κατασκευών.

- Επίλυση σειράς κατάλληλων αριθμητικών παραδειγμάτων προκείμενου να ελεγχθούν και σε συνθήκες πρακτικών εφαρμογών οι δυνατότητες και η αξιοπιστία των επιλεγμένων εδαφικών προσομοιωμάτων. Για τον υπολογισμό των τιμών των εδαφικών παραμέτρων που είναι απαραίτητες για τις επιλύσεις των παραδειγμάτων αυτών, γίνεται εφαρμογή του τροποποιημένου προσομοιώματος του Vlasov σε συνθήκες επίπεδης έντασης.

Από την παραπάνω διαδικασία προέκυψε μια σειρά διαπιστώσεων που παρουσιάζονται ακολούθως με την σειρά που ανέκυψαν κατά την διερεύνηση:

- Το πρόβλημα της προσομοίωσης του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου με προσομοιώματα διαφορετικά του προσομοιώματος Winkler έχει τεθεί από τις αρχές της δεκαετίας του 1920. Μέσα στα επόμενα 45 χρόνια προτάθηκε μια σειρά μηχανικών προσομοιωμάτων, τα οποία ήταν προσανατολισμένα στην αντιμετώπιση των αδυναμιών του προσομοιώματος αυτού. Η ανάπτυξη των νέων προσομοιωμάτων στόχευε κυρίως στην εξάλειψη της απόλυτης ασυνέχειας που προσδίδει στην εδαφική συμπεριφορά η προσομοίωση με το μοντέλο Winkler. Το σύνολο των προταθέντων προσομοιωμάτων μπορεί να διαχωριστεί είτε με βάση την μεθοδολογία ανάπτυξης τους, είτε με βάση τον αριθμό των διαφορετικών παραμέτρων που υπεισέρχονται στις μαθηματικές τους διατυπώσεις. Με βάση το δεύτερο αυτό κριτήριο, τα προσομοιώματα διακρίνονται σε προσομοιώματα μιας, δυο, τριών και περισσοτέρων παραμέτρων.
- Ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον εμφανίζουν τα προσομοιώματα των δυο και των τριών παραμέτρων, αφενός επειδή οι μαθηματικές τους διατυπώσεις παραμένουν σχετικά απλές, παρά το γεγονός ότι είναι πιο σύνθετες από την αντίστοιχη μαθηματική διατύπωση του προσομοιώματος Winkler, και αφετέρου επειδή εμφανίζουν ευελιξία στην προσαρμογή τους σε διάφορες απαιτήσεις προσομοίωσης.
- Από τα προσομοιώματα των δυο παραμέτρων ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το προσομοίωμα του Vlasov για δυο κυρίως λόγους. Ο πρώτος αφορά στη μεθοδολογία βάσει της οποίας έχει σχηματιστεί η μαθηματική του διατύπωση. Πρόκειται για μια ιδιαίτερα ευέλικτη διατύπωση που επιτρέπει την ανάπτυξη κατάλληλων παραλλαγών – τροποποιήσεων του προσομοιώματος, οι οποίες είναι χρήσιμες για την παραμετρική διερεύνηση διαφόρων προβλημάτων. Ο δεύτερος λόγος είναι απόρροια του πρώτου και αφορά σε μια εκδοχή του προσομοιώματος (τροποποιημένο προσομοίωμα Vlasov των Jones και Xenophontos) με την οποία επιτυγχάνεται ο συσχετισμός – και κατά συνέπεια και ο υπολογισμός – των παραμέτρων του από άλλες γνωστές παραμέτρους, όπως οι ελαστικές σταθερές του υποβάθρου θεμελίωσης και τα χαρακτηριστικά γεωμετρίας και φόρτισης των στοιχείων της. Επιπλέον, ένα γενικό χαρακτηριστικό των προσομοιωμάτων των δυο παραμέτρων (ανεξαρτήτως του τρόπου ανάπτυξης τους) αποτελεί η δυνατότητα που έχει η μαθηματική τους διατύπωση να μετατρέπεται στην αντίστοιχη διατύπωση του προσομοιώματος Winkler με απλό μηδενισμό της τιμής της δεύτερης παραμέτρου τους.
- Τα προσομοιώματα των τριών παραμέτρων εμφανίζουν διευρυμένες δυνατότητες εφαρμογής, καθώς στηρίζονται σε μηχανικά μοντέλα που εμπεριέχουν ως υποσύνολα τους επί μέρους στοιχεία των προσομοιωμάτων των δυο και της μιας παραμέτρου. Το πιο αντιπροσωπευτικό προσομοίωμα της

κατηγορίας αυτής είναι το προσομοίωμα του Kerr, το μηχανικό μοντέλο του οποίου συντίθεται από δυο επίπεδα κατακορύφων μεταφορικών ελατηρίων, μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται ένα διατμητικό επίπεδο. Το προσομοίωμα του Kerr αποτελεί επέκταση του μηχανικού προσομοιώματος δυο παραμέτρων του Pasternak, το οποίο σχηματίζεται από μια σειρά κατακόρυφων μεταφορικών ελατηρίων που συνδέονται στις κεφαλές τους μέσω ενός διατμητικού επιπέδου. Ένα άλλο πολύ βασικό χαρακτηριστικό του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων του Kerr είναι η δυνατότητα που παρέχει στον έλεγχο του βαθμού «ασυνέχειας» των μετακινήσεων της επιφάνειας του εδάφους. Έτσι, ενώ τα προσομοιώματα μιας και δυο παραμέτρων αντιπροσωπεύουν τις δυο ακραίες καταστάσεις, δηλαδή της απόλυτης ασυνέχειας και της συνέχειας των μετακινήσεων της επιφανείας του εδάφους αντιστοίχως, το προσομοίωμα του Kerr επιτυγχάνει με την εισαγωγή της τρίτης παραμέτρου την γεφύρωση του χάσματος αυτού, αφού είναι σε θέση να προσομοιώσει την μερική συνέχεια (πολύ απότομη μεταβολή) των μετακινήσεων, η οποία πολλές φορές εμφανίζεται μεταξύ της φορτιζόμενης και της αφόρτιστης επιφάνειας του εδάφους. Επομένως, το προσομοίωμα του Kerr μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση πολλών κατηγοριών εδαφών, αφού με την κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων του επιτυγχάνεται μια ικανοποιητική προσέγγιση των αντιστοίχων διαγραμμάτων τάσεων – παραμορφώσεων της επιφάνειας θεμελίωσης.

- Από την αξιολόγηση της βιβλιογραφίας που αφορά στο πρόβλημα της ελαστικώς εδραζόμενης δοκού προέκυψαν τα εξής συμπεράσματα:

  - Η προσομοίωση της αλληλεπίδρασης των δοκών με έδαφος προσομοιούμενο με το προσομοίωμα μιας παραμέτρου (Winkler) έχει αντιμετωπιστεί πλήρως από πλευράς της μητρωικής μεθόδου ανάλυσης των κατασκευών, καθώς είναι διαθέσιμη η πλήρης σειρά μητρώων δυσκαμψίας, μεταφοράς και φόρτισης για κάθε πρόβλημα που είναι δυνατό να εμφανιστεί στην πράξη.

  - Το αντίστοιχο πρόβλημα που αφορά στα προσομοιώματα των δυο παραμέτρων είναι και αυτό σε μεγάλο βαθμό διερευνημένο, αν και εμφανίζονται διάφορα κενά στην κάλυψη όλων των δυνατών περιπτώσεων λύσης που μπορεί να λάβει η διαφορική εξίσωση του προβλήματος.

  - Το πρόβλημα της κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων δεν έχει μπορέσει να αντιμετωπιστεί κατά το παρελθόν στα πλαίσια της μητρωικής ανάλυσης των κατασκευών, παρά μόνον για ορισμένες ειδικές περιπτώσεις, οι οποίες όμως αφορούν μόνο προβλήματα απολύτως στερεών σωμάτων υπό στατική ή δυναμική φόρτιση. Ωστόσο, τονίζεται ότι το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων έχει αποτελέσει αντικείμενο έρευνας κυρίως από εδαφοτεχνικής πλευράς, και μάλιστα υπάρχουν αρκετά πρόσφατες αναφορές με αξιοσημείωτα αποτελέσματα.

  - Δεν διατίθεται ένα (γενικευμένο) πεπερασμένο στοιχείο δοκού προσανατολισμένο στην εύκολη, αποτελεσματική και αξιόπιστη αντιμετώπιση συχνά εμφανιζόμενων στην πράξη προβλημάτων προσομοίωσης στοιχείων θεμελίωσης (πεδιλοδοκών και πεδίλων υποστυλωμάτων με προσομοίωση της συνεχούς ελαστικής έδρασης χωρίς την προσφυγή σε διακριτοποίηση και εισαγωγή μεμονωμένων ελατηρίων).

- Δεν έχει διερευνηθεί επαρκώς η επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν των φορέων θεμελίωσης επί των εντασιακών και παραμορφωσιακών μεγεθών των δομικών τους στοιχείων.

- Από την κατάστρωση και την επίλυση των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα των δοκών Euler ή Timoshenko επί ελαστικού υποβάθρου του Kerr προέκυψαν τα εξής:

  - Οι εξισώσεις του εν λόγω προσομοιώματος ταυτίζονται με εκείνες που διέπουν το αντίστοιχο πρόβλημα της κάμψης δοκών επί του διευρυμένου προσομοιώματος του Vlasov με τη θεώρηση και των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου, με τις εξισώσεις του προσομοιώματος του Vlasov με δυο ελαστικά στρώματα διαφορετικών ελαστικών σταθερών, αλλά και με τις εξισώσεις του προσομοιώματος τριών παραμέτρων του Reisnner. Επομένως, η επίλυση τους δίνει την ευχέρεια αντιμετώπισης ενός μεγάλου εύρους προβλημάτων.

  - Η λύση των εξισώσεων δεν είναι μονοσήμαντη, καθώς επηρεάζεται από τις τιμές των παραμέτρων του εδάφους και των χαρακτηριστικών της γεωμετρίας και της φόρτισης της δοκού. Από το μεγάλο εύρος των πιθανών περιπτώσεων λύσης, εκείνες που έχουν πραγματικό ενδιαφέρον επειδή είναι δυνατόν να εμφανιστούν πράγματι στη πράξη, είναι τρεις για την περίπτωση κάμψης δοκών Euler ή Timoshenko όταν η ανάλυση γίνεται στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης, ενώ δυο από αυτές τις περιπτώσεις είναι πιθανές όταν η ανάλυση πραγματοποιείται στα πλαίσια της θεωρίας α' τάξης.

  - Οι τριγωνομετρικές και οι υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις που απαρτίζουν τη λύση των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος, εμπεριέχουν ως υποσύνολό τους τις αντίστοιχες συναρτήσεις που διέπουν το πρόβλημα της κάμψης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων.

- Από την εφαρμογή του αναπτυχθέντος γενικευμένου στοιχείου δοκού προέκυψε το συμπέρασμα, ότι το στοιχείο αυτό επιτυγχάνει και στην πράξη με πολύ απλό για τον χρήστη τρόπο την αξιόπιστη προσομοίωση φορέων θεμελίωσης αλλά και, γενικότερα, της ανωδομής πλαισιακών φορέων. Οι ενσωματωμένες δυνατότητες προσομοίωσης απολύτως στερεών βραχιόνων, συνεχούς ελαστικής έδρασης μιας δυο ή τριών παραμέτρων, η τοποθέτηση στροφικών ελατηρίων, αλλά και η εισαγωγή καταλλήλων «διακοπτών» ενεργοποίησης / απενεργοποίησης των χαρακτηριστικών αυτών, δίνουν τη ευχέρεια προσομοίωσης φορέων οπλισμένου σκυροδέματος αλλά και μεταλλικών φορέων με φορέα θεμελίωσης από σκυρόδεμα, με πολύ μικρότερο αριθμό στοιχείων από εκείνον που θα απαιτούσε μια συμβατική αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών. Επιπλέον, η σύγκριση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από τη χρήση του νέου στοιχείου με τα αντίστοιχα αποτελέσματα των συμβατικών μεν αλλά δοκιμασμένων κατ' επανάληψη στην πράξη τεχνικών προσομοίωσης, απέδειξε πλήρη ταύτιση, κάτι που τεκμηριώνει και την αξιοπιστία του στοιχείου πέρα από την δεδομένη απλότητά του. Τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν και για την περίπτωση κατά την οποία γίνεται χρήση του νέου στοιχείου σε προβλήματα ελαστικής ευστάθειας, όπου επιτυγχάνεται ο αξιόπιστος υπολογισμός των κρίσιμων φορτίων λυγισμού επίπεδων πλαισιακών φορέων.

- Κατά την επίλυση των αριθμητικών παραδειγμάτων εφαρμόστηκε μια μεθοδολογία προσδιορισμού των εδαφικών παραμέτρων, που στηρίζεται κατά κύριο λόγο στις εξισώσεις του τροποποιημένου προσομοιώματος του Vlasov, από την οποία προκύπτουν οι τιμές των δυο παραμέτρων που απαιτούνται

για την εφαρμογή των αντιστοίχων προσομοιωμάτων. Η ίδια μεθοδολογία επιτρέπει επίσης τον προσδιορισμό της τρίτης παραμέτρου του προσομοιώματος του Kerr μέσω του συσχετισμού της με τις τιμές των άλλων δυο παραμέτρων. Πιο συγκεκριμένα, η διαδικασία που ακολουθήθηκε σε κάθε παράδειγμα είναι η ακόλουθη:

- Επιλογή της κατηγορίας του εδάφους θεμελίωσης αλλά και του πάχους του αντίστοιχου υποβάθρου. Όσον αφορά τα εδάφη, θεωρήθηκαν πέντε διαφορετικές κατηγορίες που καλύπτουν ένα όσο το δυνατό πιο ευρύ φάσμα εδαφών, από μαλακά αργιλικά έως και αμμώδη. Όσον αφορά στα πάχη των ελαστικών υποβάθρων, θεωρήθηκαν τιμές που κυμαίνονται από τα 10 έως τα 60 μέτρα, με βήμα αύξησης που μεταβάλλεται ανά παράδειγμα.
- Επιλογή των μεγεθών έντασης και μετακίνησης που θα αποτελέσουν το αντικείμενο σύγκρισης μεταξύ των εξεταζόμενων προσομοιωμάτων.
- Επίλυση του φορέα με προσομοιώματα επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων προκειμένου να υπολογιστούν οι τιμές των μεγεθών που θα αποτελέσουν τις τιμές αναφοράς κατά την διαδικασία της συγκριτικής αξιολόγησης των εξεταζόμενων εδαφικών προσομοιωμάτων (σε όσες περιπτώσεις στάθηκε δυνατό, έγινε χρήση και των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την εφαρμογή των εξισώσεων του συνεχούς ελαστικού ημιεπιπέδου).
- Επίλυση με το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov από το οποίο προκύπτουν οι τιμές των δυο παραμέτρων των αντιστοίχων προσομοιωμάτων, δηλαδή της σταθεράς k των μεταφορικών ελατηρίων, και της σταθεράς G του διατμητικού επιπέδου.
- Επίλυση με τα προσομοιώματα μιας ή δυο παραμέτρων που ακολουθούν, κάνοντας χρήση των τιμών των παραμέτρων που προέκυψαν από την επίλυση με το τροποποιημένο προσομοίωμα του Vlasov:
  α. Προσομοίωμα του Winkler (προσομοίωμα μιας παραμέτρου),
  β. Προσομοίωμα δυο παραμέτρων του Pasternak χωρίς την θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν των φορέων,
  γ. Προσομοίωμα του Vlasov με την θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του ελαστικού υποβάθρου.
- Επίλυση με το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων του Kerr <u>με</u> ή <u>χωρίς</u> την θεώρηση της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν των φορέων. Οι επιλύσεις αυτές στηρίχθηκαν στην παραδοχή του συσχετισμού της σταθεράς της κάτω στρώσης των μεταφορικών ελατηρίων k με την σταθερά της άνω στρώσης c. Θεωρήθηκε ότι ο συσχετισμός αυτός είναι δόκιμος, καθώς και οι δυο αυτές σταθερές αναφέρονται σε μεταφορικά ελατήρια. Έτσι έγινε η παραδοχή, ότι η σχέση μεταξύ των δυο αυτών σταθερών είναι: $c=n_{ck}k$. Με βάση την παραδοχή αυτή, μπορεί να γίνει εφαρμογή του προσομοιώματος του Kerr σε συνδυασμό με την εφαρμογή του τροποποιημένου προσομοιώματος του Vlasov, από την οποία προκύπτουν σε πρώτο στάδιο οι σταθερές k, G, ενώ σε δεύτερο στάδιο λαμβάνει χώρα ο υπολογισμός και της τρίτης παραμέτρου μέσω της σχέσης $c=n_{ck}k$. Για την παράμετρο n_{ck} (που στα πλαίσια της παρούσας διατριβής αναφέρεται ως συντελεστής συσχέτισης) πραγματοποιήθηκαν παραμετρικές αναλύσεις σε κάθε παράδειγμα, με στόχο την διερεύνηση ύπαρξης συγκεκριμένων

τιμών ή πεδίων τιμών της, με τις οποίες επιτυγχάνεται η σύγκλιση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την χρήση του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων, με τα αποτελέσματα αναφοράς. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι η ταυτόχρονη προγραμματιστική «υλοποίηση» των προσομοιωμάτων δυο και τριών παραμέτρων είναι εφικτή με μικρότερο «υπολογιστικό κόστος» από αυτό που θα απαιτούνταν για τον ταυτόχρονο προγραμματισμό των λύσεων δυο διαφορετικών προβλημάτων καθώς, όπως τονίστηκε και πιο πάνω, οι συναρτήσεις που συνθέτουν τις λύσεις των εξισώσεων των προσομοιωμάτων των δυο παραμέτρων αποτελούν υποσύνολο των συναρτήσεων που συνθέτουν τις λύσεις της αντίστοιχης εξίσωσης του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων.

- Τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την επίλυση καθενός από τα αριθμητικά παραδείγματα είναι τα εξής:
  - *Δοκοί «απείρου» μήκους υπό μοναχική κατακόρυφη δύναμη ή ροπή*

Η πρώτη ομάδα των αριθμητικών παραδειγμάτων που επιλύθηκαν αφορά δοκούς «απείρου» μήκους. Τα παραδείγματα αυτά είναι κατάλληλα για την πρώτη συγκριτική αξιολόγηση των προσομοιωμάτων καθώς είναι απαλλαγμένα από τις συνοριακές συνθήκες των ελευθέρων άκρων των δοκών που επηρεάζουν τα αποτελέσματα των αναλύσεων.

Δοκός «απείρου» μήκους υπό μοναχική κατακόρυφη δύναμη.

Στα πλαίσια των αναλύσεων αυτών ελέγχθηκαν η μέγιστη κατακόρυφη μετακίνηση και η μέγιστη καμπτική ροπή της δοκού και προέκυψαν τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Όσον αφορά την σύγκλιση των κατακορύφων μετακινήσεων, προτείνεται η τιμή n_{ck}=7 με την οποία το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων επιτυγχάνει την βέλτιστη του επίδοση ανεξαρτήτως κατηγορίας εδάφους, αλλά και βάθους του ελαστικού υποβάθρου (οι αποκλίσεις δεν υπερβαίνουν σε καμία περίπτωση το 3%). Όσον αφορά τις μέγιστες καμπτικές ροπές, υφίστανται ελαφρές διαφοροποιήσεις στις τιμές των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης τόσο ανά κατηγορία εδάφους όσο και βάθους του ελαστικού υποβάθρου. Έτσι, για τα «μαλακά» εδάφη με σχετικά μικρό μέτρο ελαστικότητας οι βέλτιστες τιμές των συντελεστών συσχέτισης κυμαίνονται μεταξύ του 6 και του 8 ανάλογα με το βάθος του ελαστικού υποβάθρου, ενώ για τα «σκληρά» εδάφη με σχετικά μεγάλο μέτρο ελαστικότητας η αντίστοιχη διακύμανση είναι μεταξύ του 7 και του 11. Ωστόσο, αν τεθεί n_{ck}=7 για την περίπτωση των «μαλακών» εδαφών και n_{ck}=9 για την περίπτωση των «σκληρών», τότε οι αποκλίσεις των τιμών των μεγίστων καμπτικών ροπών από τις τιμές αναφοράς, δεν υπερβαίνουν σε καμία περίπτωση το 3.5% - 4%.
- Από τα υπόλοιπα προσομοιώματα που εξετάστηκαν, το προσομοίωμα του Vlasov με και χωρίς την θεώρηση των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου εμφανίζεται αποδοτικότερο του προσομοιώματος του Winkler ειδικά για μεγάλα βάθη υποβάθρου, και γενικά υποδεέστερο του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων, όταν για το τελευταίο γίνεται χρήση των συντελεστών συσχέτισης που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Πιο συγκεκριμένα, οι αποκλίσεις του προσομοιώματος του Vlasov όσον αφορά στις καμπτικές ροπές είναι μεγαλύτερες στην περίπτωση των «σκληρών» εδαφών και κυμαίνονται από 15% στην περίπτωση που το υπόβαθρο έχει μικρό βάθος έως και 40%

στην περίπτωση που έχει μέσο ή μεγάλο βάθος. Παρόμοιας τάξης είναι και οι αποκλίσεις των μεγίστων κατακορύφων μετακινήσεων. Οι αντίστοιχες αποκλίσεις του προσομοιώματος του Winkler, τόσο όσον αφορά στις κατακόρυφες μετακινήσεις όσο και στις μέγιστες καμπτικές ροπές, είναι μεγαλύτερες στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει μέσο ή μεγάλο βάθος, ενώ είναι της ίδιας τάξεως ή και ελαφρά καλύτερες από τις αντίστοιχες αποκλίσεις του προσομοιώματος του Vlasov στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει μικρό βάθος.

Δοκός «απείρου» μήκους υπό μοναχική ροπή.

Στα πλαίσια των αναλύσεων αυτών ελέγχθηκαν η μέγιστη στροφή των διατομών και η μέγιστη τέμνουσα της δοκού και προέκυψαν τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Η βέλτιστη τιμή του συντελεστή συσχέτισης όσον αφορά στην σύγκλιση της μέγιστης τέμνουσας δύναμης είναι n_{ck}=7 ανεξαρτήτως κατηγορίας εδάφους και βάθους του ελαστικού υποβάθρου. Αντίστοιχα, για την σύγκλιση της μέγιστης στροφής των διατομών προτείνεται η τιμή n_{ck}=4 για μεγάλα βάθη του ελαστικού υποβάθρου και οι τιμές n_{ck}=5, 6 για τις περιπτώσεις μέσου και μικρού βάθους αντίστοιχα. Ωστόσο, αν χρησιμοποιηθεί η τιμή n_{ck}=7, τότε οι αποκλίσεις τόσο των μέγιστων στροφών των διατομών όσο και των τεμνουσών δυνάμεων δεν υπερβαίνουν το 4%, ανεξαρτήτως κατηγορίας εδάφους και βάθους του ελαστικού υποβάθρου.
- Όσον αφορά στα υπόλοιπα προσομοιώματα, το προσομοίωμα του Winkler εμφανίζεται αποδοτικότερο του προσομοιώματος του Vlasov με ή χωρίς την επιρροή των οριζοντίων μετακινήσεων στο εσωτερικό του υποβάθρου. Πιο συγκεκριμένα, οι αποκλίσεις που δίδει το προσομοίωμα του Winkler όσον αφορά στις τέμνουσες δυνάμεις δεν μεταβάλλονται ουσιαστικά ούτε σε σχέση με την κατηγορία εδάφους ούτε σε σχέση με το βάθος του ελαστικού υποβάθρου, κυμαίνονται δε μεταξύ του 7% και 20%. Μικρότερες είναι οι αποκλίσεις των γωνιών στροφής των διατομών, καθώς κυμαίνονται μεταξύ του 5% και του 9%. Οι αντίστοιχες αποκλίσεις των προσομοιωμάτων του Vlasov είναι 25% - 30% για τις τέμνουσες δυνάμεις, και 10 – 15% για τις γωνίες στροφής των διατομών. Οι αποκλίσεις αυτές εμφανίζουν μια τάση μείωσης για μικρά βάθη του ελαστικού υποβάθρου.

○ *Δοκοί πεπερασμένου μήκους*

Η δεύτερη ομάδα των αριθμητικών παραδειγμάτων που επιλύθηκαν αφορά δοκούς πεπερασμένου μήκους. Αποτελείται από τις απλές περιπτώσεις φόρτισης με μοναχική κατακόρυφη δύναμη ή ροπή, και από ένα πιο σύνθετο σύστημα φόρτισης αποτελούμενο από μοναχικές δυνάμεις, ροπές και συνεχώς κατανεμημένες δυνάμεις σε τμήματα του ανοίγματος της δοκού. Με τα παραδείγματα αυτά ελέγχεται η επιρροή των συνοριακών συνθηκών στα ελεύθερα άκρα των δοκών, η επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν αυτών, καθώς και η επιρροή του δείκτη σχετικής δυσκαμψίας εδάφους / δοκού όπως αυτός εκφράζεται από τον συντελεστή λ των Vlasov και Leont'ev (Σχέση 2.134).

Δοκός υπό μοναχική κατακόρυφη δύναμη

Στα πλαίσια του παραδείγματος αυτού, πραγματοποιήθηκε μια συστηματική διερεύνηση της απόδοσης των υπό έλεγχο εδαφικών προσομοιωμάτων σε συνάρτηση με τον δείκτη λ σχετικής δυσκαμψίας

εδάφους / δοκού. Πιο συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις για διάφορα μήκη δοκών και καλύφθηκε ένα εύρος τιμών του συντελεστή λ από 0.28 έως και 2.28. Εντός του εύρους αυτού ανήκουν δοκοί που μπορούν να θεωρηθούν πρακτικώς «άκαμπτες», δοκοί που έχουν τη συνήθη συμπεριφορά δοκών μέσου μήκους, και δοκοί που συμπεριφέρονται πρακτικώς ως δοκοί «απείρου» μήκους. Τα μεγέθη που ελέγχθηκαν είναι η κατακόρυφη μετακίνηση και η καμπτική ροπή στο σημείο εφαρμογής της εξωτερικής φόρτισης. Τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την διερεύνηση αυτή είναι τα εξής:

- Όσον αφορά στο προσομοίωμα των τριών παραμέτρων, αποδείχθηκε ότι επιτυγχάνεται σημαντική σύγκλιση προς τα αποτελέσματα αναφοράς για τις κατακόρυφες μετακινήσεις εάν στον συντελεστή συσχέτισης δοθούν οι τιμές n_{ck}=7 για την περίπτωση των «μαλακών» εδαφών, και n_{ck}=8 για την περίπτωση των «σκληρών». Οι τιμές αυτές αποδίδουν αποκλίσεις που δεν υπερβαίνουν σε καμία περίπτωση (μήκους δοκού και βάθους ελαστικού υποβάθρου) το 6%. Επομένως, όσο αναφορά στις κατακόρυφες μετακινήσεις παρατηρείται μια συμφωνία των αποτελεσμάτων με την περίπτωση των δοκών «απείρου» μήκους.

  Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την μελέτη της σύγκλισης των καμπτικών ροπών έδειξαν να έχουν μια σημαντική εξάρτηση από τον συντελεστή λ, αλλά και από το αν αναφέρονται σε «μαλακά» ή σε «σκληρά» εδάφη. Πιο συγκεκριμένα, αποδείχθηκε ότι υπάρχουν πέντε περιοχές τιμών του λ εντός των οποίων οι τιμές των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης n_{ck} εμφανίζουν μια διαφορετική συμπεριφορά. Οι τιμές του λ που οριοθετούν τις πέντε αυτές περιοχές παρουσιάζουν μια μικρή διαφοροποίηση μεταξύ των «μαλακών» και των «σκληρών» εδαφών. Τα βασικά συμπεράσματα ανά περιοχή τιμών του συντελεστή λ είναι τα ακόλουθα:

  α. <u>λ<0.6</u>: Η συσχέτιση μεταξύ των συντελεστών λ και n_{ck} μπορεί να προσεγγιστεί με πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού n≥2. Οι βέλτιστες τιμές του συντελεστή n_{ck} οδηγούν στην περίπτωση αυτή σε πλήρη σύγκλιση με τα αποτελέσματα αναφοράς.

  β. <u>0.6<λ<0.9 (0.6<λ<0.7 για τα «σκληρά» εδάφη»)</u>: Υφίσταται συσχέτιση των βέλτιστων συντελεστών n_{ck} με το μέτρο ελαστικότητας του εδάφους, η οποία μπορεί να προσεγγιστεί πολύ ικανοποιητικά με μια πολυωνυμική συνάρτηση δευτέρου βαθμού. Από την εφαρμογή της συνάρτησης αυτής προκύπτουν οι εξής τιμές, οι οποίες δίδουν αποκλίσεις που δεν υπερβαίνουν το ±6% από τις τιμές αναφοράς των καμπτικών ροπών:

  E1→ n_{ck}≈125 – 130, E3→ n_{ck}≈265 – 270, E4→ n_{ck}≈790 – 800, E5→ n_{ck}≈3850 – 3660.

  γ. <u>0.9<λ<1.15 (0.7<λ<0.95 για τα «σκληρά» εδάφη»)</u>: Η περιοχή αυτή αποτελεί την «αχίλλειο πτέρνα» του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων, καθώς δεν είναι δυνατή η σύγκλιση προς τις τιμές αναφοράς παρά μόνον με την χρήση πολύ υψηλών τιμών για τον συντελεστή συσχέτισης (της τάξης του 10^4). Ωστόσο, και για τις τιμές αυτές το συγκεκριμένο προσομοίωμα δεν εμφανίζει επίπεδο σύγκλισης εφάμιλλο των δυο προηγούμενων περιπτώσεων.

  δ. <u>λ>1.15 (λ>0.95 για τα «σκληρά» εδάφη»)</u>: Στην περιοχή αυτή οι δοκοί «συμπεριφέρονται» πρακτικώς ως δοκοί «απείρου» μήκους, καθώς αποδίδουν τα βέλτιστα αποτελέσματα για τιμές των συντελεστών συσχέτισης που προσεγγίζουν τις τιμές που προέκυψαν κατά την μελέτη των δοκών

«απείρου» μήκους. Ωστόσο, η ταύτιση αυτή είναι πιο σαφής για λ>1.65 (λ>1.55 για τα «σκληρά» εδάφη), χωρίς αυτό να σημαίνει ότι για λ<1.65 (ή λ<1.55) παύει να υφίσταται.

- Όσον αφορά στα υπόλοιπα προσομοιώματα, θα πρέπει να τονιστεί ότι αν εξαιρεθεί το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων, το προσομοίωμα του Vlasov αποδίδει τις αμέσως πιο «ακριβείς» τιμές κατακορύφων μετακινήσεων αν και με σχετικά μεγάλη διαφορά. Τα προσομοιώματα του Pasternak και του Winkler αποτυγχάνουν πλήρως στην προσέγγιση των κατακορύφων μετακινήσεων, γεγονός που θα πρέπει να αποδοθεί στην αδυναμία των συγκεκριμένων προσομοιωμάτων να λάβουν υπόψη τους την επιρροή του εδάφους εκατέρωθεν των δοκών. Τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν για όλες τις περιπτώσεις κατηγορίας εδάφους, βάθους ελαστικού υποβάθρου και τιμής του συντελεστή λ που εξετάστηκαν.

  Αναφορικά με την σύγκλιση των καμπτικών ροπών προέκυψαν τα παρακάτω συμπεράσματα με βάση τις περιοχές τιμών του λ που παρουσιάστηκαν παραπάνω:

  α. <u>λ<0.9 (λ<0.7 για τα «σκληρά» εδάφη»)</u>: Το προσομοίωμα του Winkler ακολουθεί σε απόδοση το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων στην περίπτωση των «μαλακών» εδαφών, ενώ στην περίπτωση των «σκληρών» εδαφών εμφανίζεται ακριβέστερο το προσομοίωμα του Vlasov (αν εξαιρεθεί το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων). Το προσομοίωμα του Pasternak υστερεί όλων των υπολοίπων.

  β. <u>0.9<λ<1.15 (0.7<λ<0.95 για τα «σκληρά» εδάφη»)</u>: Στην περιοχή αυτή εμφανίζονται ισοδύναμα τα προσομοιώματα των Vlasov και Kerr, με το πρώτο να είναι ελαφρώς πιο ακριβές. Έπονται σε ακρίβεια τα προσομοιώματα των Winkler και Pasternak με το πρώτο να υπερτερεί του δευτέρου.

  γ. <u>λ>1.15 (λ>0.95 για τα «σκληρά» εδάφη»)</u>: Στην περιοχή 1.15<λ<1.65 (0.95<λ<1.55 για τα «σκληρά» εδάφη) το προσομοίωμα του Winkler προσεγγίζει την ακρίβεια του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων, ενώ έπονται τα προσομοιώματα των Vlasov και Pasternak (το πρώτο σαφώς καλύτερο του δεύτερου). Αντίθετα, για λ>1.65 (λ>1.55) το προσομοίωμα του Winkler υστερεί όλων των υπολοίπων στην περίπτωση των «σκληρών» εδαφών, ενώ στην περίπτωση των «μαλακών» εδαφών εμφανίζεται ισοδύναμο του προσομοιώματος του Vlasov. Τέλος, το προσομοίωμα του Pasternak δίδει σε γενικές γραμμές τα χειρότερα αποτελέσματα και στην περίπτωση αυτή.

<u>Δοκός υπό μοναχική ροπή</u>

Στα πλαίσια των αναλύσεων αυτών ελέγχθηκαν η μέγιστη στροφή των διατομών και η μέγιστη τέμνουσα της δοκού. Το πρώτο συμπέρασμα που προέκυψε είναι ότι το βάθος του ελαστικού υποβάθρου δεν έχει ουσιαστική επιρροή στα εξαγόμενα αποτελέσματα. Τα επιπλέον συμπεράσματα είναι τα εξής:

- Όσον αφορά στη μέγιστη γωνία στροφής της διατομής, η τιμή n_{ck}=7 δίδει αποτελέσματα που δεν αποκλίνουν περισσότερο από 3% από τα αποτελέσματα αναφοράς, όπως και στην περίπτωση της μελέτης των δοκών «απείρου» μήκους. Ικανοποιητική απόδοση έχουν και τα προσομοιώματα του Pasternak και του Vlasov (το πρώτο υπερέχει ελαφρώς του δευτέρου), ενώ το προσομοίωμα του Winkler υστερεί όλων των υπολοίπων.

- Όσον αφορά στην προσέγγιση της μέγιστης τέμνουσας δύναμης, η τιμή του συντελεστή συσχέτισης n_{ck}=7 δίδει επίσης ικανοποιητικά αποτελέσματα με μεγαλύτερες όμως αποκλίσεις απ' ότι στην περίπτωση των μέγιστων γωνιών στροφής (αποδίδονται αποκλίσεις έως το 7% ανάλογα με την κατηγορία εδάφους). Ισοδύναμο με το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων εμφανίζεται το προσομοίωμα του Pasternak, ενώ το προσομοίωμα του Vlasov υπερέχει όλων, συμπεριλαμβανομένου και του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων, στην περίπτωση των «μαλακών» εδαφών. Πάντως σε γενικές γραμμές οι αποκλίσεις όλων των προσομοιωμάτων δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλες καθώς δεν υπερβαίνουν το 15% περίπου.

Δοκός υπό σύνθετη φόρτιση

Τα συμπεράσματα από το παράδειγμα αυτό δεν μπορούν να θεωρηθούν ως γενικής ισχύος καθώς προκύπτουν από μια συγκεκριμένη φορτιστική κατάσταση. Ωστόσο, η χρησιμότητα του παραδείγματος έγκειται στην σύγκριση των τιμών των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης, οι οποίοι προκύπτουν από μια τυχαία κατάσταση φόρτισης, με τους αντίστοιχους συντελεστές που προκύπτουν από τις συγκεκριμένες και απλές φορτιστικές καταστάσεις μοναχικής κατακόρυφης δύναμης ή ροπής. Θα πρέπει επίσης να επισημανθεί, ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα συγκρίθηκαν μεγέθη έντασης και μετακίνησης σε οκτώ διαφορετικά σημεία και όχι μόνον σε ένα, όπως στα δυο παραδείγματα που προηγήθηκαν. Η παρατήρηση αυτή γίνεται για να καταστεί σαφές, ότι στην παρούσα περίπτωση είναι πρακτικώς αδύνατο να επιτευχθούν απόλυτες συγκλίσεις όλων των ελεγχόμενων μεγεθών έντασης και μετακίνησης για συγκεκριμένες τιμές των συντελεστών συσχέτισης. Έτσι, διερευνήθηκαν πεδία τιμών του n_{ck} που οδηγούν στην μέγιστη δυνατή σύγκλιση των εξεταζόμενων μεγεθών σε όλους του κόμβους. Τα συμπεράσματα που προέκυψαν είναι:

- Όσον αφορά στις κατακόρυφες μετακινήσεις, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων επιτυγχάνει πολύ καλή προσέγγιση των αποτελεσμάτων αναφοράς, αν για τον συντελεστή συσχέτισης ληφθεί η τιμή 9 για τα «μαλακά» εδάφη και 10 για τα «σκληρά». Οι τιμές αυτές δεν διαφέρουν ουσιαστικά από τις τιμές που προέκυψαν από την μελέτη δοκών υπό απλές φορτιστικές καταστάσεις (υπενθυμίζεται ότι οι αντίστοιχες τιμές είναι 7 και 8). Από τα υπόλοιπα προσομοιώματα, που υστερούν σαφώς του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων, τις πιο ικανοποιητικές τιμές τις δίδει το προσομοίωμα του Vlasov, ενώ υστερούν σημαντικά τα προσομοιώματα του Winkler και του Pasternak. Επομένως και στην παρούσα περίπτωση επιβεβαιώνεται η παρατήρηση της σημαντικής συνεισφοράς της θεώρησης της επιρροής του εδάφους εκατέρωθεν των δοκών στην βέλτιστη απόδοση των κατακορύφων μετακινήσεων. Επίσης, επιβεβαιώνεται και η περαιτέρω βελτίωση των αποτελεσμάτων, την οποία επιφέρει η θεώρηση των επιπλέον τοπικών παραμορφώσεων ακριβώς κάτω από την φορτιζόμενη περιοχή, που μόνον το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων μπορεί να λάβει υπόψη.
- Όσον αφορά στα εντατικά μεγέθη (καμπτικές ροπές, και τέμνουσες δυνάμεις) που εξετάστηκαν, μετά από μια συστηματική διερεύνηση των συντελεστών συσχέτισης προέκυψε το συμπέρασμα ότι χρησιμοποιώντας τιμές από τα παρακάτω πεδία:

n_{ck}=140 – 145 για τα «μαλακά» εδάφη Ε1 και Ε3 και

n_{ck}=155 – 160 για τα «σκληρά» εδάφη Ε4 και Ε5

επιτυγχάνεται η μέγιστη δυνατή σύγκλιση του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων τόσο για τις καμπτικές ροπές όσο και για τις τέμνουσες. Βεβαίως, υπάρχει η δυνατότητα ακόμα μεγαλύτερων συγκλίσεων, ωστόσο για την επίτευξη τους θα πρέπει να γίνει χρήση διαφορετικών κατά περίπτωση τιμών για τους συντελεστές συσχέτισης. Μια τέτοια διερεύνηση δεν θεωρείται δόκιμη, καθώς στόχος της παρούσας διατριβής είναι η πρόταση συγκεκριμένων τιμών ή έστω περιορισμένων πεδίων τιμών συντελεστών συσχέτισης που οδηγούν σε κατά μέσον όρο βέλτιστα αποτελέσματα.

Όσον αφορά στα υπόλοιπα προσομοιώματα, αυτά οδηγούν στο σύνολο τους σε υπερβολικά μεγάλες αποκλίσεις, τόσο για τις καμπτικές ροπές όσο και για τις τέμνουσες. Έτσι, δεν κρίνεται σκόπιμο να γίνει περαιτέρω ιεράρχησή τους με βάση το επίπεδο της απόδοσης τους.

- *Επίπεδα πλαίσια*

Με την τρίτη ομάδα παραδειγμάτων η οποία περιλαμβάνει παραδείγματα που αφορούν στην επίλυση επιπέδων πλαισίων, επιχειρείται η συγκριτική αξιολόγηση των εδαφικών προσομοιωμάτων υπό πιο πολύπλοκες, αλλά ταυτόχρονα και πιο ρεαλιστικές συνθήκες. Έτσι, το πρώτο παράδειγμα της ομάδας αφορά στην επίλυση ενός μονώροφου πλαισίου με κατακόρυφη συμμετρική φόρτιση, ενώ το δεύτερο στην επίλυση ενός τριώροφου πλαισίου με κατακόρυφη και οριζόντια φόρτιση. Επιπλέον, με τα παραδείγματα αυτά τεκμηριώνεται και η επιτυχής εφαρμογή του προτεινόμενου γενικευμένου στοιχείου.

Μονώροφο πλαίσιο με κατακόρυφη συμμετρική φόρτιση

Στα πλαίσια του παραδείγματος αυτού ελέγχθηκαν οι κατακόρυφες μετακινήσεις των υποστυλωμάτων του πλαισίου και η γωνία στροφής του άκρου της δοκού θεμελίωσης όσον αφορά στα μεγέθη μετακίνησης, καθώς επίσης και οι καμπτικές ροπές και οι τέμνουσες δυνάμεις των στύλων και της δοκού θεμελίωσης όσον αφορά τα μεγέθη έντασης. Εξετάστηκαν τα προσομοιώματα των Kerr, Vlasov, Pasternak και Winkler. Από την συγκριτική αξιολόγηση των προσομοιωμάτων αυτών προέκυψαν τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Όσον αφορά στις συγκρίσεις των μεγεθών μετακίνησης προέκυψε το συμπέρασμα ότι η χρήση της τιμής n_{ck}=24 προσδίδει στο προσομοίωμα τριών παραμέτρων την δυνατότητα υπολογισμού των μεγεθών μετακίνησης που ελέγχθηκαν, με αποκλίσεις οι οποίες δεν υπερβαίνουν σε καμία από τις εξεταζόμενες περιπτώσεις (κατηγορίας εδάφους, και βάθους του ελαστικού υποβάθρου) το 16%. Με τη χρήση της τιμής αυτής το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων καθίσταται αποδοτικότερο όλων όσων προσομοιωμάτων εξετάστηκαν. Από αυτά, το προσομοίωμα του Vlasov αποδίδει τις αμέσως καλύτερες τιμές για τις κατακόρυφες μετακινήσεις, για τις οποίες τα προσομοιώματα του Pasternak και του Winkler υστερούν σημαντικά. Αντίθετα, το προσομοίωμα του Vlasov υστερεί όλων των υπολοίπων όσον αφορά την προσέγγιση της στροφής στο άκρο της δοκού θεμελίωσης, για την οποία εμφανίζεται ιδιαίτερα αποδοτικό το προσομοίωμα του Pasternak. Τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν ποιοτικά ανεξαρτήτως κατηγορίας εδάφους και βάθους του ελαστικού υποβάθρου.

- Όσον αφορά στα μεγέθη έντασης που εξετάστηκαν, παρουσιάστηκε μια διαφοροποίηση στα αποτελέσματα που εξάγονται από την εφαρμογή του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων. Η διαφοροποίηση αυτή σχετίζεται με την κατηγορία του εδάφους θεμελίωσης. Έτσι, για την περίπτωση της μελέτης εδάφους θεμελίωσης που συνίσταται από στρώμα αργίλου («μαλακό» έδαφος) αποδείχθηκε ότι λαμβάνοντας τιμές για τον συντελεστή συσχέτισης από το διάστημα 24 – 30 επιτυγχάνεται η βέλτιστη απόδοση του εν λόγω προσομοιώματος, η οποία μάλιστα είναι σαφώς καλύτερη των αποδόσεων των υπολοίπων προσομοιωμάτων.

  Αντίθετα, στην περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώμα πυκνής άμμου («σκληρό» έδαφος) οι τιμές του συντελεστή συσχέτισης από το διάστημα 20 – 26 προσδίδουν μεν στο προσομοίωμα των τριών παραμέτρων την βέλτιστη απόδοση, ωστόσο το επίπεδο της απόδοσης αυτής δεν είναι ικανό να το καταστήσει αποδοτικότερο όλων των υπολοίπων που εξετάστηκαν. Έτσι, στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει μεγάλο βάθος, εμφανίζεται ισοδύναμο με το προσομοίωμα του Pasternak, ενώ στην περίπτωση που το υπόβαθρο έχει μικρό βάθος ισοδύναμο με το προσομοίωμα του Vlasov. Εξαίρεση αποτελούν οι περιπτώσεις υποβάθρου μέσου βάθους (30 – 45 μέτρων) όπου αποδεικνύεται αποδοτικότερο όλων.

  Κλείνοντας θα πρέπει να γίνει αναφορά και στις επιδόσεις των υπολοίπων προσομοιωμάτων κατά εξεταζόμενη περίπτωση. Έτσι, όταν το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώμα αργίλου, το προσομοίωμα του Pasternak αποδίδει σαφώς καλύτερα αποτελέσματα από τα προσομοιώματα των Vlasov και Winkler, ανεξαρτήτως του βάθους του ελαστικού υποβάθρου. Το προσομοίωμα του Vlasov υπερέχει του προσομοιώματος του Winkler στην περίπτωση μεγάλου βάθους υποβάθρου, ενώ τα δυο αυτά προσομοιώματα εμφανίζονται ισοδύναμα στην περίπτωση μέσου και μικρού βάθους. Στην περίπτωση που το έδαφος θεμελίωσης συνίσταται από στρώμα πυκνής άμμου, το προσομοίωμα του Pasternak εμφανίζεται εφάμιλλο του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει μεγάλο βάθος, ενώ υστερεί ελαφρά στην περίπτωση υποβάθρου μέσου βάθους. Στις περιπτώσεις αυτές τα προσομοιώματα των Vlasov και Winkler αποδίδουν τα λιγότερο αποδεκτά αποτελέσματα. Αντίθετα, στην περίπτωση που το ελαστικό υπόβαθρο έχει μικρό βάθος το προσομοίωμα του Vlasov εμφανίζεται εφάμιλλο του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων, ενώ έπονται σε αποδοτικότητα τα προσομοιώματα των Pasternak και Winkler.

Τριώροφο πλαίσιο με κατακόρυφη και οριζόντια φόρτιση

Πρόκειται για το πιο σύνθετο και παράλληλα ρεαλιστικό παράδειγμα απ' όσα επιλύθηκαν, καθώς αναφέρεται σε πολυώροφο πλαίσιο, το οποίο υπόκειται όχι μόνον σε κατακόρυφη αλλά και σε οριζόντια φόρτιση. Στα πλαίσια του παραδείγματος αυτού διερευνήθηκε, πέραν των όσων διερευνήθηκαν στις προηγούμενες περιπτώσεις, και η πιθανή επιρροή που έχει η επιλογή του χρησιμοποιούμενου εδαφικού προσομοιώματος στα μεγέθη έντασης που αναπτύσσονται σε περιοχές του φορέα που βρίσκονται τοπολογικά μακριά από την περιοχή της θεμελίωσης. Επιπλέον, κρίθηκε σκόπιμη και μια επιπλέον διερεύνηση της συσχέτισης των εξαγομένων αποτελεσμάτων από την τιμή του συντελεστή σχετικής

δυσκαμψίας εδάφους / δοκού θεμελίωσης (συντελεστής λ), όπως έγινε και στο παράδειγμα της δοκού πεπερασμένου μήκους υπό μοναχική κατακόρυφη φόρτιση. Για τον λόγο αυτό επιλύθηκαν τρεις διαφορετικές εκδοχές του συγκεκριμένου τριώροφου πλαισίου, οι οποίες διαφέρουν μεταξύ τους στο μήκος του ανοίγματος των οριζοντίων δομικών τους στοιχείων. Επίσης, εξετάστηκαν τρεις διαφορετικές κατηγορίες εδαφών (δυο «μαλακά» και ένα «σκληρό»), και τρία διαφορετικά βάθη ελαστικού υποβάθρου. Έτσι καλύφθηκε ένα εύρος τιμών του συντελεστή λ που ορίζεται από τις τιμές 0.35 έως 2.02. Από το σύνολο των επιλύσεων προέκυψαν τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Όσον αφορά στα μεγέθη μετακίνησης που εξετάστηκαν, προέκυψε το συμπέρασμα ότι εάν δοθούν στον συντελεστή συσχέτισης τιμές από τα διαστήματα 15 – 20 για την περίπτωση των αργιλικών – «μαλακών» εδαφών και 20 – 25 για την περίπτωση «σκληρών» εδαφών, τότε οι αποκλίσεις των μεγεθών μετακίνησης από τις αντίστοιχες τιμές αναφοράς δεν υπερβαίνουν κατά κανόνα το 20 – 25%. Εξαίρεση αποτελούν οι αποκλίσεις των στροφικών μεγεθών μετακίνησης που εξετάστηκαν, τα οποία σε μεμονωμένες περιπτώσεις ξεπερνούν τις οριακές τιμές απόκλισης 20 – 25%. Τα συμπεράσματα αυτά αποδείχθηκε ότι παραμένουν αναλλοίωτα και για τις τρεις εκδοχές του πλαισίου που αναλύθηκαν, με μοναδική εξαίρεση την περίπτωση της επίλυσης του πλαισίου Π1 (Σχήμα 5.63α, σελίδα 347) όταν θεωρηθεί πως εδράζεται επί στρώματος πυκνής άμμου μικρού βάθους (Περίπτωση E4/H_S=20m). Επομένως, μπορεί να ειπωθεί συμπερασματικά ότι τα παραπάνω ισχύουν ανεξαρτήτως τιμής του συντελεστή λ.

  Για τις τιμές των συντελεστών συσχέτισης που παρουσιάστηκαν παραπάνω, το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων υπερτερεί σαφώς των υπολοίπων προσομοιωμάτων, για τα οποία προέκυψαν σε γενικές γραμμές τα παρακάτω συμπεράσματα:

  Το προσομοίωμα του Vlasov εξακολουθεί να αποδίδει καλύτερα τις κατακόρυφες μετακινήσεις και στις επιλύσεις των τριώροφων πλαισίων. Το συμπέρασμα αυτό έρχεται σε συμφωνία με αντίστοιχα συμπεράσματα που προέκυψαν απ' όλα τα προηγούμενα παραδείγματα. Αντίθετα, υστερεί του προσομοιώματος του Pasternak στην προσέγγιση των στροφικών μεγεθών μετακίνησης, ενώ παρουσιάζει και μια μικρή μείωση της αποδοτικότητας του όσον αφορά την προσέγγιση της οριζόντιας μετακίνησης στην κορυφή του πλαισίου. Το προσομοίωμα του Pasternak, όπως τονίστηκε και προηγουμένως, αποδίδει πολύ ικανοποιητικά τα στροφικά μεγέθη μετακίνησης, και μάλιστα η ακρίβειά του είναι εφάμιλλη ή ακόμα και ελαφρά καλύτερη από την αντίστοιχη ακρίβεια του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων, κυρίως στις περιπτώσεις ελαστικού υποβάθρου μικρού βάθους. Αντίθετα αποτυγχάνει στην προσέγγιση των κατακορύφων μετακινήσεων, ενώ αποδίδει τιμές ανάλογες ή ελαφρά καλύτερες από το προσομοίωμα του Vlasov, όσον αφορά στην οριζόντια μετακίνηση της κορυφής του πλαισίου. Τέλος, το προσομοίωμα του Winkler, αν εξαιρεθούν ορισμένες ελάχιστες περιπτώσεις, δίδει τα χειρότερα αποτελέσματα απ' όλα τα προσομοιώματα που εξετάστηκαν.

- Όσον αφορά στα εξεταζόμενα μεγέθη έντασης στην περιοχή της θεμελίωσης του πλαισίου, αποδείχθηκε ότι οι βέλτιστοι συντελεστές συσχέτισης μπορούν να ομαδοποιηθούν με βάση το βάθος

του ελαστικού υποβάθρου, εάν εξαιρεθεί η περίπτωση της επίλυσης του πλαισίου Π3 (Σχήμα 5.63γ, σελίδα 347), το οποίο, αξίζει να σημειωθεί, εισάγει τιμές του συντελεστή λ μεγαλύτερες από τις τιμές των υπολοίπων δυο πλαισίων και ταυτόχρονα μεγαλύτερες της μονάδας. Από την διερεύνηση που πραγματοποιήθηκε με στόχο την εξεύρεση ενός «νόμου μεταβολής» των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης, αποδείχθηκε ότι υπάρχει δυνατότητα συσχέτισης τους με τους συντελεστές σχετικής δυσκαμψίας εδάφους / δοκού λ. Οι σχέσεις συσχέτισης που προέκυψαν εξαρτώνται από το βάθος του ελαστικού υποβάθρου, είναι εκθετικού τύπου, και όπως αποδείχθηκε από τον σχετικό έλεγχο που πραγματοποιήθηκε προσεγγίζουν πολύ ικανοποιητικά τις τιμές των βέλτιστων συντελεστών συσχέτισης που προσδιορίστηκαν στα πλαίσια του παρόντος παραδείγματος. Από την εφαρμογή των συγκεκριμένων σχέσεων προκύπτουν συντελεστές συσχέτισης που προσδίδουν στο προσομοίωμα των τριών παραμέτρων την δυνατότητα υπολογισμού τιμών για τα μεγέθη έντασης στην περιοχή θεμελίωσης του πλαισίου, που δεν αποκλίνουν περισσότερο 20% - 25% από τις τιμές αναφοράς. Εξαίρεση στο συμπέρασμα αυτό αποτελεί η υπολογιζόμενη, μέσω των συγκεκριμένων συντελεστών συσχέτισης, τιμή για την καμπτική ροπή στο άκρο της δοκού θεμελίωσης, οι αποκλίσεις της οποίας ξεπερνούν σε ορισμένες περιπτώσεις κατά πολύ το 20% - 25% από τις τιμές αναφοράς. Ωστόσο, στην πλειοψηφία των περιπτώσεων που εξετάστηκαν το προσομοίωμα των τριών παραμέτρων υπερέχει και για το εν λόγω μέγεθος έντασης όλων των υπολοίπων προσομοιωμάτων.

Σχετικά με την αποτελεσματικότητα των υπολοίπων προσομοιωμάτων, όσον αφορά στην προσέγγιση των μεγεθών έντασης στην περιοχή της θεμελίωσης, μπορούν να καταγραφούν τα εξής:

α. Το προσομοίωμα του Pasternak, παρά τις μεγάλες του αποκλίσεις σε πολλές από τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, εμφανίζεται ακριβέστερο των προσομοιωμάτων των Vlasov και Winkler. Σε μεμονωμένες μάλιστα περιπτώσεις εμφανίζεται ισοδύναμο και του προσομοιώματος των τριών παραμέτρων.

β. Τα προσομοιώματα των Vlasov και Winkler εμφανίζονται υποδεέστερα του προσομοιώματος του Pasternak. Η μεταξύ τους όμως ταξινόμηση με βάση την προσέγγιση των τιμών αναφοράς, αποδείχθηκε πως εξαρτάται τόσο από τον συντελεστή λ, όσο και από το βάθος H_S του ελαστικού υποβάθρου. Πιο συγκεκριμένα:

<u>Όταν λ<0.5</u>, το προσομοίωμα του Winkler υπερέχει του προσομοιώματος του Vlasov για κάθε βάθος του ελαστικού υποβάθρου.

<u>Όταν 0.5<λ<0.9</u>, η ταξινόμηση των δυο προσομοιωμάτων εξαρτάται από πάχος του ελαστικού υποβάθρου. Έτσι, για μεγάλα και μεσαία πάχη ελαστικού υποβάθρου υπερέχει το προσομοίωμα του Winkler για τιμές του λ κοντά στο κάτω όριο τιμών του παρόντος διαστήματος, ενώ για τιμές του λ κοντά στο άνω όριο υπερέχει το προσομοίωμα του Vlasov. Για μικρά πάχη υποβάθρου υπερέχει το προσομοίωμα του Vlasov ανεξαρτήτως τιμής του λ εντός του συγκεκριμένου διαστήματος.

<u>Όταν λ>0.9</u>, το προσομοίωμα του Vlasov υπερέχει γενικά του προσομοιώματος του Winkler για μικρά και μεσαία πάχη του ελαστικού υποβάθρου. Για μεγάλα πάχη, οι μεταξύ των δυο προσομοιωμάτων διαφορές αμβλύνονται για τιμές του λ κοντά στο όριο λ=0.9, ενώ όσο αυξάνεται η τιμή του

συγκεκριμένου συντελεστή, καθίσταται όλο και περισσότερο σαφής η υπεροχή του προσομοιώματος του Vlasov.

Κλείνοντας, θα πρέπει να γίνει και μια αναφορά στην αποτελεσματικότητα όλων των προσομοιωμάτων αναφορικά με την σύγκλιση που επιτυγχάνουν για τις τιμές των μεγεθών έντασης σε περιοχές του πλαισίου που βρίσκονται τοπολογικώς μακριά από την περιοχή της θεμελίωσης. Όπως αποδείχθηκε, όλα τα προσομοιώματα δίδουν πολύ ικανοποιητικές τιμές για τα συγκεκριμένα μεγέθη καθώς δεν αποκλίνουν περισσότερο από 2% - 3% από τις τιμές αναφοράς κατά την επίλυση των πλαισίων Π1 και Π2. Κατά την επίλυση του πλαισίου Π3, το οποίο έχει ιδιαίτερα μεγάλο άνοιγμα δοκών, οι αποκλίσεις αυξάνονται ελαφρά αλλά δεν ξεπερνούν κατά κανόνα το 5%. Έτσι, μπορεί να διατυπωθεί το συμπέρασμα ότι ο τύπος του εδαφικού προσομοιώματος δεν επηρεάζει σχεδόν καθόλου τις αποκλίσεις των τιμών των μεγεθών έντασης στην κορυφή του πλαισίου. Βέβαια, και το παραπάνω συμπέρασμα θα πρέπει να αξιολογηθεί όχι μόνον με βάση τις παραδοχές επί των οποίων στηρίζονται τα προσομοιώματα που συγκρίθηκαν, αλλά και με βάση την μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε στα πλαίσια της παρούσας διατριβής για τον προσδιορισμό των παραμέτρων τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αβραμίδης Ι.Ε. "Κριτική του Μοντέλου του Ισοδυνάμου Πλαισίου για Τοιχώματα και Πυρήνες κτιρίων Ο/Σ", Τεχνικά Χρονικά 1993, Επιστημονική Περιοχή Α, Τόμος 13, Τεύχος 3: 135 -170.

Αβραμίδης Ι.Ε., "Αριθμητικές Μέθοδοι Ανάλυσης των Κατασκευών Ι", Πανεπιστημιακές σημειώσεις 1995, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Υπηρεσία Δημοσιεύσεων.

Αβραμίδης Ι.Ε., Μορφίδης, Κ., "Γενικού τύπου πεπερασμένο στοιχείο δοκού για ισοδύναμη πλαισιακή προσομοίωση κτιριακών φορέων Ο/Σ", 13° Ελληνικό Συνέδριο Σκυροδέματος, Ρέθυμνο, 25-27 Οκτ. 1999.

Αβραμίδης Ι.Ε., Μορφίδης Κ., "Γενικευμένο Πεπερασμένο Στοιχείο Δοκού επί Ελαστικού Υποβάθρου τύπου Winkler", Τεχνικά Χρονικά 2000, Ι, Τεύχος 3: 99 – 116.

Αβραμίδης Ι.Ε., Μορφίδης, Κ., "Γενικού τύπου πεπερασμένο στοιχείο δοκού για ισοδύναμη πλαισιακή προσομοίωση κτιριακών φορέων οπλισμένου σκυροδέματος", ΚΤΙΡΙΟ, Επιστημονική έκδοση, Α 2001, 59 – 69.

Αβραμίδης Ι.Ε., Αβραμίδου, Μ., "Ένα πεπερασμένο στοιχείο για τον υπολογισμό παντός είδους εσχαρών πεδιλοδοκών", Πρακτικά 5ου Ελληνικού Συνεδρίου Σκυροδέματος, Λευκωσία / Κύπρος 1981, 321 – 325.

Αβραμίδης Ι.Ε., «Ακριβή μητρώα δυσκαμψίας και μεταφοράς της ελαστικώς εδραζόμενης δοκού με αξονικό φορτίο κατά τη θεωρία 2ης τάξης καθώς και για όλες τις υποπεριπτώσεις». Μονογραφία. Επιστημονική Επετηρίδα της Πολυτεχνικής Σχολής του Α.Π.Θ. / Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Τόμος Θ', 1982β.

Αναγνωστόπουλος Χ., Γεωργιάδης Μ., Πιτιλάκης Κ., "Θεμελιώσεις – Αντιστηρίξεις", Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Θεσσαλονίκη 1994.

Αναγνωστόπουλος Χ., "Η ανάλυση των επιφανειακών θεμελιώσεων με τους νέους κανονισμούς (1995)", Θεσσαλονίκη, Νοέμβριος 1996.

Abdalla K.M., "Review and Classification of Semi – Rigid Connections", Ed. Baniotopoulos C.C. and Wald F., Proceedings of the NATO Advanced Research on The Paramount Role of Joints into Reliable Response of Structures, Ouranoupolis Greece 2000, pp. 169 – 178.

ACI, "Suggested Analysis and Design Procedures for Combined Footings and Mats", ACI Structural Journal 1988, 85, No.3, 304 – 324.

Adin M.A., Yankelevsky D.Z. and Eisenberger M., "Analysis of beams on bi – moduli elastic foundation", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1985, 49: 319 – 330.

AISC. Load and Resistance Factor Design specifications for Structural Steel Buildings, American Institute of Steel Constructions, Chicago ILL 1994.

Alemdar B.N., and Gulkan P., "Beams on generalized foundation: supplementary element matrices", Engineering Structures 1997, Vol. 19, No. 11: 910 – 920.

Al-Sarraf S.Z., “Elastic instability of struts on, or driven into, elastic foundation”, Structural Engineering 1978, 56B: 13 – 19.

Ari – Gur J. and Elishakoff I., “On the effect of shear deformation on Buckling of Columns with Overhang”, Journal of Sound and Vibration 1990, 139(1): 165 – 169.

Avramidis, I.E., Avramidou, M., “Steifigkeitsmatrizen für ein weg- und drehelastisch gebettetes finites Balkenelement zur Berechnung allgemeiner rostförmiger Kreuzwerke”, Der Stahlbau 1979, 12, H.12: S.374 – 377.

Avramidis, I.E., “Übertragungs- und Steifigkeitsmatrizen für den elastisch gebetteten Zug- und Druckstab nach der Theorie II. Ordnung”, Die Bautechnik 1982α, 59/H.3, S.99–104 und 59/H.4, S.140–143.

Avramidis, I.E., Golm, B., “Steifigkeitsmatrizen für elastisch gebettete Balkenelemente”, Die Bautechnik 1980, 57, H.5: 171-173.

Aydogan M., “Stiffness-Matrix Formulation of Beams with Shear Effect on Elastic Foundation”, Journal of Structural Engineering 1995, 121/No.9: 1265 – 1270.

Ayvaz Y., and Daloglu A., “Earthquake Analysis of Beams resting on Elastic Foundations by using a Modified Vlasov Model”, Journal of Sound and Vibration 1997, 200(3): 315 – 325.

Ayvaz Y., Daloglu A., and Dogangun A., “Application of a Modified Vlasov Model to Earthquake Analysis of Plates resting on Elastic Foundation”, Journal of Sound and Vibration 1998, 212(3): 499 – 509.

Ayvaz Y., and Ozgan K., “Application of Modified Vlasov Model to Free Vibration Analysis of Beams resting on Elastic Foundation”, Journal of Sound and Vibration 2002, 255(1): 111 – 127.

Βαλαλάς Δ.Θ., “Εδαφομηχανική”, Εκδοτικός οίκος Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη 1985.

Βαλαλάς Δ.Θ., “Αντιστηρίξεις και Θεμελιώσεις”, Εκδοτικός οίκος Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη 1991.

Babie S.S. and Salmon D.C., “A Quadratic Order Elastic Foundation Finite Element”, Computers and Structures 1996, Vol. 58, No. 3: 435 – 443.

Babie S.S. and Salmon D.C., “Three – Noded Curved Isoparametric Soil Interface Element”, Computers and Structures 1997, Vol. 65, No. 2: 205 – 212.

Barden L., “Distribution of Contact Pressure under Foundations”, Geotechnique 1962, 12: 181 – 198.

Beaufait F.W., “Numerical analysis of beams on elastic foundation”, Journal of Engineering Mechanics Division ASCE 1976, EM1: 205 – 209.

Beaufait F.W. and Hoadley P.W., “Analysis of elastic beams on non-linear foundations”, Computers and Structures 1980, 12 669 – 676.

Beer G., and Meek J.L., “Infinite Domain Elements”, International Journal for Numerical Methods in Engineering 1981, Vol. 17: 43 – 52.

Bettess P., “More on Infinite Elements”, International Journal for Numerical Methods in Engineering 1980, 15: 1613 – 1626.

Bharatha S. and Levinson M., «A theory of Elastic Foundations», Arch. Rat. Mech. Anal. 1980, 74: 249 – 266.

Biot M.A., "Bending of an Infinite Beam on an Elastic Foundation", Journal of Applied Mechanics Transactions ASCE 1937, Vol. 59: A1 – A7.

Borowicka H., "Druckverteilung unter elastischen Platten", Ingenieur-Archiv 1939, 10(2): 113 – 125.

Bosson G., "The Flexure of an Infinite elastic strip on an elastic foundation", Philosophical Magazine 1939, Ser. 7: 37 – 50.

Boussinesq J.V., "Application des Potentiels", Paris 1885, p. 190

Bowles J.E., "Foundation Analysis and Design", New York: McGraw – Hill Book Co, 1988.

Burnmister D.M., "The general theory of stresses and displacements in layered soil systems", Journal of Applied Physics 1945, 16: 296.

Capron M.D. and Williams F.W., "Exact dynamic stiffnesses for an axially loaded uniform Timoshenko memder embedded in an elastic medium", Journal of Sound and Vibration 1988, 124, 453 – 466.

Catal H.H., "Free vibration of partially supported piles with the effects of bending moment, axial and shear force", Engineering Structures 2002, 24: 1615 – 1622.

Celik M., Saygun A., "A Method for the Analysis of Plates on a Two – Parameter Foundation", International Journal of Solids and Structures 1999, 36: 2891 – 2915.

Chan – New Chen, "Vibration of prismatic beam on an elastic foundation by the differential quadrature method", Computers and Structures 2000, Vol. 77: 1 – 9.

Chen Yung-Hsiang, "General Dynamic-Stiffness Matrix of a Timoshenko beam for transverse vibrations", Earthquake Engineering and Structural Dynamics 1987, 15: 391 – 402.

Chen W., and Kishi N., "Semi – Rigid Beam – to – Column Connections: Data Base and Modeling", Journal of Structural Engineering 1989, Vol. 115, No. 1: 105 – 119.

Cheung Y.K. and Nag D.K., "Plates and beams on elastic foundation – Linear and nonlinear behavior", Geotechnique 1968, 18: 250 – 260.

Cheng F.Y. and Pantelides C.P., "Static Timoshenko Beam-Column on Elastic Media", Journal of Structural Engineering 1988, 114 / No.5: 1152 – 1172.

Cheng F.Y. and Pantelides C.P., "Dynamic Timoshenko Beam-Column on Elastic Media", Journal of Structural Engineering 1988, 114 / No.7: 1524 – 1550.

Cheung Y.K. and Zienkiewicz O.C., "Plates and tanks on elastic foundations – An application of finite element method", International Journal of Solids and Structures 1965, Vol. 1: 451 – 461.

Chiwanga M. and Valsangkar A.J., "Generalized Beam Element on Two-Parameter Elastic Foundation", Journal of Structural Engineering 1988, 114 / No.6: 1414 – 1427.

Christensen R.M., “Theory of Viscoelasticity” 2nd edition, Academic Press, N.Y., 1982.

Clastornik J., Eisenberger M., Yankelevsky D.Z. and Adin M.A., “Beams on Variable Winkler Elastic Foundation”, Journal of Applied Mechanics 1986, 53: 925 – 928.

Coric B., and Markovic Z., “Non – Linear Analysis of Steel Structures with Semi – Rigid Connections”, Structural Engineering World 1998, Paper Reference T196 – 6, Elsevier Science Ltd. 1998.

Council on tall buildings and urban habitat. Committee 43. Semi-Rigid connections in steel frames. New York : Mc Graw-Hill, 1993.

Cowper G.R., “The shear Coefficient in Timoshenko’s Beam Theory”, Journal of Applied Mechanics 1966, 33: 335 – 340.

Dario Aristizabal J. – Ochoa, “Stability of Columns Under Uniform Axial Load with Semi – Rigid Connections”, Journal of Structural Engineering 1994, Vol. 120, No. 11: 3212 – 3222.

Dario Aristizabal J. – Ochoa, “Braced, partially braced and Unbraced columns: complete set of classical stability equations”, Structural Engineering and Mechanics 1996, Vol. 4, No. 4: 365 – 381.

Dario Aristizabal J. – Ochoa, “First and Second Order Stiffness Matrices and Load Vector of Beam – Columns with Semi – Rigid Connections”, Journal of Structural Engineering 1997, Vol. 123, No.5: 669 – 677.

Dario Aristizabal J. – Ochoa, “Non – Linear Large Deflection – Small Strain Elastic Analysis of Beam – Column with Semi – Rigid Connection”, Journal of Structural Engineering 2001, Vol. 127, No.1: 92 – 96.

Davis R., Henshell R.D. and Warburton G.B., “A Timoshenko Beam Element”, Journal of Sound and Vibration 1972, 22(4): 475 – 487.

Der Ingenieurbau: Baustatic – Baudynamic, Ernst & Sohn, Berlin, 1995.

De Rosa M.A., “Stability and dynamic analysis of two-parameter foundation beams”, Computers and Structures 1993, 49(2): 341 – 349.

De Rosa M.A., “Free Vibration of Timoshenko Beams on Two – Parameter Elastic Foundation”, Computers and Structures 1995, Vol. 57, No. 1: 151 – 156.

De Rosa M.A., “Stability and Dynamics of beams on Winkler Elastic Foundation”, Earthquake Engineering and Structural Dynamics 1989, 18: 377 – 388.

Dhillon B.S., and O’Malley J.W., “Interactive Design of SemiRigid Steel Frames”, Journal of Structural Engineering 1999, Vol. 125, No. 5: 556 – 564.

Djodjo B.A., “Transfer matrices for beams loaded axially and laid on an elastic foundation», The Aeronautical Quarterly 1969, 20: 281 – 306.

Dodge A., “Influence functions for beams on elastic foundations”, Journal of the Structural Division ASCE 1964, 90: 63 – 101.

Doyle P.F. and Pavlovic M.N., “Vibration of beams on Partial Elastic Foundation”, Earthquake Egineering and Structural Dynamics 1982, 10: 663 – 674.

Doudoumis I.N., and Mitsopoulou E.N., “On the solution of the Unilateral Contact Frictional Problem for general Static loading conditions”, Computers and Structures 1988, Vol. 30, No. 5: 1111 – 1126.

Dutta S.C., and Rana R., “A critical review on idealization and modeling for interaction among soil – foundation – structure system”, Computers and Structures 2002, 80: 1579 – 1594.

ETABS NonLinear Version 7.20, Extended 3D Analysis of Building Systems. Berkeley, California, USA: Computers and Structures, Inc; 1999.

Eisenberger M., “An exact high order beam element”, Computers and Structures 2003, 81: 147 – 152.

Eisenberger M. and Clastornik J., “Beams on Variable Two-Parameter Elastic Foundation”, Journal of Engineering Mechanics 1987, Vol. 113 / No.10: 1454 – 1466.

Eisenberger M., “Vibration Frequencies for beams on variable one- and two- parameter elastic foundation”, Journal of Sound and Vibration 1994, 176(5): 577 – 584.

Eisenberger M. and Yankelevsky D.Z., “Exact stiffness matrix for beams on elastic foundation”, Computers and Structures 1985, 21: 1355 – 1359.

Eisemberger M. and Clastornik J., “Vibrations and buckling of a beam on a variable Winkler elastic foundation”, Journal Sound and Vibration 1987, 115: 233 – 241.

Eisemberger M. Yankelevski D.Z. and Adin M.A., “Vibration of beams fully or partially supported on elastic foundation”, Earthquake Engineering and Structural Dynamics 1985, 13: 651 – 660.

Eisenberger M, Yankelevsky D.Z. and Clastornik J., “Stability of beams on elastic foundation”, Computers and Structures 1986, 24 / No.1: 135 – 139.

Essenburg F., “Shear Deformation in Beams on Elastic Foundations”, Journal of Applied Mechanics 1962, 29: 313-317.

Eurocode 3. Design of steel structures. Part 1.1: General rules and rules for buildings, European Communities for Standardization, Brussels, Belgium, 1992.

European committee for standardization, Eurocode 3: Part 1.1. Revised Annex J: Joints in building Frames, Env 1993 – 1 – 1: 1992/A2: 1998.

Faber O., “Pressure Distribution under Bases and Stability of Foundations”, Structural Engineering 1933, 11(3): 116 – 125.

Favre H., “Sur une loi de seconde approximation regissant la deformation dun sol horizontal sous l'action d'une charge repartie sur un segment de droite”. Comptes Rendus, Acad. Sci., Paris, France, 1960, 251: 2653 – 2655.

Filipich C.P., Laura P.A.A., Sonenblum M. and Gil E., “Transverse vibrations of a stepped beam subject to an axial force and embedded in a non-homogeneous Winkler foundation”, Journal of Sound and Vibration 1988, 126(1): 1 – 8.

Filipich C.P. and Rosales M.B., "A Variant of Rayleigh's Method Applied to Timoshenko Beams Embedded in a Winkler-Pasternak Medium", J. of Sound and Vibration 1988, 124(3): 443 – 451.

Filonenko-Borodich M.M., "Some Approximate Theories of Elastic Foundation", 1940 (in Russian), Uchenyie Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta Mekhanica, No.46, 3-18.

Fletcher D.Q., and Hermann L.R., "Elastic Foundation Representation of Continuum", Journal of Engineering Mechanics Division Proc. ASCE 1971, Vol. 97 / EM1: 95 – 107.

Föppl A., Vorlesungen über technische Mechanik, Bd.III, Festigkeitslehre, p.228. Leipzig und Berlin, 1909.

Franciosi C. and Masi A., "Free Vibrations of Foundation Beams on Two-Parameter Elastic Soil", Computers and Structures 1993, 47 / No.3, 419 – 426.

Franklin N. and Scott R.F., "Beam Equation with Variable Foundation Coefficient", Journal of the Engineering Mechanics Division 1979, 105 / EM5: 811 – 827.

Friedman Z., and Kosmatka J.B., "An improved two – node Timoshenko Beam Finite Element", Computers and Structures 1993, Vol. 47, No. 3: 473 – 481.

Friedrichs K.O., "Asymptotic Phenomena in Mathematical Physics", Bulletin of the American Society 1955, Vol. 61: 485 – 504.

Frye J.M., and Morris G.A., "Analysis of flexibly connected steel frames" Canadian Journal of Civil Engineering 1975, 2: 280 – 291.

Gecit M.R., "A Tensionless Contact without Friction between an Elastic Layer and Elastic Foundation", International Journal of Solids and Structures 1980, Vol. 16: 387 – 396.

Ghali, A. and Neville, A.M., "Structural Analysis – A Unified Classical and Matrix Approach", Chapman and Hall, London – New York, 3rd edition.

Gibson R.E., "Some Results Concerning Displacements and Stresses in a Non – Homogeneous Elastic Half – Space", Geotechnique 1967, 17: 58 – 67.

Gorbunov – Posadov M.I. and Serebrjanyi R.V., "Design of structures on elastic foundations", Proceedings 5th International Conference of Soil Mechanics and Foundation Engineering 1961, Vol. I: 643 – 648.

Grundy P., Thomas I.R., and Bennetts I.D., "Beam – to – Column Moment Connections", Journal of the Structural Division ASCE 1980, Vol. 106, No. ST1: 313 – 330.

Han J., and Frost J.D., "Load – Deflection response of transversely isotropic piles under lateral load", International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 2000, 24: 509 – 529.

Harr M.E. et al, "Euler Beams on a two Parameter Foundation Model", Journal of Soil Mechanics and Foundations Division 1969, Vol. 95 / SM4: 933 – 948.

Herrmann L.R., Mason W.E., and Chan S.T.K., “Response of Reinforcing Wires to Compressive States of Stress”, Journal of Composite Materials, Vol. 1, No. 3: 1967.

Hees G., Avramidis I., Franz J., Klippel M., Wulf A., “Finite Elemente in der Baustatik”, Fachgebiet Statik der Baukonstruktionen und Tragwerkslehre der Technischen Universität Berlin, Bericht Nr. 12, Berlin 1979.

Hetenyi M., “A General Solution for the Bending of Beams on an Elastic Foundation of Arbitary Continuity”, Journal of Applied Physics 1950, Vol.21: 55-58.

Hetenyi M., “Beams and Plates on Elastic foundations and Related Problems», Applied Mechanics Reviews 1966, 19 / No2: 95-102.

Hetenyi M., “Beams on elastic foundation”, 1946, University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan.

Horvath J.S., “New Subgrade Model Applied to Mat Foundations”, Journal of Geotechnical Engineering 1983α, 109/ No.12: 1567-1587.

Horvath J.S., “Modulus of Subgrade Reaction: New Perspective”, Journal of Geotechnical Engineering 1983b, 109/ No.12: 1591 – 1596.

Horvath J.S., “Beam-Column-Analogy Model for Soil – Structure Interaction Analysis”, Journal of Geotechnical Engineering 1993, 119/ No.2: 358 – 364.

Huang T.C., “The effect of Rotary Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams with Simple end Conditions”, Journal of Applied Mechanics 1961, 28: 579 – 583.

Huang Fuang – Yuan, Shi Gao – Liang, “Finite element analysis of pressure vessel using beam on elastic foundation analysis”, Finite Elements in Analysis and Design 1998, 28: 293 – 302.

Hu C., and Hartley G.A., “Analysis of thin plate on an elastic half – space”, Computers and Structures 1994, 52: 227 – 235.

Iyengar, K.T.S.R. and Anatharamu, S., “Finite Beam-Columns on Elastic Foundation”, Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE 1963, Vol. 90, No.EM6, Proc. Paper 3720: 139 – 160.

Ivanyi M., and Baniotopoulos C.C., “Semi – Rigid Connections in Structural Steelwork”, CISM courses and lectures No. 419, International Center for Mechanical Sciences, Springer Wien New York 2000.

Jones S.W., Kirby P.A., and Nethercot D.A., “The analysis of frames with semi – rigid connections – a state of the art report”, Journal of Constructural Steel Research 1983, 3(2): 2 – 13.

Jones S.W., Kirby P.A., and Nethercot D.A., “Columns with Semi – Rigid Joints”, Journal of the Structural Division ASCE 1982, Vol. 108, ST2: 361 – 372.

Jones R. and Xenophontos J., “On the Vlasov and Kerr Foundation Models”, Acta Mechanica 1976, 25: 45-49.

Jones R. and Xenophontos J., “The Vlasov Foundation Model”, International Journal for Mechanical Science 1977, 19: 317-323.

Jones G., “Analysis of Beams on elastic foundation”, Thomas Telford Publishing, London 1997.

Karamanlidis D. and Prakash V., “Exact transfer and stiffness matrices for a beam/column resting on a two-parameter foundation», Comp. Methods in Appl. Mechanics and Eng. 1989, 72: 77 – 89.

Karamanlidis D. and Prakash V., “Buckling and Vibration Analysis of Flexible Beams resting on an Elastic Half-Space”, Earthquake Engineering and Structural Dynamics 1988, 16: 1103 – 1114.

Kaschiev M.S. and Mikhalov K., “A Beam Resting on a Tensionless Winkler Foundations”, Computers and Structures 1995, Vol. 55, No. 2: 261 – 264.

Kenney J.T. Jr., “Steady state Vibrations of beam on Elastic Foundation for moving load”, Journal of Applied Mechanics 1954, Vol.21: 359 – 364.

Kerr A.D., “Elastic and Viscoelastic Foundation Models”, Journal of Applied Mechanics 1964, 31: 491-498.

Kerr A.D., “A Study of a New Foundation Model”, Acta Mechanica 1965, Vol. I / 2: 135-147.

Kerr A.D. and Rhines W.J., “A further study of elastic foundation models”, New York University, Dept. of Aeronautics and Astronautics, Jan. 1967, Rep. No. S-67-1.

Kerr A.D., “The stress and stability analysis of railroad tracks”, Journal of Applied Mechanics (Trans. A.S.M.E.) 1974, 41: 841 – 848.

Kerr A.D., “On the derivation of well posed Boundary Value problems in Structural Mechanics”, International Journal of Solids and Structures 1976, Vol. 12: 1 – 11.

Kerr A.D., “On the formal development of elastic foundation models”, Ingenieur-Archive 1984, 54: 455-464.

Kerr A.D., “On the Determination of Foundation Model Parameters”, Journal of Geotechnical Engineering 1985, Vol.111, No.11: 1334-1340.

Kishi N., and Chen W.f., “Moment – Rotation Relations of Semi – Rigid Connections with Angles”, Journal of Structural Engineering 1990, Vol. 116, No. 7: 1813 – 1834.

Kolar V. and Memec I. (1989), Modeling of soil – structure interaction, Elsevier, Amsterdam.

Korenev B.G., “Structures resting on an elastic foundation”. In: I.M. Rabinovich (Editor), Structural Mechanics in the U.S.S.R. 1917 – 1957. Pergamon Press, Oxford 1960: 160 – 190, (English translation edited by G. Hermann).

Krishnamurthy N.M. et al, “Analytical M – θ Curves for End – Plate Connections”, Journal of the Structural Division ASCE 1979, Vol. 105, ST1: 133 – 145.

Kukla S., “Free Vibration of a Beam supported on a stepped elastic foundation”, Journal Sound and Vibration 1991, 149: 259 – 265.

Lai C.L., Ting B.Y., Woon – Sung L., and Becker B.R., “Dynamic response of beams on elastic foundation”, Journal of Structural Engineering 1992, Vol. 118, No. 3: 853 – 858.

Laura P.A.A. and Cortinez V.H., “Vibrating Beam Partially Embedded in Winkler-Type Foundation”, Journal of Engineering Mechanics 1987, 113 / No.1, 143 – 147.

Lee S.Y., Kuo Y.H., and Lin F.Y., “Stability of a Timoshenko Beam resting on a Winkler Elastic Foundation”, Journal of Sound and Vibration 1992, 153(2): 193 – 202.

Lee S.L., Wang T.M. and Kao J.S., “Continuous beam-columns on elastic foundation”, Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE 1961, Vol. 87, EM2 / Paper 2801: 55 – 70.

Lee S.Y. and Ke H.Y., “Free vibrations of non-uniform beams resting on non-uniform elastic foundation with general elastic end restraints”, Computers and Structures 1990, 34: 421 – 429.

Lee I.K. and Harrison H.B., “Structure and foundation interaction theory”, Journal of the Structural Division ASCE 1970, 96, No. ST2: 177 – 197.

Lemcoe M.M., “Stresses in Layered elastic solids”, Journal of Engineering Mechanics Division Proc. ASCE 1960, EM4, 86: 1 – 22.

Lentini M., “Numerical Solution of the Beam Equation With Nonuniform Foundation Coefficient”, Journal of Applied Mechanics 1979, 46: 901 – 904.

Lenczner D., “Bending moments and pressures on model footings”, Concrete and Constructional Engineering 1962, 57: 181 – 187.

Levinson M. and Bharatha S., “Elastic foundation models - A new approach”, Proc. 4th Symposium on Eng. Appl. Solid Mech., Ontario Res. Found., Mississauga, Ontario, 1978.

Li T.Q., Choo B.S., and Nethercot D.A., “Connection Element Method for the Analysis of Semi – Rigid Frames”, Journal of Constructural Steel Research 1995, 32: 143 - 171.

Liao S.S.C., “Estimating the Coefficient of Subgrade Reaction for Plane Strain Conditions”, Proceedings of Institution of Civil Engineering and Geotechnical Engineering 1995, 113: 166 – 181.

Lin L., and Adams G.G., “Beam on Tensionless Elastic Fuondation”, Journal of Engineering Mechanics 1987, Vol. 113, No. 4: 542 – 553.

Lionberger S.R., and Weaver W., “Dynamic Response of Frames with NonRigid Connections”, Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE 1969, Vol. 95, EM1: 95 – 114.

Lord Layleigh, “Theory of Sound”, 2nd Edition, Dover Publications, New York, 1945.

MacLeod I.A., “Analysis of Shear Wall Buildings by the Frame Method”, Proc. Instn Civil Engineering 1973, 55: 593 – 603.

Malter H., “Numerical solutions for beams on elastic foundation”, Trans. ASCE 1960, 125, Paper No.3042: 757 – 791.

MATHEMATICA Version 4.1.0.0., Wolfram Research Inc., 2000

Matheu E.E., and Suarez L.E., “Eigenvalue Analysis of Structures with Flexible Random Connections”, Structural Engineering and Mechanics 1996, Vol. 4, No. 3: 277 – 301.

Mathews P.M., “Vibrations of a beam on elastic foundation” ZAMM 1958, 38: 105 – 115.

Mathews P.M., “Vibrations of a beam on elastic foundation II” ZAMM 1959, 39: 13 – 19.

Matsunaga H., “Vibration and Buckling of deep beam – columns on two parameter elastic foundations”, Journal of Sound and Vibration 1999, 228(2): 359 – 376.

Matsuda H. and Sakiyama T., “Analysis of beams on non-homogeneous elastic foundation”, Computers and Structures 1987, 25 / No.6: 941 – 946.

Maurizi M.J. and Rosales M.B., “Free vibrations of Timoshenko beams on a Winkler-Pasternak Foundation”, Department of Engineering, Universidad Nacional del Sur, Argentina, 1986.

Maurizi M.J., Rossi R.E., and Reyes J.A., “Equacion general de frequencias para vigas de un solo tramo”, Proceedings of 4th Brazilian Congress of Mechanical Engineering 1977, No. TA – 8A, 1 – 4.

Maurizi M.J., Rosales M. B., and Belles P., “A further note on the free vibrations of beams resting on an elastic foundations”, Journal Sound and Vibration 1988, 124: 191 – 193.

Menditto G., “Su alcuni problemi di elementi di fondazione riposanti su un suolo alla Pasternak”, Technica Italiana 1967, 32: 865 – 874.

Milicevic M., Zdravgovic S., Zlatkov D., Mladenovic B., and Igic T., “Seismic Analysis of Structures with Semi – Rigid Connections”, 11th European Conference on Earthquake Engineering, Balkema, Rotterdam 1998α.

Milicevic M., Zdravgovic S., Zlatkov D. and Kostadinov B., “Matrix Formulation of Design and Testing of Structures with Semi – Rigid Connections”, Structural Engineering World 1998, Paper Reference T223 – 3, Elsevier Science Ltd. 1998.

Miranda C. and Nair K. “Finite beams on elastic foundation”, Journal of the Structural Division ASCE 1966, 92: 131 – 142.

Mitsopoulou E.N., and Doudoumis I.N., “A Contribution to the Analysis of Unilateral Contact Problems with Friction”, SM Archives Oxford University Press 1987, 12/3: 165 – 186.

Miyahara F. and Ergatoudis J.G, “Matrix analysis of structure foundation interaction”, Journal of the Structural Division ASCE 1976, 102: 251 – 265.

Mohr G.A., “A contact stiffness matrix for finite element problems involving external elastic restraint”, Computers and Structures 1980, 12: 189 – 191.

Morfidis K., Avramidis I.E., “Formulation of a generalized beam element on a two-parameter elastic foundation with semi-rigid connections and rigid offsets”, Computers and Structures 2002, 80: 1919 –1934.

Monforton G.R., and Wu T.S., “Matrix Analysis of Semi – Rigidly Connected Frames”, Journal of the Structural Division ASCE 1963, Vol. 89, ST6: 13 – 42.

Mourelatos Z.P. and Parsons M.G., "A Finite Element Analysis of Beams on Elastic Foundation Including Shear and Axial Effects", Computers and Structures 1987, 27 / No.3, 323 – 331.

Νιτσιώτας Γ.Μ., "Ελαστοστατική", Τόμος 2, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1985.

Naidu N.R. and Rao G.V., "Vibrations of initially stressed uniform beams on a two – parameter elastic foundation", Computers and Structures 1995, Vol. 57, No. 5: 941 – 943.

Nogami T. and O'Neil M.W., "Beam On Generalized Two-Parameter Foundation", Journal of Engineering Mechanics 1985, 111 / No.5: 664 – 679.

Nogami T. and Yoon C. Lam, "Two - Parameter Layer Model For Analysis of Slab On Elastic Foundation", Journal of Engineering Mechanics 1987, Vol. 113 / No.9: 1279 – 1291.

Oden J.T., "Mechanics of Elastic Structures", McGraw – Hill Book Company, New York 1967.

Odhe J., "Die Berechnung Sohldruckverteilung unter grundungskorpern" Der Bauingenieur 1942, 23: 99 – 107.

Onu G., "Shear Effect in Beam Stiffness Matrix", Journal of Structural Engineering 1983, Vol. 109, No. 9: 2216 – 2221.

Onu G., "Shear Effect in Beam Stiffness" in: P.N. Cheremisinoff et al. (Eds), *Civil Engineering in Practice 1/Structures,* Technomic Publishing Company, Lancaster USA, 1987.

Onu G., "Shear Effect in Beam Finite Element on Two – Parameter Elastic Foundation", Journal of Structural Engineering 2000, Vol. 126 / No.9: 1104 – 1107.

Παναγιωτουνάκος Ε., "Σιδηρές Κατασκευές" Τόμος Δεύτερος, Έκδοση Πρώτη, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη 1984.

Pasternak P.L., "On a new Method of Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Constants" 1954 (in Russian), Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekture, Moscow, USSR.

Pasternak P.L., "Theory of beams on a Continuous Elastically Rotating and Elastically Setting Foundation (in Russian), Nauchno – Isledovatel' skaya Konferencia MISI, 1937

Pavlovic M.N. and Wylie G.B., "Vibration of beams on non-homogeneous elastic foundations", Earthquake Engineering and Structural Dynamics 1983, 11: 797 – 808.

Pavlovic M.N. and Tsikkos S., "Beams on quasi – Winkler foundations", Engineering Structures 1982, Vol. 4: 113 – 118.

Penzien J., "Discontinuity stresses in beams on elastic foundations", Journal of the Structural Division ASCE 1960, Vol. 86, ST4: 67 – 93.

Petrolito J., "Stiffness Analysis of Beams using a Higher – Order Theory", Computers and Structures 1995, Vol. 55, No. 1: 33 – 39.

Poulos H.G., and Davis E.H., "Elastic Solutions For Soil and Rock Mechanics", John Wiley and Sons Inc., New York 1974.

Poulos H.G., “Stresses and displacements in an elastic layer underlain by a rough rigid base”, Geotechnique 1967, 17: 378 – 410.

Rades M., “Steady-State Response of a finite beam on a Pasternak-Type Foundation”, International Journal of Solids and Structures 1970, 6: 739 – 756.

Rades M., “Forced Vibrations of a Rigid Body on a Three-Parameter Foundation”, International Journal of Mechanical Science 1971, Vol.13: 573-583.

Rao Kameswara N.S.V., Das Y.C. and Anandakrishnan M., “Varational Approach to beams on elastic foundations», J. of Engineering Mechanics Division ASCE 1971, Vol. 97 / EM2: 271 – 294.

Ratzersdorfer J., Discussion, 2. Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau, Vienna, Austria 1929, Springer: 316 – 318.

Razaqpur A.G. and Shah K.R., “Exact analysis of beams on two-parameter elastic foundation”, International Journal of Solids and Structures 1991, 27 / No.4: 435 – 454.

Razaqpur A.G., “Stiffness of Beam-Columns on Elastic Foundation with exact shape functions”, Computers and Structures 1986, 24 / No.5: 813 – 819.

Reissner E., “A note on Deflections of Plates on a Viscoelastic Foundation”, Journal of Applied Mechanics 1958, 25: 144-145.

Reissner E., “Note on the Formulation of the Problem of the Plate on an Elastic Foundation”, Acta Mechanica 1967, 4: 88-91.

Reese L.C. and Welch R.C., “Lateral loading of deep foundation in stiff clay”, Journal of Geotechnical Division ASCE 1975, 101: 633 – 649.

Rhines W.J., “A study of the Reissner foundation model”, Proc. 5th Nat. Cong. Appl. Mech. 1966, p. 319.

Riley K.F., Hobson M.P., and Bence S.J., “Mathematical Methods for Physics and Engineering”, Cambridge University Press (1998), UK

Romstad K.M., and Subramanian C.V., “Analysis of Frames with Partial Connection Rigidity”, Journal of the Structural Division ASCE 1970, Vol. 96, ST11: 2283 – 2300.

Rvachev V.L., “On the pressure under an infinite beam resting on an elastic half-space”, Journal of Applied Mathematics and Mechanics 1959, 23: 565 – 567.

Rvachev V.L., “On the bending of an infinite beam on an elastic half-space”, Journal of Applied Mathematics and Mechanics 1958, 22: 984 – 988.

Sadowsky M., “Zweidimensionale Probleme der Elastizitatstheorie”, Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik 1928, 8: 107 – 121.

SAP NonLinear Version 7.42, Integrated finite element analysis and design of structures. Berkeley, California, USA: Computers and Structures, Inc; 2000.

Scott R.F., “Foundation Analysis”, Prentice – Hall, Inc. Englewood Cliffs, NJ, 1981.

Seculovic M., and Salatic R., “Nonlinear analysis of frames with flexible connections”, Computers and Structures 2001, 79: 1097 – 1107.

Seculovic M., Salatic R., and Nefovska M., “Dynamic Analysis of Steel Frames with Flexible Connections”, Computers and Structures 2002, 80: 935 – 955.

Selvadurai A.P.S., “Elastic analysis of Soil – Structure Interaction”, Developments in Geotechnical Engineering Vol.17, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1979.

Shirima L.M. and Giger M.W., “Timoshenko beam element resting on two-parameter elastic foundation”, Journal of Engineering Mechanics 1992, 118 / No.2: 280 – 295.

Siemonsen F., “Die Lastaufnahmerkrafte im Baugrund und ihre Auswirkung auf die Spannungen in einem Fundament. Abhandlungen über Bodenmechanik und Grundbau”. Berlin, Bielefeld, Detmold: Erich Schmidt Verlag 1948, 120. (Σχετικές αναφορές: Die Bautechnik 159 (1941), 329 (1942)).

Silva A.R.D., Silveira R.A.M., and Goncalves P.B., “Numerical methods for analysis of plates on tensionless elastic foundations”, Int. Journal of Solids and Structures 2001, 38: 2083 – 2100.

Simoes L.M.C., “Optimization of Frames with Semi – Rigid Connections”, Computers and Structures 1996, Vol. 60, No. 4: 531 – 539.

Simitses G.J., “An Introduction to the elastic stability of Structures”, Prentice – Hall, Englewood Cliffs 1976, N.J.

Sirosh S.N., Ghali A. and Razaqpur A.G., “A general finite element for beams or beam-columns with or without elastic foundation”, International Journal for Numerical Methods in Engineering 1989, 28: 1061 – 1076.

Soldini M., Publ. Labor. Photoélasticité, École Polytech. Fédérale, Zürich, 9, 1965.

Song Y – H., and Lee D – G., “An Improved two – Spring Model for Foundation Uplift Analysis”, Computers and Structures 1993, Vol. 46, No. 5: 791 – 805.

Stephen N.G., and Levinson M., “A Second Order Beam Theory”. Journal of Sound and Vibration 1979, 67(3): 293 – 305.

Sundararajan C., “Stability of Columns On Elastic Foundations Subjected to Conservative and Non-Conservative Forces”, Journal of Sound and Vibration 1974, 37(1): 79 – 85.

Svec O.J., “The Unbonded Contact Problem of a Plate on the Elastic Half – Space”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1974, 3: 105 – 113.

Τσαμασφύρος Γ.Ι., “Μηχανική Παραμορφωσίμων Σωμάτων ΙΙ”, Εκδόσεις Συμμετρία 1990.

Τσαμασφύρος Γ.Ι., και Θεοτόκογλου Ε.Ε., “Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων”, Αθήνα 1994

Τσότσος Σ., “Εδαφομηχανική: Θεωρία – Μέθοδοι – Εφαρμογές”, Εκδόσεις Βερβερίδης και Πολυχρονιάδης, Θεσσαλονίκη 1991.

Terzaghi K., “Erdbaumechanik auf Bodenphysikalischer Grundlage”, F. Deuticke 1925, Wien, p.399

Terzaghi K., “Evaluation of Coefficient of Subgrade Reaction”, Geotechnique 1955, 5: 297 – 326.

Thambiratnam D. and Zhuge Y., “Free Vibration Analysis of Beams on Elastic Foundation”, Computers and Structures 1996, Vol. 60, No. 6: 971 – 980.

Thedorescu P.P, “On the buckling of a column in an elastic medium”, International Journal of Engineering Science 1981, 19(12): 1749 – 1755.

Thomas D.L., Wilson J.M. and Wilson R.R., “Timoshenko Beam Finite Elements”, Journal of Sound and Vibration 1973, 31(3): 315 – 330.

Thomas J. and Abbas B.A.H., “Finite Element model for Dynamic Analysis of Timoshenko Beam”, Journal of Sound and Vibration 1975, 41(3): 291 – 299.

Ting E.C., “Unified Formulation of Two – Parameter Foundation Model”, ZAMM 1973α, 53: 636 – 637.

Ting B.Y., “Finite beams on elastic foundation with restraints”, Journal of the Structural Division ASCE 1982, 108: 611 – 621.

Ting B.Y. and Mockry E.F., “Beam on Elastic Foundation Finite Element”, Journal of Structural Engineering 1984, 110(10): 2324 – 2339.

Ting E.G., “Unbonded Beams on a Two – Parameter Elastic Foundation”, Journal of the Franklin Institute 1973, Vol. 296, No. 2: 77 – 89.

Timoshenko S., “Theory of Elastic Stability”, McGraw – Hill Book Company, Inc, New York 1936.

Timoshenko S.P. and Goodier J.N., “Theory of Elasticity” 3rd Edition, McGraw – Hill, New York 1970

Timoshenko S.P., “On the correction for shear of differential equation for transverse vibrations of prismatic bars”, Philosophical Magazine 1921, 41, 744 – 746.

Tin – Loi F., and Misa J.S., “Large Displacement Elastoplastic Analysis of Semi – Rigid Steel Frames”, International Journal For Numerical Methods in Engineering 1996, Vol. 39: 741 – 762.

Tsai N. and Westmann R.A., “Beam on Tensionless Foundation”, Journal of Engineering Mechanics Proc. ASCE 1967, Vol. 93, EM5: 1 – 12.

Vallabhan C.V.G. and Daloglu A.T., “Consistent FEM – Vlasov Model for Plates on Layered Soil”, Journal of Structural Engineering 1999, Vol. 125 / No. 1: 108 –113.

Vallabhan C.V.G and Das Y.C., “Parametric Study of Beams on Elastic Foundations”, Journal of Engineering Mechanics 1988, 114 / No.12: 2072 – 2082.

Vallabhan C.V.G and Das Y.C., “Modified Vlasov Model For Beams on Elastic Foundations”, Journal of Geotechnical Engineering 1991α, 117 / No.6: 956-966.

Vallabhan C.V.G and Das Y.C., “A Refined Model For Beams on Elastic Foundations”, International Journal of Solids and Structures 1991β, 27 / No.5: 629-637.

Vallabhan C.V.G., Straughan W.T. and Das Y.C., “Refined Model for Analysis of Plates on Elastic Foundations”, Journal of Engineering Mechanics 1991γ, Vol. 117 / No. 12: 2830 – 2844.

Vallabhan C.V.G and Das Y.C., “Analysis of Circular Tank Foundations” Journal of Engineering Mechanics 1991, Vol. 117, No. 4: 789 – 797.

Valsangkar A.J. and Pradhanang R.B., “Free Vibration of Partially Supported Piles”, Journal of Engineering Mechanics 1987, 113 / No.8: 1244 – 1247.

Valsangkar A.J. and R. Pradhanang, “Vibrations of beam-columns on two-parameter elastic foundation”, Earthquake Engineering and Structural Dynamics 1988, 16: 217 – 225.

Vardanyan V.V., “On the theory of calculating plates on elastic foundation”. In: S.M. Dugar’yan (Editor), Theory of Plates and Shells. Program for Scientific Translations. Jerusalem 1966, pp. 279 –285.

Vesic A.B., “Bending of beams on isotropic elastic solid”, Journal of Engineering Mechanics Division ASCE 1961, Vol. 87 / EM 2: 35-53.

Vesic A.B., and Johnson W.H., “Model Studies of Beams on a Silt Subgrade”, Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division ASCE 1963, Vol. 89, SM1: 1 – 23.

Vesic A.S. and Saxena S.K., “Analysis of Structural Behavior of AASHO Road test rigid Pavements”, NCHRP Report No.97, Highway Research Board, Washington, D.C., 1970.

Viladkar M.N., Ranjan G., and Sharma R.P., “Soil – Structure Interaction in the Time Domain”, Computers and Structures 1993, Vol. 46, No. 3: 429 – 442.

Viladkar M.N., Godbole P.N., and Noorzaei J., “Modeling of Interface for Soil – Structure Interaction Studies” Computers and Structures 1994, Vol. 52, No. 4: 765 – 779.

Vlasov V.Z. and Leont'ev U.N., «Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations», Gosudarstvennoe Izdatel’stvo, Fiziko-Matematicheskoi Literatury, 1960 Moskva. [(Translated from Russian), Israel Program for Scientific Translations 1966, Jerusalem]

Wang T.M. and Stephens J.E., “Natural Frequencies of Timoshenko Beams on Pasternak Foundation”, Journal of Sound and Vibration 1977, 51(2): 149 – 155.

Wang J., “Vibration of stepped beams on elastic foundation”, Journal Sound and Vibration 1991, 149(2): 315 – 322.

Wang T.M. and Gagnon L.W., “Vibrations of continuous Timoshenko Beams on Winkler-Pasternak Foundations”, Journal of Sound and Vibration 1978, 59(2): 211 – 220.

Weitsman Y., “On foundation that React in Compression only”, Journal of Applied Mechanics 1970, 37: 1019 – 1030.

West R.P. et al., “Stability of end – bearing piles in a non – homogeneous elastic foundation”, International Journal for numerical and analytical methods in geomechanics 1997, Vol.21: 845 – 861.

West R.P. and Pavlovic M.N., “Finite – element model sensitivity in the vibration of partially embedded beams”, International Journal for Numerical Methods in Engineering 1999, 44: 517 – 533.

West H.H. and Mafi M., "Eigenvalues For Beam-Columns On Elastic Supports", Journal of Structural Engineering 1984, 110 / No.6: 1305 – 1320.

Westergaard H.M., "Theory of Elasticity and Plasticity", Dover Publications Inc., New York 1952

White M.W.D. and Heppler G.R., "Vibration modes and Frequencies of Timoshenko Beams with Attached Rigid Bodies", Journal of Applied Mechanics 1995, Vol. 162: 193 – 199.

Wieghardt K., "Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage", Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik 1922, 2: 165-184

Williams F.W. and Kennedy D., "Exact dynamic member stiffnesses for a beam on an elastic foundation", Earthquake Engineering and Structural Dynamics 1987, 15: 133 – 136.

Winkler E., "Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit", Dominicus, Prague 1867.

Xu L., and Crieson D.E., "Computer – Automated Design of Semi – Rigid Steel Frameworks", Journal of Structural Engineering 1993, Vol. 119, No. 30: 1740 – 1760.

Yang T.Y., "A finite element analysis of plates on a two parameter elastic foundation model", Computers and Structures 1972, Vol. 2: 593 – 614.

Yankelevsky D.Z. and Eisenberger M., "Analysis of a beam-column on elastic foundation", Computers and Structures 1986, 23: 351 – 356.

Yim C. and Chopra A.K., "Earthquake Response of Structures with Partial Uplift on Winkler Foundation", Earthquake Engineering and Structural Dynamics 1984, Vol. 12: 263 – 281.

Ylinen A. and Mikkola M., "A Beam on a Wieghard – type Elastic Foundation", International Journal of Solids and Structures 1967, Vol. 3: 617 – 633.

Yokoyama T., "Vibrations and transient responses of Timoshenko beams resting on elastic foundations", Ingenieur-Archiv 1987, 57: 81 – 90.

Yokoyama T., "Vibrations of Timoshenko beam-column on two-parameter elastic foundations", Earthquake Engineering and Structural Dynamics 1991, 20: 355 – 370.

Yokoyama T., "Vibration Analysis of Timoshenko Beam-Columns on two Parameter Elastic Foundation", Computers and Structures 1996, 61 / No.6: 995 – 1007.

Yokoyama T., "Parametric Instability of Timoshenko Beams resting on an elastic foundation", Computers and Structures 1988, 28 / No.2: 207 – 216.

Zhaohua F. and Cook R.D., "Beam Elements on Two-Parameter Elastic Foundations", Journal of Engineering Mechanics 1983, 109 / No.6: 1390 – 1402.

Zhou Ding, "A general solution to vibrations of beams on variable Winkler elastic foundation", Computers and Structures 1993, 47 / No1: 83 – 90.

Zimmermann H., "Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues", 1888 Berlin, 2nd ed., Berlin 1930.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Μητρώα Δυσκαμψίας, Μεταφοράς και φόρτισης δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων.

Στο παράρτημα αυτό θα δοθούν οι κλειστές αναλυτικές εκφράσεις μητρώων δυσκαμψίας, μεταφοράς και φόρτισης δοκών Timoshenko επί ελαστικού υποβάθρου τριών παραμέτρων στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης.

Όσον αφορά τα μητρώα δυσκαμψίας, θα δοθούν οι συντελεστές τους για τις περιπτώσεις λύσης A_1, A_2, B_1, B_2 και B_3 οι οποίες σύμφωνα με τον Πίνακα 3.6 (Παράγραφος 3.3.2.2), είναι μαθηματικώς εφικτές. Όπως τονίστηκε στην Παράγραφο 3.4.1.1α, τα μητρώα δυσκαμψίας των στοιχείων δοκού μπορούν γενικά να εκφραστούν με βάση τη μητρωική σχέση: $[K] = [Q][R]^{-1}$. Ωστόσο, λόγω της πολυπλοκότητας των μητρώων [R], [Q] δεν είναι δυνατή η αναλυτική εκτέλεση του μετασχηματισμού που οδηγεί στον σχηματισμό του μητρώου δυσκαμψίας [K]. Έτσι στο παρόν Παράρτημα θα δοθούν όλα τα στοιχεία των μητρώων [R], [Q].

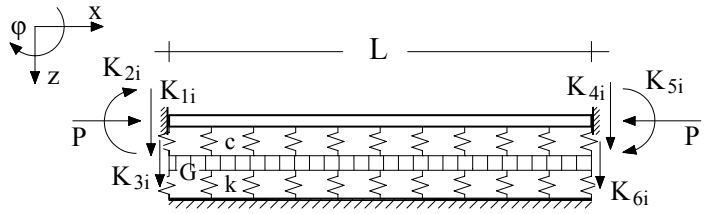
Στο παρόν Παράρτημα θα δοθούν επίσης και όλα τα στοιχεία των μητρώων μεταφοράς για τις περιπτώσεις λύσης A_1, B_1, και B_2. Παραλείπονται τα στοιχεία που αφορούν τις περιπτώσεις λύσης A_2 και B_3 καθώς οι περιπτώσεις αυτές εμφανίζονται για τιμές αξονικής θλιπτικής φόρτισης P>Φ (βλέπε Παράγραφο 3.3.2.2). Επειδή είναι πρακτικά αδύνατη η εμφάνιση τόσο υψηλής αξονικής φόρτισης (της τάξης του 10^6, που αντιστοιχεί στις συνήθεις τιμές που μπορεί να λάβει ο συντελεστής δυστμησίας για δοκούς σκυροδέματος) κρίνεται ως μη αναγκαίος ο σχηματισμός των μητρώων για αυτές τις περιπτώσεις λύσης.

Τα μητρώα φορτίου αφορούν δοκούς με στροφικά ελατήρια στα άκρα τους. Οι περιπτώσεις φόρτισης για τις οποίες δίνονται τα μητρώα φόρτισης είναι κατά σειρά:

- Μοναχικό κατακόρυφο φορτίο σε τυχούσα θέση του ανοίγματος,
- Μοναχική ροπή σε τυχούσα θέση του ανοίγματος,
- Τραπεζοειδής φόρτιση σε τμήμα του ανοίγματος.

Τέλος στο παρόν παράρτημα δίνονται και οι συναρτήσεις μορφής που είναι βασισμένες στις αλγεβρικές / προσεγγιστικές συναρτήσεις παρεμβολής (Παράγραφος 4.4.1.1β, Σελίδα 140).

ΜΗΤΡΩΑ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ



Δεδομένα Δοκού $\begin{cases} EI,\ GF'\ \text{πεπ.} \\ GF \to \infty \end{cases}$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ & \text{συμμ.} & & & K_{55} & K_{56} \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix}$$

$$[K] = [Q][R]^{-1}$$

Περίπτωση A_1

$$[Q] = \begin{bmatrix} d_1 & -d_1 & d_2 & d_3 & -d_2 & d_3 \\ -EIA_4R_1 & -EIA_4R_1 & -EIb_4 & -EIb_3 & -EIb_4 & EIb_3 \\ -GR_1 & GR_1 & -GR & -GQ & GR & -GQ \\ -d_1f_{1L} & d_1f_{2L} & -d_2f_{3L}+d_3f_{4L} & -d_3f_{3L}-d_2f_{4L} & d_2f_{5L}+d_3f_{6L} & -d_3f_{5L}+d_2f_{6L} \\ EIA_4R_1f_{1L} & EIA_4R_1f_{2L} & EI(b_4f_{3L}-b_3f_{4L}) & EI(b_3f_{3L}+b_4f_{4L}) & EI(b_4f_{5L}+b_3f_{6L}) & EI(b_4f_{6L}-b_3f_{5L}) \\ GR_1f_{1L} & -GR_1f_{2L} & G(Rf_{3L}-Qf_{4L}) & G(Rf_{4L}+Qf_{3L}) & -G(Rf_{5L}+Qf_{6L}) & G(-Rf_{6L}+Qf_{5L}) \end{bmatrix}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} A_1 & A_1 & A_3 & -A_2 & A_3 & A_2 \\ A_4 & -A_4 & A_5 & A_6 & -A_5 & A_6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ A_1f_{1L} & A_1f_{2L} & A_3f_{3L}+A_2f_{4L} & A_3f_{4L}-A_2f_{3L} & A_3f_{5L}-A_2f_{6L} & A_3f_{6L}+A_2f_{5L} \\ A_4f_{1L} & -A_4f_{2L} & A_5f_{3L}-A_6f_{4L} & A_6f_{3L}+A_5f_{4L} & -A_5f_{5L}-A_6f_{6L} & A_6f_{5L}-A_5f_{6L} \\ f_{1L} & f_{2L} & f_{3L} & f_{4L} & f_{5L} & f_{6L} \end{bmatrix}$$

$d_1 = EI(A_4R_1^2) + P(A_1R_1)$	$d_2 = EIb_1 + P\alpha_1$	$d_3 = EIb_2 - P\alpha_2$	$b_1 = (R^2 - Q^2)A_5 - (2RQ)A_6$
$b_2 = (R^2 - Q^2)A_6 + (2RQ)A_5$	$b_3 = A_6R + A_5Q$	$b_4 = A_5R - A_6Q$	$\alpha_1 = A_3R + A_2Q$
$\alpha_2 = A_2R - A_3Q$	$\beta_1 = -EI(R^2 - Q^2) + \Phi$	$\beta_2 = 2EIRQ$	
$A_1 = \left(1 + \frac{k}{c}\right) - \frac{G}{c}R_1^2$	$A_2 = 2RQ\frac{G}{c}$	$A_3 = \left(1 + \frac{k}{c}\right) - \frac{G}{c}(R^2 - Q^2)$	
$A_4 = \left[\frac{\Phi R_1}{-EIR_1^2 + \Phi}\right]A_1$	$A_5 = \left(\frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2}\right)\Phi$	$A_6 = \left(\frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\beta_1^2 + \beta_2^2}\right)\Phi$	

- Οι συντελεστές R, R_1, Q δίνονται από τις σχέσεις 3.30α, 3.30β και 3.30γ (Παράγραφος 3.3.1, σελ. 112).
- Οι συντελεστές f_{iL} συμβολίζουν τις τιμές $f_i(L)$ των συναρτήσεων $f_i(x)$ (Πίνακες 3.2α και 3.2β, σελ.114).

ΜΗΤΡΩΑ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ (Συνέχεια)

Περίπτωση Α₂

$$[Q]=\begin{bmatrix} 0 & -d_1 & d_2 & d_3 & -d_2 & d_3 \\ EIA_4Q & 0 & -EIb_4 & -EIb_3 & -EIb_4 & EIb_3 \\ 0 & -GQ & -GR & -GQ_1 & GR & -GQ_1 \\ -d_1f_{2L} & d_1f_{1L} & -d_2f_{3L}+d_3f_{4L} & -d_3f_{3L}-d_2f_{4L} & d_2f_{5L}+d_3f_{6L} & -d_3f_{5L}+d_2f_{6L} \\ -EIA_4Qf_{1L} & -EIA_4Qf_{2L} & EI(b_4f_{3L}-b_3f_{4L}) & EI(b_3f_{3L}+b_4f_{4L}) & EI(b_4f_{5L}+b_3f_{6L}) & EI(b_4f_{6L}-b_3f_{5L}) \\ -GQf_{2L} & GQf_{1L} & G(Rf_{3L}-Q_1f_{4L}) & G(Rf_{4L}+Q_1f_{3L}) & -G(Rf_{5L}+Q_1f_{6L}) & G(-Rf_{6L}+Q_1f_{5L}) \end{bmatrix}$$

$$[R]=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & A_3 & -A_2 & A_3 & A_2 \\ 0 & A_4 & A_5 & A_6 & -A_5 & A_6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ A_1f_{1L} & A_1f_{2L} & A_3f_{3L}+A_2f_{4L} & -A_2f_{3L}+A_3f_{4L} & A_3f_{5L}-A_2f_{6L} & A_3f_{6L}+A_2f_{5L} \\ -A_4f_{2L} & A_4f_{1L} & A_5f_{3L}-A_6f_{4L} & A_6f_{3L}+A_5f_{4L} & -A_5f_{5L}-A_6f_{6L} & A_6f_{5L}-A_5f_{6L} \\ f_{1L} & f_{2L} & f_{3L} & f_{4L} & f_{5L} & f_{6L} \end{bmatrix}$$

$d_1 = EI(A_4Q^2) - P(A_1Q)$	$d_2 = EIb_1 + P\alpha_1$	$d_3 = EIb_2 - P\alpha_2$	$b_1 = (R^2 - Q_1^2)A_5 - (2RQ_1)A_6$
$b_2 = (R^2 - Q_1^2)A_6 + (2RQ_1)A_5$	$b_3 = A_6R + A_5Q_1$	$b_4 = A_5R - A_6Q_1$	$\alpha_1 = A_3R + A_2Q_1$
$\alpha_2 = A_2R - A_3Q_1$	$\beta_1 = -EI(R^2 - Q_1^2) + \Phi$	$\beta_2 = 2EIRQ_1$	
$A_1 = \left(1+\frac{k}{c}\right) + \frac{G}{c}Q^2$	$A_2 = 2RQ_1\frac{G}{c}$	$A_3 = \left(1+\frac{k}{c}\right) - \frac{G}{c}(R^2 - Q_1^2)$	
$A_4 = \left[\frac{\Phi Q}{EIQ^2+\Phi}\right]A_1$	$A_5 = \left(\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}{\beta_1^2+\beta_2^2}\right)\Phi$	$A_6 = \left(\frac{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}{\beta_1^2+\beta_2^2}\right)\Phi$	

- Οι συντελεστές R, Q, Q_1 δίνονται από τις σχέσεις 3.30β, 3.32 και 3.30γ (Παράγραφος 3.3.1, σελ. 112).
- Οι συντελεστές f_{iL} συμβολίζουν τις τιμές $f_i(L)$ των συναρτήσεων $f_i(x)$ (Πίνακες 3.2α και 3.2β, σελ.114).

ΜΗΤΡΩΑ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ (Συνέχεια)

Περίπτωση B_1

$$[Q]=\begin{bmatrix} d_1 & -d_1 & d_2 & -d_2 & d_3 & -d_3 \\ -EIA_4R & -EIA_4R & -EIA_5R_1 & -EIA_5R_1 & -EIA_6R_2 & -EIA_6R_2 \\ -GR & GR & -GR_1 & GR_1 & -GR_2 & GR_2 \\ -d_1f_{1L} & d_1f_{2L} & -d_2f_{3L} & d_2f_{4L} & -d_3f_{5L} & d_3f_{6L} \\ EIA_4Rf_{1L} & EIA_4Rf_{2L} & EIA_5R_1f_{3L} & EIA_5R_1f_{4L} & EIA_6R_2f_{5L} & EIA_6R_2f_{6L} \\ GRf_{1L} & -GRf_{2L} & GR_1f_{3L} & -GR_1f_{4L} & GR_2f_{5L} & -GR_2f_{6L} \end{bmatrix}$$

$$[R]=\begin{bmatrix} A_1 & A_1 & A_2 & A_2 & A_3 & A_3 \\ A_4 & -A_4 & A_5 & -A_5 & A_6 & -A_6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A_1f_{1L} & A_1f_{2L} & A_2f_{3L} & A_2f_{4L} & A_3f_{5L} & A_3f_{6L} \\ A_4f_{1L} & -A_4f_{2L} & A_5f_{3L} & -A_5f_{4L} & A_6f_{5L} & -A_6f_{6L} \\ f_{1L} & f_{2L} & f_{3L} & f_{4L} & f_{5L} & f_{6L} \end{bmatrix}$$

$d_1 = EI(A_4R^2)+P(A_1R)$	$d_2 = EI(A_5R_1^2)+P(A_2R_1)$	$d_3 = EI(A_6R_2^2)+P(A_3R_2)$
$A_1=\left(1+\frac{k}{c}\right)-\frac{G}{c}R^2$	$A_2=\left(1+\frac{k}{c}\right)-\frac{G}{c}R_1^2$	$A_3=\left(1+\frac{k}{c}\right)-\frac{G}{c}R_2^2$
$A_4=\left[\frac{\Phi R}{-EIR^2+\Phi}\right]A_1$	$A_5=\left[\frac{\Phi R_1}{-EIR_1^2+\Phi}\right]A_2$	$A_6=\left[\frac{\Phi R_2}{-EIR_2^2+\Phi}\right]A_3$

- Οι συντελεστές R, R_1, R_2 δίνονται στον Πίνακα 3.2β, (σελ. 114).
- Οι συντελεστές f_{iL} συμβολίζουν τις τιμές $f_i(L)$ των συναρτήσεων $f_i(x)$ (Πίνακες 3.2α και 3.2β, σελ.114).

ΜΗΤΡΩΑ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ (Συνέχεια)

Περίπτωση B₂

$$[Q]=\begin{bmatrix} d_1 & -d_1 & 0 & -d_2 & 0 & -d_3 \\ -EIA_4R & -EIA_4R & EIA_5Q & 0 & EIA_6Q_1 & 0 \\ -GR & GR & 0 & -GQ & 0 & -GQ_1 \\ -d_1f_{1L} & d_1f_{2L} & -d_2f_{4L} & d_2f_{3L} & -d_3f_{6L} & d_3f_{5L} \\ EIA_4Rf_{1L} & EIA_4Rf_{2L} & -EIA_5Qf_{3L} & -EIA_5Qf_{4L} & -EIA_6Q_1f_{5L} & -EIA_6Q_1f_{6L} \\ GRf_{1L} & -GRf_{2L} & -GQf_{4L} & GQf_{3L} & -GQ_1f_{6L} & GQ_1f_{5L} \end{bmatrix}$$

$$[R]=\begin{bmatrix} A_1 & A_1 & A_2 & 0 & A_3 & 0 \\ A_4 & -A_4 & 0 & A_5 & 0 & A_6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ A_1f_{1L} & A_1f_{2L} & A_2f_{3L} & A_2f_{4L} & A_3f_{5L} & A_3f_{6L} \\ A_4f_{1L} & -A_4f_{2L} & -A_5f_{4L} & A_5f_{3L} & -A_6f_{6L} & A_6f_{5L} \\ f_{1L} & f_{2L} & f_{3L} & f_{4L} & f_{5L} & f_{6L} \end{bmatrix}$$

$d_1 = EI(A_4R^2)+P(A_1R)$	$d_2 = EI(A_5Q^2)-P(A_2Q)$	$d_3 = EI(A_6Q_1^2)-P(A_3Q_1)$
$A_1 = \left(1+\frac{k}{c}\right)-\frac{G}{c}R^2$	$A_2 = \left(1+\frac{k}{c}\right)+\frac{G}{c}Q^2$	$A_3 = \left(1+\frac{k}{c}\right)+\frac{G}{c}Q_1^2$
$A_4 = \left[\frac{\Phi R}{-EIR^2+\Phi}\right]A_1$	$A_5 = \left[\frac{\Phi Q}{EIQ^2+\Phi}\right]A_2$	$A_6 = \left[\frac{\Phi Q_1}{EIQ_1^2+\Phi}\right]A_3$

- Οι συντελεστές R, Q, Q_1 δίνονται στον Πίνακα 3.2β, (σελ. 114).
- Οι συντελεστές f_{iL} συμβολίζουν τις τιμές $f_i(L)$ των συναρτήσεων $f_i(x)$ (Πίνακες 3.2α και 3.2β, σελ.114).

ΜΗΤΡΩΑ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ (Συνέχεια)

Περίπτωση B_3

$$[Q]=\begin{bmatrix} d_1 & -d_1 & 0 & -d_2 & d_3 & -d_3 \\ -EIA_4R & -EIA_4R & EIA_5Q & 0 & -EIA_6R_1 & -EIA_6R_1 \\ -GR & GR & 0 & -GQ & -GR_1 & GR_1 \\ -d_1f_{1L} & d_1f_{2L} & -d_2f_{4L} & d_2f_{3L} & -d_3f_{5L} & d_3f_{6L} \\ EIA_4Rf_{1L} & EIA_4Rf_{2L} & -EIA_5Qf_{3L} & -EIA_5Qf_{4L} & EIA_6R_1f_{5L} & EIA_6R_1f_{6L} \\ GRf_{1L} & -GRf_{2L} & -GQf_{4L} & GQf_{3L} & GR_1f_{5L} & -GR_1f_{6L} \end{bmatrix}$$

$$[R]=\begin{bmatrix} A_1 & A_1 & A_2 & 0 & A_3 & A_3 \\ A_4 & -A_4 & 0 & A_5 & A_6 & -A_6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ A_1f_{1L} & A_1f_{2L} & A_2f_{3L} & A_2f_{4L} & A_3f_{5L} & A_3f_{6L} \\ A_4f_{1L} & -A_4f_{2L} & -A_5f_{4L} & A_5f_{3L} & A_6f_{5L} & -A_6f_{6L} \\ f_{1L} & f_{2L} & f_{3L} & f_{4L} & f_{5L} & f_{6L} \end{bmatrix}$$

$d_1 = EI(A_4R^2)+P(A_1R)$	$d_2 = EI(A_5Q^2)-P(A_2Q)$	$d_3 = EI(A_6R_1^2)+P(A_3R_1)$
$A_1=\left(1+\frac{k}{c}\right)-\frac{G}{c}R^2$	$A_2=\left(1+\frac{k}{c}\right)+\frac{G}{c}Q^2$	$A_3=\left(1+\frac{k}{c}\right)-\frac{G}{c}R_1^2$
$A_4=\left[\frac{\Phi R}{-EIR^2+\Phi}\right]A_1$	$A_5=\left[\frac{\Phi Q}{EIQ^2+\Phi}\right]A_2$	$A_6=\left[\frac{\Phi R_1}{-EIR_1^2+\Phi}\right]A_3$

- Οι συντελεστές R, Q, R_1 δίνονται στον Πίνακα 3.2β, (σελ. 114).
- Οι συντελεστές f_{iL} συμβολίζουν τις τιμές $f_i(L)$ των συναρτήσεων $f_i(x)$ (Πίνακες 3.2α και 3.2β, σελ.114).

ΜΗΤΡΩΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

$$[F]=\begin{bmatrix} W_1(x) & W_2(x) & W_3(x) & W_4(x) & W_5(x) & W_6(x) \\ G_1(x) & G_2(x) & G_3(x) & G_4(x) & G_5(x) & G_6(x) \\ W_{k1}(x) & W_{k2}(x) & W_{k3}(x) & W_{k4}(x) & W_{k5}(x) & W_{k6}(x) \\ V_1(x) & V_2(x) & V_3(x) & V_4(x) & V_5(x) & V_6(x) \\ M_1(x) & M_2(x) & M_3(x) & M_4(x) & M_5(x) & M_6(x) \\ V_{G1}(x) & V_{G2}(x) & V_{G3}(x) & V_{G4}(x) & V_{G5}(x) & V_{G6}(x) \end{bmatrix}$$

Περίπτωση A_1

$$W_1(x)=V_4(x)=-\left(\frac{A_1b_3}{D_1}\right)m_1(x)+\left(\frac{A_3b_3-A_2(A_4R_1-b_4)}{D_1}\right)m(x)\overline{m}(x)+\left(\frac{A_2b_3+A_3(A_4R_1-b_4)}{D_1}\right)n(x)\overline{n}(x)$$

$$W_2(x)=-M_4(x)=\left[\frac{A_1(d_2Q-d_3R)}{D_2}\right]n_1(x)-\left[\frac{A_3(d_1Q-d_3R_1)+A_2(d_1R-d_2R_1)}{D_2}\right]n(x)\overline{m}(x)-$$
$$-\left[\frac{A_3(d_2R_1-d_1R)+A_2(d_1Q-d_3R_1)}{D_2}\right]m(x)\overline{n}(x)$$

$$W_3(x)=V_{G4}(x)=\left[\frac{A_1(A_3b_3+A_2b_4)}{D_1}\right]m_1(x)-\left[\frac{A_1(A_3b_3+A_2b_4)}{D_1}\right]m(x)\overline{m}(x)-\left[\frac{A_4R_1(A_2^2+A_3^2)+A_1(A_2b_3-A_3b_4)}{D_1}\right]n(x)\overline{n}(x)$$

$$W_4(x)=-\left[\frac{A_1(A_5Q-A_6R)}{D_2}\right]n_1(x)-\left[\frac{A_3(A_6R_1-A_4Q)+A_2(A_5R_1-A_4R)}{D_2}\right]n(x)\overline{m}(x)+$$
$$+\left[\frac{A_2(-A_6R_1+A_4Q)+A_3(A_5R_1-A_4R)}{D_2}\right]m(x)\overline{n}(x)$$

$$W_5(x)=-G_4(x)=\left(\frac{A_1A_2}{EID_1}\right)m_1(x)-\left(\frac{A_1A_2}{EID_1}\right)m(x)\overline{m}(x)+\left[\frac{A_3(A_1-A_3)-A_2^2}{EID_1}\right]n(x)\overline{n}(x)$$

$$W_6(x)=W_{k4}(x)=-\left[\frac{(A_5Q-A_6R)}{D_2}\right]n_1(x)+\left[\frac{(A_4Q-A_6R_1)}{D_2}\right]n(x)\overline{m}(x)-\left[\frac{(A_4R-A_5R_1)}{D_2}\right]m(x)\overline{n}(x)$$

$$W_{k1}(x)=V_6(x)=-\left(\frac{b_3}{D_1}\right)m_1(x)+\left(\frac{b_3}{D_1}\right)m(x)\overline{m}(x)+\left(\frac{A_4R_1-b_4}{D_1}\right)n(x)\overline{n}(x)$$

$$W_{k2}(x)=-M_6(x)=\left(\frac{d_2Q-d_3R}{D_2}\right)n_1(x)-\left(\frac{d_1Q-d_3R_1}{D_2}\right)n(x)\overline{m}(x)+\left(\frac{d_1R-d_2R_1}{D_2}\right)m(x)\overline{n}(x)$$

$$W_{k3}(x)=V_{G6}(x)=\left(\frac{A_3b_3+A_2b_4}{D_1}\right)m_1(x)-\left(\frac{A_1b_3+A_2A_4R_1}{D_1}\right)m(x)\overline{m}(x)-\left(\frac{-A_1b_4+A_3A_4R_1}{D_1}\right)n(x)\overline{n}(x)$$

$$W_{k5}(x)=-G_6(x)=\left(\frac{A_2}{EID_1}\right)m_1(x)-\left(\frac{A_2}{EID_1}\right)m(x)\overline{m}(x)+\left(\frac{A_1-A_3}{EID_1}\right)n(x)\overline{n}(x)$$

$$W_{k6}(x)=-\left(\frac{A_5d_3-A_6d_2}{GD_2}\right)n_1(x)+\left(\frac{A_4d_3-A_6d_1}{GD_2}\right)n(x)\overline{m}(x)-\left(\frac{A_4d_2-A_5d_1}{GD_2}\right)m(x)\overline{n}(x)$$

$$G_1(x)=-V_5(x)=-\left(\frac{A_4b_3}{D_1}\right)n_1(x)+\left[\frac{A_5b_3+A_6(A_4R_1-b_4)}{D_1}\right]n(x)\overline{m}(x)-\left[\frac{A_6b_3+A_5(b_4-A_4R_1)}{D_1}\right]m(x)\overline{n}(x)$$

$$G_2(x)=M_5(x)=\left(\frac{A_2A_4R_1}{D_1}\right)m_1(x)+\left[\frac{(A_1-A_3)b_3-A_2b_4}{D_1}\right]m(x)\overline{m}(x)+\left[\frac{(A_1-A_3)b_4+A_2b_3}{D_1}\right]n(x)\overline{n}(x)$$

$$G_3(x)=-V_{G5}(x)=\left(\frac{GR_1A_2}{EID_1}\right)n_1(x)+\left[\frac{G[(A_1-A_3)Q-A_2R]}{EID_1}\right]n(x)\overline{m}(x)+\left[\frac{G[(A_1-A_3)R+A_2Q]}{EID_1}\right]m(x)\overline{n}(x)$$

Περίπτωση Α$_1$ (Συνέχεια)

$$G_5(x)=\left(\frac{A_2A_4}{EID_1}\right)n_1(x)-\left[\frac{A_2A_5-(A_1-A_3)A_6}{EID_1}\right]n(x)\overline{m}(x)+\left[\frac{A_2A_6+A_5(A_1-A_3)}{EID_1}\right]m(x)\overline{n}(x)$$

$$V_1(x)=-\left(\frac{b_3d_1}{D_1}\right)n_1(x)+\left[\frac{EI\left[A_4R_1b_2-Q(R^2+Q^2)(A_5^2+A_6^2)\right]+P\left[a_1b_3+a_2(b_4-A_4R_1)\right]}{D_1}\right]n(x)\overline{m}(x)+$$

$$+\left[\frac{EI\left[A_4R_1b_1-R(R^2+Q^2)(A_5^2+A_6^2)\right]+P\left[a_2b_3-a_1(b_4-A_4R_1)\right]}{D_1}\right]m(x)\overline{n}(x)$$

$$V_2(x)=-M_1(x)=-\left(\frac{EIR_1A_4b_3}{D_1}\right)n_1(x)+\left(\frac{EIR_1A_4b_3}{D_1}\right)m(x)\overline{m}(x)-\left[\frac{EI\left[b_3^2+b_4(b_4-A_4R_1)\right]}{D_1}\right]n(x)\overline{n}(x)$$

$$V_3(x)=V_{G1}(x)=\left(\frac{Gb_3R_1}{D_1}\right)n_1(x)-\left[\frac{G\left[b_3R-Q(b_4-A_4R_1)\right]}{D_1}\right]n(x)\overline{m}(x)+\left[\frac{G\left[b_3Q+R\left(b_4-A_4R_1\right)\right]}{D_1}\right]m(x)\overline{n}(x)$$

$$M_2(x)=\left[\frac{EIR_1A_4(d_3R-d_2Q)}{D_2}\right]n_1(x)-\left[\frac{EI\left[b_3(d_1R-d_2R_1)-b_4(d_1Q-d_3R_1)\right]}{D_2}\right]n(x)\overline{m}(x)-$$

$$-\left[\frac{EI\left[b_3(d_1Q-d_3R_1)+b_4(d_1R-d_2R_1)\right]}{D_2}\right]m(x)\overline{n}(x)$$

$$M_3(x)=-V_{G2}(x)=-\left[\frac{GR_1(d_3R-d_2Q)}{D_2}\right]m_1(x)+\left[\frac{GR_1(d_3R-d_2Q)}{D_2}\right]m(x)\overline{m}(x)-\left[\frac{G\left[R_1(d_2R+d_3Q)-d_1(R^2+Q^2)\right]}{D_2}\right]n(x)\overline{n}(x)$$

$$V_{G3}(x)=-\left[\frac{GR_1(A_3b_3+A_2b_4)}{D_1}\right]n_1(x)+\left[\frac{G\left[A_1(Rb_3-Qb_4)+A_4R_1(A_2R+A_3Q)\right]}{D_1}\right]n(x)\overline{m}(x)-$$

$$-\left[\frac{G\left[A_1(Qb_3+Rb_4)+A_4R_1(QA_2-RA_3)\right]}{D_1}\right]m(x)\overline{n}(x)$$

$$D_1=b_3(A_3-A_1)+A_2(b_4-A_4R_1)$$

$$D_2=Q(A_4d_2-A_5d_1)+R(A_6d_1-A_4d_3)+R_1(A_5d_3-A_6d_2)$$

$m_1(x)=\cosh(R_1x)$ $n_1(x)=\sinh(R_1x)$ $\overline{m}(x)=\cos(Qx)$ $\overline{n}(x)=\sin(Qx)$ $m(x)=\cosh(Rx)$ $n(x)=\sinh(Rx)$

ΜΗΤΡΩΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (Συνέχεια)

Περίπτωση B_1

$$W_1(x) = V_4(x) = -\left[\frac{A_1(A_5R_1 - A_6R_2)}{D_1}\right]m(x) + \left[\frac{A_2(A_4R - A_6R_2)}{D_1}\right]m_1(x) - \left[\frac{A_3(A_4R - A_5R_1)}{D_1}\right]m_2(x)$$

$$W_2(x) = -M_4(x) = \left[\frac{A_1(d_3R_1 - d_2R_2)}{D_2}\right]n(x) - \left[\frac{A_2(d_3R - d_1R_2)}{D_2}\right]n_1(x) + \left[\frac{A_3(d_2R - d_1R_1)}{D_2}\right]n_2(x)$$

$$W_3(x) = V_{G4}(x) = -\left[\frac{A_1(A_2A_6R_2 - A_3A_5R_1)}{D_1}\right]m(x) + \left[\frac{A_2(A_1A_6R_2 - A_3A_4R)}{D_1}\right]m_1(x) - \left[\frac{A_3(A_1A_5R_1 - A_2A_4R)}{D_1}\right]m_2(x)$$

$$W_4(x) = -\left[\frac{A_1(A_6R_1 - A_5R_2)}{D_2}\right]n(x) + \left[\frac{A_2(A_6R - A_4R_2)}{D_2}\right]n_1(x) - \left[\frac{A_3(A_5R - A_4R_1)}{D_2}\right]n_2(x)$$

$$W_5(x) = -G_4(x) = -\left[\frac{A_1(A_2 - A_3)}{EID_1}\right]m(x) + \left[\frac{A_2(A_1 - A_3)}{EID_1}\right]m_1(x) - \left[\frac{A_3(A_1 - A_2)}{EID_1}\right]m_2(x)$$

$$W_6(x) = W_{k4}(x) = -\left[\frac{A_6R_1 - A_5R_2}{D_2}\right]n(x) + \left[\frac{A_6R - A_4R_2}{D_2}\right]n_1(x) - \left[\frac{A_5R - A_4R_1}{D_2}\right]n_2(x)$$

$$W_{k1}(x) = V_6(x) = \left[\frac{A_6R_2 - A_5R_1}{D_1}\right]m(x) + \left[\frac{A_4R - A_6R_2}{D_1}\right]m_1(x) + \left[\frac{A_5R_1 - A_4R}{D_1}\right]m_2(x)$$

$$W_{k2}(x) = -M_6(x) = \left[\frac{d_3R_1 - d_2R_2}{D_2}\right]n(x) - \left[\frac{d_3R - d_1R_2}{D_2}\right]n_1(x) + \left[\frac{d_2R - d_1R_1}{D_2}\right]n_2(x)$$

$$W_{k3}(x) = V_{G6}(x) = \left[\frac{A_3A_5R_1 - A_2A_6R_2}{D_1}\right]m(x) - \left[\frac{A_3A_4R - A_1A_6R_2}{D_1}\right]m_1(x) + \left[\frac{A_2A_4R - A_1A_5R_1}{D_1}\right]m_2(x)$$

$$W_{k5}(x) = -G_6(x) = \left[\frac{A_3 - A_2}{EID_1}\right]m(x) + \left[\frac{A_1 - A_3}{EID_1}\right]m_1(x) + \left[\frac{A_2 - A_1}{EID_1}\right]m_2(x)$$

$$W_{k6}(x) = \left[\frac{A_5d_3 - A_6d_2}{GD_2}\right]n(x) - \left[\frac{A_4d_3 - A_6d_1}{GD_2}\right]n_1(x) + \left[\frac{A_4d_2 - A_5d_1}{GD_2}\right]n_2(x)$$

$$G_1(x) = -V_5(x) = \left[\frac{A_4(A_6R_2 - A_5R_1)}{D_1}\right]n(x) + \left[\frac{A_5(A_4R - A_6R_2)}{D_1}\right]n_1(x) - \left[\frac{A_6(A_4R - A_5R_1)}{D_1}\right]n_2(x)$$

$$G_2(x) = M_5(x) = \left[\frac{A_4(d_3R_1 - d_2R_2)}{D_2}\right]m(x) - \left[\frac{A_5(d_3R - d_1R_2)}{D_2}\right]m_1(x) + \left[\frac{A_6(d_2R - d_1R_1)}{D_2}\right]m_2(x)$$

$$G_3(x) = -V_{G5}(x) = -\left[\frac{GR(A_2 - A_3)}{EID_1}\right]n(x) + \left[\frac{GR_1(A_1 - A_3)}{EID_1}\right]n_1(x) - \left[\frac{GR_2(A_1 - A_2)}{EID_1}\right]n_2(x)$$

$$G_5(x) = \left[\frac{A_4(A_3 - A_2)}{EID_1}\right]n(x) - \left[\frac{A_5(A_3 - A_1)}{EID_1}\right]n_1(x) + \left[\frac{A_6(A_2 - A_1)}{EID_1}\right]n_2(x)$$

$$V_1(x) = -\left[\frac{d_1(A_5R_1 - A_6R_2)}{D_1}\right]n(x) + \left[\frac{d_2(A_4R - A_6R_2)}{D_1}\right]n_1(x) - \left[\frac{d_3(A_4R - A_5R_1)}{D_1}\right]n_2(x)$$

$$V_2(x) = -M_1(x) = \left[\frac{d_1(d_3R_1 - d_2R_2)}{D_2}\right]m(x) - \left[\frac{d_2(d_3R - d_1R_2)}{D_2}\right]m_1(x) + \left[\frac{d_3(d_2R - d_1R_1)}{D_2}\right]m_2(x)$$

$$V_3(x) = V_{G1}(x) = \left[\frac{GR(A_5R_1 - A_6R_2)}{D_1}\right]n(x) + \left[\frac{GR_1(A_6R_2 - A_4R)}{D_1}\right]n_1(x) + \left[\frac{GR_2(A_4R - A_5R_1)}{D_1}\right]n_2(x)$$

Περίπτωση Β1 (Συνέχεια)

$$M_2(x) = \left[\frac{EIRA_4(d_2R_2 - d_3R_1)}{D_2}\right]n(x) + \left[\frac{EIR_1A_5(d_3R - d_1R_2)}{D_2}\right]n_1(x) + \left[\frac{EIR_2A_6(d_1R_1 - d_2R)}{D_2}\right]n_2(x)$$

$$M_3(x) = -V_{G2}(x) = \left[\frac{GR(d_3R_1 - d_2R_2)}{D_2}\right]m(x) - \left[\frac{GR_1(d_3R - d_1R_2)}{D_2}\right]m_1(x) - \left[\frac{GR_2(d_1R_1 - d_2R)}{D_2}\right]m_2(x)$$

$$V_{G3}(x) = -\left[\frac{GR(A_3A_5R_1 - A_2A_6R_2)}{D_1}\right]n(x) + \left[\frac{GR_1(A_3A_4R - A_1A_6R_2)}{D_1}\right]n_1(x) + \left[\frac{GR_2(A_1A_5R_1 - A_2A_4R)}{D_1}\right]n_2(x)$$

$$D_1 = A_4R(A_2 - A_3) + A_5R_1(A_3 - A_1) + A_6R_2(A_1 - A_2)$$

$$D_2 = R(A_6d_2 - A_5d_3) + R_1(A_4d_3 - A_6d_1) + R_2(A_5d_1 - A_4d_2)$$

$$m(x) = \cosh(Rx) \quad n(x) = \sinh(Rx) \quad m_1(x) = \cosh(R_1x)$$

$$n_1(x) = \sinh(R_1x) \quad m_2(x) = \cosh(R_2x) \quad n_2(x) = \sinh(R_2x)$$

ΜΗΤΡΩΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (Συνέχεια)

Περίπτωση B_2

$$W_1(x) = V_4(x) = \left[\frac{A_1(A_5Q - A_6Q_1)}{D_1}\right]m(x) + \left[\frac{A_2(A_6Q_1 + A_4R)}{D_1}\right]\nu(x) - \left[\frac{A_3(A_4R + A_5Q)}{D_1}\right]\nu_1(x)$$

$$W_2(x) = -M_4(x) = -\left[\frac{A_1(d_3Q - d_2Q_1)}{D_2}\right]n(x) + \left[\frac{A_2(d_1Q_1 + d_3R)}{D_2}\right]\mu(x) - \left[\frac{A_3(d_1Q + d_2R)}{D_2}\right]\mu_1(x)$$

$$W_3(x) = V_{G4}(x) = \left[\frac{A_1(A_2A_6Q_1 - A_3A_5Q)}{D_1}\right]m(x) - \left[\frac{A_2(A_3A_4R + A_1A_6Q_1)}{D_1}\right]\nu(x) + \left[\frac{A_3(A_2A_4R + A_1A_5Q)}{D_1}\right]\nu_1(x)$$

$$W_4(x) = -\left[\frac{A_1(A_6Q - A_5Q_1)}{D_2}\right]n(x) + \left[\frac{A_2(A_6R - A_4Q_1)}{D_2}\right]\mu(x) - \left[\frac{A_3(A_5R - A_4Q)}{D_2}\right]\mu_1(x)$$

$$W_5(x) = -G_4(x) = \left[\frac{A_1(A_3 - A_2)}{EID_1}\right]m(x) + \left[\frac{A_2(A_1 - A_3)}{EID_1}\right]\nu(x) + \left[\frac{A_3(A_2 - A_1)}{EID_1}\right]\nu_1(x)$$

$$W_6(x) = W_{k4}(x) = -\left[\frac{A_6Q - A_5Q_1}{D_2}\right]n(x) + \left[\frac{A_6R - A_4Q_1}{D_2}\right]\mu(x) - \left[\frac{A_5R - A_4Q}{D_2}\right]\mu_1(x)$$

$$W_{k1}(x) = V_6(x) = \left[\frac{A_5Q - A_6Q_1}{D_1}\right]m(x) + \left[\frac{A_4R + A_6Q_1}{D_1}\right]\nu(x) - \left[\frac{A_4R + A_5Q}{D_1}\right]\nu_1(x)$$

$$W_{k2}(x) = -M_6(x) = -\left[\frac{d_3Q - d_2Q_1}{D_2}\right]n(x) + \left[\frac{d_1Q_1 + d_3R}{D_2}\right]\mu(x) - \left[\frac{d_1Q + d_2R}{D_2}\right]\mu_1(x)$$

$$W_{k3}(x) = V_{G6}(x) = -\left[\frac{A_3A_5Q - A_2A_6Q_1}{D_1}\right]m(x) - \left[\frac{A_1A_6Q_1 + A_3A_4R}{D_1}\right]\nu(x) + \left[\frac{A_1A_5Q + A_2A_4R}{D_1}\right]\nu_1(x)$$

$$W_{k5}(x) = -G_6(x) = \left[\frac{A_3 - A_2}{EID_1}\right]m(x) + \left[\frac{A_1 - A_3}{EID_1}\right]\nu(x) + \left[\frac{A_2 - A_1}{EID_1}\right]\nu_1(x)$$

$$W_{k6}(x) = -\left[\frac{A_5d_3 - A_6d_2}{GD_2}\right]n(x) + \left[\frac{A_6d_1 + A_4d_3}{GD_2}\right]\mu(x) - \left[\frac{A_4d_2 + A_5d_1}{GD_2}\right]\mu_1(x)$$

$$G_1(x) = -V_5(x) = -\left[\frac{d_1(A_3 - A_2)}{EID_1}\right]n(x) - \left[\frac{d_2(A_1 - A_3)}{EID_1}\right]\mu(x) + \left[\frac{d_3(A_1 - A_2)}{EID_1}\right]\mu_1(x)$$

$$G_2(x) = M_5(x) = -\left[\frac{A_4R(A_3 - A_2)}{D_1}\right]m(x) + \left[\frac{A_5Q(A_1 - A_3)}{D_1}\right]\nu(x) - \left[\frac{A_6Q_1(A_1 - A_2)}{D_1}\right]\nu_1(x)$$

$$G_3(x) = -V_{G5}(x) = \left[\frac{GR(A_3 - A_2)}{EID_1}\right]n(x) - \left[\frac{GQ(A_1 - A_3)}{EID_1}\right]\mu(x) - \left[\frac{GQ_1(A_2 - A_1)}{EID_1}\right]\mu_1(x)$$

$$G_5(x) = \left[\frac{A_4(A_3 - A_2)}{EID_1}\right]n(x) - \left[\frac{A_5(A_1 - A_3)}{EID_1}\right]\mu(x) + \left[\frac{A_6(A_1 - A_2)}{EID_1}\right]\mu_1(x)$$

$$V_1(x) = \left[\frac{d_1(A_5Q - A_6Q_1)}{D_1}\right]n(x) + \left[\frac{d_2(A_6Q_1 + A_4R)}{D_1}\right]\mu(x) - \left[\frac{d_3(A_4R + A_5Q)}{D_1}\right]\mu_1(x)$$

$$V_2(x) = -M_1(x) = -\left[\frac{d_1(d_3Q - d_2Q_1)}{D_2}\right]m(x) - \left[\frac{d_2(d_1Q_1 + d_3R)}{D_2}\right]\nu(x) + \left[\frac{d_3(d_1Q + d_2R)}{D_2}\right]\mu_1(x)$$

Περίπτωση Β₂ (Συνέχεια)

$$V_3(x) = V_{G1}(x) = -\left[\frac{GR(A_5Q - A_6Q_1)}{D_1}\right]n(x) + \left[\frac{GQ(A_4R + A_6Q_1)}{D_1}\right]\mu(x) - \left[\frac{GQ_1(A_4R + A_5Q)}{D_1}\right]\mu_1(x)$$

$$M_2(x) = \left[\frac{EIA_4R(d_3Q - d_2Q_1)}{D_2}\right]n(x) + \left[\frac{EIA_5Q(d_1Q_1 + d_3R)}{D_2}\right]\mu(x) - \left[\frac{EIA_6Q_1(d_1Q + d_2R)}{D_2}\right]\mu_1(x)$$

$$M_3(x) = -V_{G2}(x) = -\left[\frac{GR(d_3Q - d_2Q_1)}{D_2}\right]m(x) + \left[\frac{GQ(d_1Q_1 + d_3R)}{D_2}\right]\nu(x) - \left[\frac{GQ_1(d_1Q + d_2R)}{D_2}\right]\nu_1(x)$$

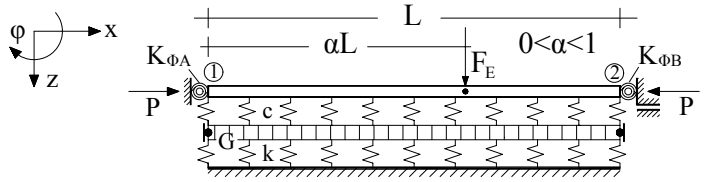
$$V_{G3}(x) = \left[\frac{GR(A_3A_5Q - A_2A_6Q_1)}{D_1}\right]n(x) - \left[\frac{GQ(A_1A_6Q_1 + A_3A_4R)}{D_1}\right]\mu(x) + \left[\frac{GQ_1(A_1A_5Q + A_2A_4R}{D_1}\right]\mu_1(x)$$

$$D_1 = A_5Q(A_1 - A_3) + A_6Q_1(A_2 - A_1) + A_4R(A_2 - A_3)$$

$$D_2 = A_4(d_2Q_1 - d_3Q) + A_5(d_1Q_1 + d_3R) - A_6(d_1Q + d_2R)$$

$$m(x) = \cosh(Rx) \quad n(x) = \sinh(Rx) \quad \nu(x) = \cos(Qx)$$

$$\mu(x) = \sin(Qx) \quad \nu_1(x) = \cos(Q_1x) \quad \mu_1(x) = \sin(Q_1x)$$

ΤΥΠΟΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ: Μοναχικό φορτίο σε τυχούσα θέση	Μητρώο φόρτισης
 Δεδομένα Δοκού $\begin{cases} EI,\ GF' \text{ πεπ.} \\ GF \to \infty \end{cases}$ $\alpha'=1-\alpha$	$q^T_{P_E} = \{M_1 \quad V_1 \quad V_{G1} \quad M_2 \quad V_2 \quad V_{G2}\}$
$V_1^{(P)} = -\frac{F_E}{D}\left[\frac{f^{(P)}_{ABV}}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}} + \frac{f^{(P)}_{AV}}{K_{\Phi A}} + \frac{f^{(P)}_{BV}}{K_{\Phi B}} + f^{(P)}_{PV}\right]$	$M_1^{(P)} = -\frac{F_E}{D}\left[\frac{f^{(P)}_{BM}}{K_{\Phi B}} + f^{(P)}_{PM}\right]$
$V_{G1}^{(P)} = -\frac{F_E}{D}\left[\frac{f^{(P)}_{ABVG}}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}} + \frac{f^{(P)}_{AVG}}{K_{\Phi A}} + \frac{f^{(P)}_{BVG}}{K_{\Phi B}} + f^{(P)}_{PVG}\right]$	$D = \frac{f_{AB}}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}} + \left(\frac{1}{K_{\Phi A}} + \frac{1}{K_{\Phi B}}\right) f_A + f_P$

$$f^{(P)}_{ABV} = W_{4aL}(M_{6L}W_{k2L} - M_{2L}W_{k6L}) + W_{k4aL}(M_{2L}W_{k4L} - M_{6L}W_{2L}) + M_{4aL}(W_{2L}W_{k6L} - W_{k2L}W_{k4L})$$

$$f^{(P)}_{AV} = G_{4aL}(W_{k2L}W_{k4L} - W_{2L}W_{k6L}) - W_{4aL}(W_{k2L}W_{k5L} - M_{5L}W_{k6L}) + W_{k4aL}(-M_{5L}W_{k4L} + W_{2L}W_{k5L})$$

$$f^{(P)}_{BV} = W_{k4aL}(M_{6L}W_{5L} - M_{5L}W_{k4L}) + M_{4aL}(W_{k4L}W_{k5L} - W_{5L}W_{k6L}) + W_{4aL}(M_{5L}W_{k6L} - M_{6L}W_{k5L})$$

$$f^{(P)}_{PV} = -W_{k4aL}(-G_{5L}W_{k4L} + W_{k5L}W_{5L}) + W_{4aL}(W^2_{k5L} - G_{5L}W_{k6L}) + G_{4aL}(W_{5L}W_{k6L} - W_{k4L}W_{k5L})$$

$$f^{(P)}_{ABVG} = W_{4aL}(M_{2L}W_{k4L} - M_{4L}W_{k2L}) + W_{k4aL}(M_{4L}W_{2L} - M_{2L}W_{4L}) + M_{4aL}(W_{4L}W_{k2L} - W_{2L}W_{k4L})$$

$$f^{(P)}_{AVG} = G_{4aL}(W_{2L}W_{k4L} - W_{4L}W_{k2L}) + W_{4aL}(W_{5L}W_{k2L} - M_{5L}W_{k4L}) - W_{k4aL}(W_{2L}W_{5L} - M_{5L}W_{4L})$$

$$f^{(P)}_{BVG} = W_{k4aL}(M_{5L}W_{4L} - M_{4L}W_{5L}) + M_{4aL}(W_{5L}W_{k4L} - W_{4L}W_{k5L}) + W_{4aL}(M_{4L}W_{k5L} - M_{5L}W_{k4L})$$

$$f^{(P)}_{PVG} = W_{k4aL}(W^2_{5L} - G_{5L}W_{4L}) - W_{4aL}(-G_{5L}W_{k4L} + W_{5L}W_{k5L}) + G_{4aL}(W_{4L}W_{k5L} - W_{5L}W_{k4L})$$

$$f^{(P)}_{BM} = M_{4aL}(W^2_{k4L} - W_{4L}W_{k6L}) - W_{k4aL}(M_{4L}W_{k4L} - M_{6L}W_{4L}) - W_{4aL}(M_{6L}W_{k4L} - M_{4L}W_{k6L})$$

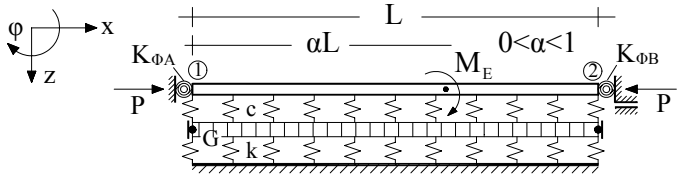
$$f^{(P)}_{PM} = -G_{4aL}(W^2_{k4L} - W_{4L}W_{k6L}) + W_{4aL}(W_{k4L}W_{k5L} - W_{5L}W_{k6L}) - W_{k4aL}(W_{4L}W_{k5L} - W_{5L}W_{k4L})$$

$$f_{AB} = -W_{k2L}(M_{4L}W_{k4L} - M_{6L}W_{4L}) + M_{2L}(W^2_{k4L} - W_{4L}W_{k6L}) - W_{2L}(M_{6L}W_{k4L} - M_{4L}W_{k6L})$$

$$f_A = -M_{5L}(W^2_{k4L} - W_{4L}W_{k6L}) + W_{k5L}(M_{4L}W_{k4L} - M_{6L}W_{4L}) + W_{5L}(M_{6L}W_{k4L} - M_{4L}W_{k6L})$$

$$f_P = G_{5L}(W^2_{k4L} - W_{4L}W_{k6L}) + W_{k5L}(W_{4L}W_{k5L} - W_{5L}W_{k4L}) - W_{5L}(W_{k4L}W_{k5L} - W_{5L}W_{k6L})$$

- Όλοι οι όροι στις παραπάνω σχέσεις αντιστοιχούν στις τιμές των στοιχείων του μητρώου μεταφοράς στο άκρο x=L του στοιχείου (π.χ. $W_{4L}=W_{4L}(L)$). Οι σχέσεις αυτές ισχύουν για κάθε περίπτωση λύσης της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος αρκεί να χρησιμοποιηθούν τα στοιχεία του αντιστοιχούντος στη λύση αυτή μητρώου μεταφοράς.
- Ο όρος α (σε όσους δείκτες υπεισέρχεται) δηλώνει ότι οι τιμές των αντιστοίχων στοιχείων των μητρώων μεταφοράς θα πρέπει να υπολογιστούν στα σημεία x=(1-α)L, (π.χ. $W_{4\alpha L}=W_{4L}[(1-\alpha)L]$).
- Από τις εκφράσεις των μεγεθών V_1, V_{G1}, M_1 προκύπτουν οι εκφράσεις των V_2, V_{G2}, M_2 ως εξής:
  - Αμοιβαία εναλλαγή των σταθερών των στροφικών ελατηρίων (δηλαδή του $K_{\Phi A}$ με το $K_{\Phi B}$ και αντίστροφα),
  - Αλλαγή προσήμου για τη ροπή M και διατήρηση του για την περίπτωση των τεμνουσών V_1, V_{G1}.
  - Εναλλαγή των στοιχείων των οποίων οι τιμές υπολογίζονται στα σημεία x=(1-α)L με τα αντίστοιχα στοιχεία των οποίων οι τιμές υπολογίζονται στα σημεία x΄=αL (π.χ. αντικατάσταση του $W_{4L}[(1-\alpha)L]$ με το $W_{4L}(\alpha L)$).
- Τα πρόσημα αναφέρονται στο σύστημα αναφοράς του σχήματος.

ΤΥΠΟΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ: Μοναχική ροπή σε τυχούσα θέση	Μητρώο φόρτισης
 Δεδομένα Δοκού $\begin{cases} EI,\ GF' \text{ πεπ.} \\ GF \to \infty \end{cases}$ α'=1-α	$q^T_{M_E} = \{M_1 \quad V_1 \quad V_{G1} \quad M_2 \quad V_2 \quad V_{G2}\}$
$V_1^{(M)} = \frac{M_E}{D}\left[\frac{f^{(M)}_{ABV}}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}} + \frac{f^{(M)}_{AV}}{K_{\Phi A}} + \frac{f^{(M)}_{BV}}{K_{\Phi B}} + f^{(M)}_{PV}\right]$	$M_1^{(M)} = \frac{M_E}{D}\left[\frac{f^{(M)}_{BM}}{K_{\Phi B}} + f^{(M)}_{PM}\right]$
$V_{G1}^{(M)} = \frac{M_E}{D}\left[\frac{f^{(M)}_{ABVG}}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}} + \frac{f^{(M)}_{AVG}}{K_{\Phi A}} + \frac{f^{(M)}_{BVG}}{K_{\Phi B}} + f^{(M)}_{PVG}\right]$	$D = \frac{f_{AB}}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}} + \left(\frac{1}{K_{\Phi A}} + \frac{1}{K_{\Phi B}}\right)f_A + f_P$

$$f^{(M)}_{ABV} = -W_{5aL}(-M_{6L}W_{k2L} + M_{2L}W_{k6L}) - W_{k5aL}(-M_{2L}W_{k4L} + M_{6L}W_{2L}) - M_{5aL}(-W_{2L}W_{k6L} + W_{k2L}W_{k4L})$$

$$f^{(M)}_{AV} = -G_{5aL}(-W_{k2L}W_{k4L} + W_{2L}W_{k6L}) - W_{5aL}(W_{k2L}W_{k5L} - M_{5L}W_{k6L}) + W_{k5aL}(-M_{5L}W_{k4L} + W_{2L}W_{k5L})$$

$$f^{(M)}_{BV} = -W_{k5aL}(-M_{6L}W_{5L} + M_{5L}W_{k4L}) - M_{5aL}(-W_{k4L}W_{k5L} + W_{5L}W_{k6L}) - W_{5aL}(-M_{5L}W_{k6L} + M_{6L}W_{k5L})$$

$$f^{(M)}_{PV} = -W_{k5aL}(-G_{5L}W_{k4L} + W_{k5L}W_{5L}) + W_{5aL}(W^2_{k5L} - G_{5L}W_{k6L}) - G_{5aL}(-W_{5L}W_{k6L} + W_{k4L}W_{k5L})$$

$$f^{(M)}_{ABVG} = -W_{5aL}(-M_{2L}W_{k4L} + M_{4L}W_{k2L}) - W_{k5aL}(-M_{4L}W_{2L} + M_{2L}W_{4L}) - M_{5aL}(-W_{4L}W_{k2L} + W_{2L}W_{k4L})$$

$$f^{(M)}_{AVG} = -G_{5aL}(-W_{2L}W_{k4L} + W_{4L}W_{k2L}) + W_{5aL}(W_{5L}W_{k2L} - M_{5L}W_{k4L}) - W_{k5aL}(W_{2L}W_{5L} - M_{5L}W_{4L})$$

$$f^{(M)}_{BVG} = -W_{k5aL}(-M_{5L}W_{4L} + M_{4L}W_{5L}) - M_{5aL}(-W_{5L}W_{k4L} + W_{4L}W_{k5L}) - W_{5aL}(-M_{4L}W_{k5L} + M_{5L}W_{k4L})$$

$$f^{(M)}_{PVG} = W_{k5aL}(W^2_{5L} - G_{5L}W_{4L}) - W_{5aL}(-G_{5L}W_{k4L} + W_{5L}W_{k5L}) - G_{5aL}(-W_{4L}W_{k5L} + W_{5L}W_{k4L})$$

$$f^{(M)}_{BM} = M_{5aL}(W^2_{k4L} - W_{4L}W_{k6L}) - W_{k5aL}(M_{4L}W_{k4L} - M_{6L}W_{4L}) - W_{5aL}(M_{6L}W_{k4L} - M_{4L}W_{k6L})$$

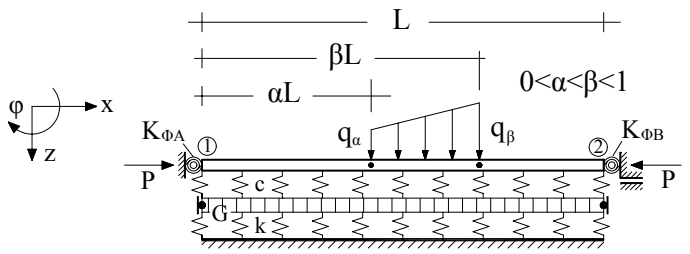
$$f^{(M)}_{PM} = -G_{5aL}(W^2_{k4L} - W_{4L}W_{k6L}) + W_{5aL}(W_{k4L}W_{k5L} - W_{5L}W_{k6L}) - W_{k5aL}(W_{4L}W_{k5L} - W_{5L}W_{k4L})$$

$$f_{AB} = -W_{k2L}(M_{4L}W_{k4L} - M_{6L}W_{4L}) + M_{2L}(W^2_{k4L} - W_{4L}W_{k6L}) - W_{2L}(M_{6L}W_{k4L} - M_{4L}W_{k6L})$$

$$f_A = -M_{5L}(W^2_{k4L} - W_{4L}W_{k6L}) + W_{k5L}(M_{4L}W_{k4L} - M_{6L}W_{4L}) + W_{5L}(M_{6L}W_{k4L} - M_{4L}W_{k6L})$$

$$f_P = G_{5L}(W^2_{k4L} - W_{4L}W_{k6L}) + W_{k5L}(W_{4L}W_{k5L} - W_{5L}W_{k4L}) - W_{5L}(W_{k4L}W_{k5L} - W_{5L}W_{k6L})$$

- Όλοι οι όροι στις παραπάνω σχέσεις αντιστοιχούν στις τιμές των στοιχείων του μητρώου μεταφοράς στο άκρο x=L του στοιχείου (π.χ. $W_{5L}=W_{5L}(L)$). Οι σχέσεις αυτές ισχύουν για κάθε περίπτωση λύσης της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος αρκεί να χρησιμοποιηθούν τα στοιχεία του αντιστοιχούντος στη λύση αυτή μητρώου μεταφοράς.
- Ο όρος α (σε όσους δείκτες υπεισέρχεται) δηλώνει ότι οι τιμές των αντιστοίχων στοιχείων των μητρώων μεταφοράς θα πρέπει να υπολογιστούν στα σημεία x=(1-α)L, (π.χ. $W_{5\alpha L}=W_{5L}[(1-\alpha)L]$).
- Από τις εκφράσεις των μεγεθών V_1, V_{G1}, M_1 προκύπτουν οι εκφράσεις των V_2, V_{G2}, M_2 ως εξής:
  - Αμοιβαία εναλλαγή των σταθερών των στροφικών ελατηρίων (δηλαδή του $K_{\Phi A}$ με το $K_{\Phi B}$ και αντίστροφα),
  - Αλλαγή προσήμου για τις τέμνουσες V_1, V_{G1} και διατήρηση του για τη ροπή M.
  - Εναλλαγή των στοιχείων των οποίων οι τιμές υπολογίζονται στα σημεία x=(1-α)L με τα αντίστοιχα στοιχεία των οποίων οι τιμές υπολογίζονται στα σημεία x΄=αL (π.χ. αντικατάσταση του $W_{5L}[(1-\alpha)L]$ με το $W_{5L}(\alpha L)$).
- Τα πρόσημα αναφέρονται στο σύστημα αναφοράς του σχήματος.

ΤΥΠΟΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ: Τραπεζοειδής φόρτιση	Μητρώο φόρτισης
 Δεδομένα Δοκού $\begin{cases} \text{EI, GF΄ πεπ.} \\ \text{GF}\to\infty \end{cases}$ α'=1-α β'=1-β	$q_{T\rho.}^{T} = \{M_1 \quad V_1 \quad V_{G1} \quad M_2 \quad V_2 \quad V_{G2}\}$
$V_1^{(Tr)} = -\frac{1}{D}\left[\frac{f_{ABV}^{(Tr)}}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}} + \frac{f_{AV}^{(Tr)}}{K_{\Phi A}} + \frac{f_{BV}^{(Tr)}}{K_{\Phi B}} + f_{PV}^{(Tr)}\right]$	$M_1^{(Tr)} = -\frac{1}{D}\left[\frac{f_{BM}^{(Tr)}}{K_{\Phi B}} + f_{PM}^{(Tr)}\right]$
$V_{G1}^{(Tr)} = -\frac{1}{D}\left[\frac{f_{ABVG}^{(Tr)}}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}} + \frac{f_{AVG}^{(Tr)}}{K_{\Phi A}} + \frac{f_{BVG}^{(Tr)}}{K_{\Phi B}} + f_{PVG}^{(Tr)}\right]$	$D = \frac{f_{AB}}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}} + \left(\frac{1}{K_{\Phi A}} + \frac{1}{K_{\Phi B}}\right)f_A + f_P$

$$f_{ABV}^{(Tr)} = I_w(-M_{6L}W_{k2L} + M_{2L}W_{k6L}) + I_{Wk}(-M_{2L}W_{k4L} + M_{6L}W_{2L}) + I_M(-W_{2L}W_{k6L} + W_{k2L}W_{k4L})$$

$$f_{AV}^{(Tr)} = I_G(-W_{k2L}W_{k4L} + W_{2L}W_{k6L}) + I_W(W_{k2L}W_{k5L} - M_{5L}W_{k6L}) - I_{Wk}(-M_{5L}W_{k4L} + W_{2L}W_{k5L})$$

$$f_{BV}^{(Tr)} = I_{Wk}(-M_{6L}W_{5L} + M_{5L}W_{k4L}) + I_M(-W_{k4L}W_{k5L} + W_{5L}W_{k6L}) + I_W(-M_{5L}W_{k6L} + M_{6L}W_{k5L})$$

$$f_{PV}^{(Tr)} = I_{Wk}(-G_{5L}W_{k4L} + W_{k5L}W_{5L}) - I_W(W_{k5L}^2 - G_{5L}W_{k6L}) + I_G(-W_{5L}W_{k6L} + W_{k4L}W_{k5L})$$

$$f_{ABVG}^{(Tr)} = I_W(-M_{2L}W_{k4L} + M_{4L}W_{k2L}) + I_{Wk}(-M_{4L}W_{2L} + M_{2L}W_{4L}) + I_M(-W_{4L}W_{k2L} + W_{2L}W_{k4L})$$

$$f_{AVG}^{(Tr)} = I_G(-W_{2L}W_{k4L} + W_{4L}W_{k2L}) - I_W(W_{5L}W_{k2L} - M_{5L}W_{k4L}) + I_{Wk}(W_{2L}W_{5L} - M_{5L}W_{4L})$$

$$f_{BVG}^{(Tr)} = I_{Wk}(-M_{5L}W_{4L} + M_{4L}W_{5L}) + I_M(-W_{5L}W_{k4L} + W_{4L}W_{k5L}) + I_W(-M_{4L}W_{k5L} + M_{5L}W_{k4L})$$

$$f_{PVG}^{(Tr)} = -I_{Wk}(W_{5L}^2 - G_{5L}W_{4L}) + I_W(-G_{5L}W_{k4L} + W_{5L}W_{k5L}) + I_G(-W_{4L}W_{k5L} + W_{5L}W_{k4L})$$

$$f_{BM}^{(Tr)} = -I_M(W_{k4L}^2 - W_{4L}W_{k6L}) + I_{Wk}(M_{4L}W_{k4L} - M_{6L}W_{4L}) + I_W(M_{6L}W_{k4L} - M_{4L}W_{k6L})$$

$$f_{PM}^{(Tr)} = I_G(W_{k4L}^2 - W_{4L}W_{k6L}) + I_W(-W_{k4L}W_{k5L} + W_{5L}W_{k6L}) - I_{Wk}(-W_{4L}W_{k5L} + W_{5L}W_{k4L})$$

$$f_{AB} = -W_{k2L}(M_{4L}W_{k4L} - M_{6L}W_{4L}) + M_{2L}(W_{k4L}^2 - W_{4L}W_{k6L}) - W_{2L}(M_{6L}W_{k4L} - M_{4L}W_{k6L})$$

$$f_A = -M_{5L}(W_{k4L}^2 - W_{4L}W_{k6L}) + W_{k5L}(M_{4L}W_{k4L} - M_{6L}W_{4L}) + W_{5L}(M_{6L}W_{k4L} - M_{4L}W_{k6L})$$

$$f_P = G_{5L}(W_{k4L}^2 - W_{4L}W_{k6L}) - W_{k5L}(-W_{4L}W_{k5L} + W_{5L}W_{k4L}) + W_{5L}(-W_{k4L}W_{k5L} + W_{5L}W_{k6L})$$

$$I_G = \bar{q}_\alpha \int_{\alpha L}^{\beta L} G_4(L-\xi)d\xi + \left[\frac{q_\beta - q_\alpha}{(\beta-\alpha)L}\right]\int_{\alpha L}^{\beta L}\xi G_4(L-\xi)d\xi \qquad I_W = \bar{q}_\alpha \int_{\alpha L}^{\beta L} W_4(L-\xi)d\xi + \left[\frac{q_\beta - q_\alpha}{(\beta-\alpha)L}\right]\int_{\alpha L}^{\beta L}\xi W_4(L-\xi)d\xi$$

$$I_M = \bar{q}_\alpha \int_{\alpha L}^{\beta L} M_4(L-\xi)d\xi + \left[\frac{q_\beta - q_\alpha}{(\beta-\alpha)L}\right]\int_{\alpha L}^{\beta L}\xi M_4(L-\xi)d\xi \qquad I_{Wk} = \bar{q}_\alpha \int_{\alpha L}^{\beta L} W_{k4}(L-\xi)d\xi + \left[\frac{q_\beta - q_\alpha}{(\beta-\alpha)L}\right]\int_{\alpha L}^{\beta L}\xi W_{k4}(L-\xi)d\xi$$

$$\bar{q}_\alpha = q_\alpha - \left(\frac{q_\beta - q_\alpha}{(\beta-\alpha)L}\right)(\alpha L)$$

Τα ολοκληρώματα I_G, I_M, I_W, I_{Wk} εξαρτώνται από την μορφή λύσης της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος. Ενδεικτικά για την περίπτωση A_1 που αποτελεί και την πιο χρήσιμη για τις πρακτικές εφαρμογές, τα ολοκληρώματα αυτά δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$I_W = \left[\frac{A_1(A_5Q - A_6R)}{D_2}\right]I_1 + \left[\frac{A_3(A_6R_1 - A_4Q) + A_2(A_5R_1 - A_4R)}{D_2}\right]I_2 - \left[\frac{A_2(-A_6R_1 + A_4Q) + A_3(A_5R_1 - A_4R)}{D_2}\right]I_3$$

$$I_{Wk} = \left(\frac{A_5Q - A_6R}{D_2}\right)I_1 - \left(\frac{A_4Q - A_6R_1}{D_2}\right)I_2 + \left(\frac{A_4R - A_5R_1}{D_2}\right)I_3$$

$$I_M = \left[\frac{A_1(d_2Q - d_3R)}{D_2}\right]I_1 - \left[\frac{A_3(d_1Q - d_3R_1) + A_2(d_1R - d_2R_1)}{D_2}\right]I_2 - \left[\frac{A_3(d_2R_1 - d_1R) + A_2(d_1Q - d_3R_1)}{D_2}\right]I_3$$

$$I_G = -\left(\frac{A_1A_2}{EID_1}\right)(I_5 - I_4) + \left[\frac{A_3(A_1 - A_3) - A_2^2}{EID_1}\right]I_6$$

$$I_1 = \bar{q}_\alpha\left(\frac{m_{1\alpha} - m_{1\beta}}{R_1}\right) + \left[\frac{q_\beta - q_\alpha}{(\beta - \alpha)L}\right]\left[\frac{(n_{1\beta} - n_{1\alpha}) + R_1L(\alpha m_{1\alpha} - \beta m_{1\beta})}{R_1^2}\right]$$

$$I_2 = \left\{\begin{array}{c}\bar{q}_\alpha\left[\frac{R(\bar{m}_\alpha m_\alpha - \bar{m}_\beta m_\beta) + Q(\bar{n}_\alpha n_\alpha - \bar{n}_\beta n_\beta)}{R^2 + Q^2}\right] + \left[\frac{q_\beta - q_\alpha}{(\beta - \alpha)L}\right]\left[\frac{1}{(R^2 + Q^2)^2}\right]\{(R^2 + Q^2)[\alpha L(R\bar{m}_\alpha m_\alpha + Q\bar{n}_\alpha n_\alpha) - \\ -\beta L(R\bar{m}_\beta m_\beta + Q\bar{n}_\beta n_\beta)] + 2RQ(\bar{n}_\beta m_\beta - \bar{n}_\alpha m_\alpha) + (R^2 - Q^2)(n_\beta\bar{m}_\beta - n_\alpha\bar{m}_\alpha)\}\end{array}\right\}$$

$$I_3 = \left\{\begin{array}{c}\bar{q}_\alpha\left[\frac{R(\bar{n}_\alpha n_\alpha - \bar{n}_\beta n_\beta) - Q(\bar{m}_\alpha m_\alpha - \bar{m}_\beta m_\beta)}{R^2 + Q^2}\right] + \left[\frac{q_\beta - q_\alpha}{(\beta - \alpha)L}\right]\left[\frac{1}{(R^2 + Q^2)^2}\right]\{(R^2 + Q^2)[\alpha L(R\bar{n}_\alpha n_\alpha - Q\bar{m}_\alpha m_\alpha) + \\ +\beta L(Q\bar{m}_\beta m_\beta - R\bar{n}_\beta n_\beta)] + 2RQ(n_\alpha\bar{m}_\alpha - n_\beta\bar{m}_\beta) + (R^2 - Q^2)(\bar{n}_\beta m_\beta - \bar{n}_\alpha m_\alpha)\}\end{array}\right\}$$

$$I_4 = \bar{q}_\alpha\left(\frac{n_{1\beta} - n_{1\alpha}}{R_1}\right) + \left[\frac{q_\beta - q_\alpha}{(\beta - \alpha)L}\right]\left[\frac{(m_{1\alpha} - m_{1\beta}) + R_1L(\beta n_{1\beta} - \alpha n_{1\alpha})}{R_1^2}\right]$$

$$I_5 = \left\{\begin{array}{c}\bar{q}_\alpha\left[\frac{Q(m_\beta\bar{n}_\beta - m_\alpha\bar{n}_\alpha) + R(\bar{m}_\beta n_\beta - \bar{m}_\alpha n_\alpha)}{R^2 + Q^2}\right] + \left[\frac{q_\beta - q_\alpha}{(\beta - \alpha)L}\right]\left[\frac{1}{(R^2 + Q^2)^2}\right]\{(R^2 + Q^2)[-aL(R\bar{m}_\alpha n_\alpha + Qm_\alpha\bar{n}_\alpha) + \\ +\beta L(R\bar{m}_\beta n_\beta + Qm_\beta\bar{n}_\beta)] + (R^2 - Q^2)(m_\alpha\bar{m}_\alpha - m_\beta\bar{m}_\beta) + 2RQ(n_\alpha\bar{n}_\alpha - n_\beta\bar{n}_\beta)\}\end{array}\right\}$$

$$I_6 = \left\{\begin{array}{c}\bar{q}_\alpha\left[\frac{Q(\bar{m}_a n_a - \bar{m}_\beta n_\beta) + R(m_\beta\bar{n}_\beta - m_a\bar{n}_\alpha)}{R^2 + Q^2}\right] + \left[\frac{q_\beta - q_a}{(\beta - \alpha)L}\right]\left[\frac{1}{(R^2 + Q^2)^2}\right]\{(R^2 + Q^2)[\alpha L(Q\bar{m}_\alpha n_a - Rm_a\bar{n}_a) + \\ +\beta L(Rm_\beta\bar{n}_\beta - Q\bar{m}_\beta n_\beta)] + (R^2 - Q^2)(\bar{n}_\alpha n_a - \bar{n}_\beta n_\beta) + 2RQ(m_\beta\bar{m}_\beta - m_\alpha\bar{m}_\alpha)\}\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{llll} m_{1\alpha} = \cosh[R_1L(\alpha - 1)] & n_{1\alpha} = \sinh[R_1L(\alpha - 1)] & m_\alpha = \cosh[RL(\alpha - 1)] & n_\alpha = \sinh[RL(\alpha - 1)] \\ m_{1\beta} = \cosh[R_1L(\beta - 1)] & n_{1\beta} = \sinh[R_1L(\beta - 1)] & m_\beta = \cosh[RL(\beta - 1)] & n_\beta = \sinh[RL(\beta - 1)] \\ \bar{n}_\alpha = \sin[QL(\alpha - 1)] & \bar{n}_\beta = \sin[QL(\beta - 1)] & \bar{m}_\alpha = \cos[QL(\alpha - 1)] & \bar{m}_\beta = \cos[QL(\beta - 1)] \end{array}$$

- Για τον τρόπο με τον οποίο προκύπτουν οι εκφράσεις των V_2, V_{G2}, M_2 αλλά και για τα πρόσημα τους ισχύουν οι παρατηρήσεις που δίνονται για την περίπτωση φόρτισης από μοναχικό φορτίο. (Διευκρινίζεται μόνον ότι στις τριγωνομετρικές και στις υπερβολικές τριγωνομετρικές που υπεισέρχονται στις εκφράσεις των ολοκληρωμάτων I_1 – I_6 θα πρέπει να γίνει αλλαγή των ορισμάτων (α-1) και (β-1), με τα ορίσματα (-α) και (-β)).

Συναρτήσεις Μορφής με βάση τις Αλγεβρικές / Προσεγγιστικές Συναρτήσεις Παρεμβολής

$$[N_{wk}] = [f][R]^{-1} = [f][G]$$

$$[G] \equiv [R]^{-1}$$

$$[N_w] = [f][J_w]^T[R]^{-1} = [f][G_w]$$

$$[G_w] = [J_w]^T[R]^{-1}$$

$$[N_\psi] = [f][J_\psi]^T[R]^{-1} = [f][G_\psi]$$

$$[G_\psi] = [J_\psi][R]^{-1}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} & G_{16} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & G_{25} & G_{26} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} & G_{35} & G_{36} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} & G_{45} & G_{46} \\ G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{54} & G_{55} & G_{56} \\ G_{61} & G_{62} & G_{63} & G_{64} & G_{65} & G_{66} \end{bmatrix}$$

$$[f] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \end{bmatrix}$$

<u>Μητρώο [G]</u>

$$G_{11} = G_{12} = G_{14} = G_{15} = G_{16} = 0 \quad G_{13} = 1$$

$$G_{21} = -\frac{3crL}{GD_1D_2}\left[20EI(K_cL^2 - 48r) + 3\Phi L^2(K_cL^2 - 28r)\right] \quad G_{22} = \frac{L^2}{D_1D_2}\left[\Phi L^2(K_cL^2 - 36r) - 360EIr\right]$$

$$G_{23} = \frac{3r}{GLD_1D_2}\left\{cK_cL^2\left[20EI(K_cL^2 - 48r) + 3\Phi L^2(K_cL^2 - 28r)\right] + 20G(K_cL^2 - 12r)(12EI + \Phi L^2)\right\}$$

$$G_{24} = \frac{3crL}{GD_1D_2}\left[20EI(K_cL^2 + 24r) + \Phi L^2(K_cL^2 + 36r)\right] \quad G_{25} = \frac{24rL^2}{D_1D_2}\left(15EI + \Phi L^2\right)$$

$$G_{26} = -\frac{3r}{GLD_1D_2}\left\{cK_cL^2\left[20EI(K_cL^2 + 24r) + \Phi L^2(K_cL^2 + 36r)\right] + 20G(K_cL^2 - 12r)(12EI + \Phi L^2)\right\}$$

$$G_{32} = G_{34} = G_{35} = G_{36} = 0 \quad G_{31} = -\frac{c}{2G} \quad G_{33} = \frac{k+c}{2G}$$

$$G_{41} = \frac{3c}{2GLD_1D_2}\left[\Phi K_cL^4(K_cL^2 - 28r) - 320EIr(K_cL^2 - 3r)\right] \quad G_{42} = -\frac{6}{D_1D_2}\left[\Phi L^2(K_cL^2 - 20r) - 120EIr\right]$$

$$G_{43} = -\frac{K_c}{2GLD_1D_2}\left[20\Phi GL^2(K_cL^2 - 12r) + 3c\Phi K_cL^4(K_cL^2 - 28r) - 960cEIr(K_cL^2 - 3r)\right]$$

$$G_{44} = -\frac{c}{2GLD_1D_2}\left[480EIr(K_cL^2 + 6r) + \Phi K_cL^4(K_cL^2 + 36r)\right] \quad G_{45} = -\frac{4}{D_1D_2}\left[\Phi K_cL^4 + 180EIr\right]$$

$$G_{46} = \frac{K_c}{2GLD_1D_2}\left[20\Phi GL^2(K_cL^2 - 12r) + c\Phi K_cL^4(K_cL^2 + 36r) + 480cEIr(K_cL^2 + 6r)\right]$$

$$G_{51} = -\frac{3c}{2GD_1D_2}\left[\Phi K_cL^2(K_cL^2 - 10r) - 120r(EIK_c + \Phi r)\right] \quad G_{52} = \frac{8}{LD_1D_2}\left[\Phi L^2(K_cL^2 - 15r) - 45EIr\right]$$

$$G_{53} = \frac{3K_c}{2GD_1D_2}\left[10\Phi G(K_cL^2 - 12r) + c\Phi K_cL^2(K_cL^2 - 10r) - 120cr(EIK_c + \Phi r)\right]$$

$$G_{54} = \frac{\Phi}{GD_1D_2}\left[L^2(k+c)(K_cL^2 + 15r) + 180Gr\right] \quad G_{55} = \frac{1}{LD_1D_2}\left[\Phi L^2(7K_cL^2 - 60r) + 360EIr\right]$$

$$G_{56} = -\frac{K_c}{GD_1D_2}\left[15\Phi G(K_cL^2 - 12r) + c\Phi K_cL^2(K_cL^2 + 15r) + 180cr(EIK_c - \Phi r)\right]$$

$$G_{61} = -G_{64} = \frac{c\Phi}{2LD_2G}(K_cL^2 + 12r) \quad G_{62} = G_{65} = -\frac{3\Phi}{D_2} \quad G_{63} = -G_{66} = -\frac{\Phi K_c}{2GD_2L}\left[12G + c(K_cL^2 + 12r)\right]$$

$$D_1 = K_cL^2 - 12r \quad D_2 = \Phi K_cL^4 - 60r(12EI + \Phi L^2)$$

$$K_c = 1 + \frac{k}{c} \quad r = \frac{EI}{\Phi}\left(1 + \frac{k}{c}\right) - \frac{G}{c}$$

Μητρώο [G_w]

$$G_{w11} = 1 \quad G_{w12} = G_{w13} = G_{w14} = G_{w15} = G_{w16} = 0$$

$$G_{wij} = (1 + \frac{k}{c})G_{ij} - \left(\frac{2G}{c}\right)G_{(i+2)j} \quad (i = 1 \div 4 \quad j = 1 \div 6)$$

$$G_{wij} = (1 + \frac{k}{c})G_{ij} \quad (i = 5 \div 6 \quad j = 1 \div 6)$$

Μητρώο [G_ψ]

$$G_{\psi 11} = G_{\psi 13} = G_{\psi 14} = G_{\psi 15} = G_{\psi 16} = 0 \quad G_{\psi 12} = 1$$

$$G_{\psi ij} = 2\left(1 + \frac{k}{c}\right)G_{(i+1)j} + (24r)G_{(i+3)j} \quad (i = 2 \quad j = 1 \div 6)$$

$$G_{\psi ij} = 3\left(1 + \frac{k}{c}\right)G_{(i+1)j} + (60r)G_{(i+3)j} \quad (i = 3 \quad j = 1 \div 6)$$

$$G_{\psi ij} = 4\left(1 + \frac{k}{c}\right)G_{(i+1)j} \quad (i = 4 \quad j = 1 \div 6)$$

$$G_{\psi ij} = 5\left(1 + \frac{k}{c}\right)G_{(i+1)j} \quad (i = 5 \quad j = 1 \div 6)$$

$$G_{\psi 61} = G_{\psi 62} = G_{\psi 63} = G_{\psi 64} = G_{\psi 65} = G_{\psi 66} = 0$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Μητρώα Δυσκαμψίας και φόρτισης για δοκούς επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων.

Στο παράρτημα αυτό θα δοθούν οι κλειστές αναλυτικές εκφράσεις μητρώων δυσκαμψίας και φόρτισης δοκών Timoshenko επί ελαστικού υποβάθρου δυο παραμέτρων στα πλαίσια της θεωρίας β' τάξης.

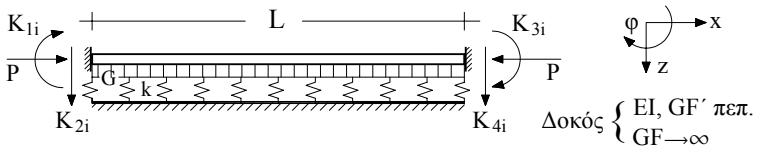
Όσον αφορά τα μητρώα δυσκαμψίας θα δοθούν οι συντελεστές τους για τις περιπτώσεις λύσης 1, 3 και 5 της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος (βλέπε Σχήμα 4.2, Παράγραφος 4.2.1). Τα μητρώο δυσκαμψίας για την περίπτωση 1 δίνεται για πρώτη φορά, ενώ το μητρώα για τις περιπτώσεις 3 και 5 είναι γνωστά από τη βιβλιογραφία, και εδώ παρατίθενται απλώς για λόγους πληρότητας.

Τα μητρώα φορτίου αφορούν δοκούς με στροφικά ελατήρια στα άκρα τους. Οι περιπτώσεις φόρτισης για τις οποίες δίνονται τα αντίστοιχα μητρώα είναι κατά σειρά:

- Μοναχική ροπή σε τυχούσα θέση του ανοίγματος,
- Μοναχικό κατακόρυφο φορτίο σε τυχούσα θέση του ανοίγματος,
- Συνεχής ομοιόμορφη φόρτιση σε όλο το εύρος του ανοίγματος,
- Ανομοιόμορφη θερμοκρασιακή μεταβολή Δt μεταξύ της άνω και της κάτω ίνας της δοκού, και
- Τραπεζοειδής φόρτιση σε τμήμα του ανοίγματος

Υπενθυμίζεται ότι τα μητρώα φορτίου που θα δοθούν αφορούν τις περιπτώσεις λύσης που έχουν πρακτικό ενδιαφέρον, δηλαδή οι Περιπτώσεις 1 και 3. Τέλος για διευκρινιστικούς λόγους θα πρέπει να τονιστεί ότι τόσο στα μητρώα δυσκαμψίας όσο και στα μητρώα φόρτισης που παρατίθενται, οι τέμνουσες δυνάμεις δεν είναι οι τέμνουσες των δοκών, αλλά οι γενικευμένες τέμνουσες (Βλέπε σχέση 4.14, Παράγραφος 4.2.2).

ΜΗΤΡΩΑ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ



$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ & & K_{33} & K_{34} \\ & \text{συμμ.} & & K_{44} \end{bmatrix}$$

Περίπτωση 1

$$K_{11} = K_{33} = \frac{EI[R(\Delta_1-\Delta_2)+Q(\Delta_1+\Delta_2)][(\Delta_1-\Delta_2)\bar{\nu}-(\Delta_1+\Delta_2)\bar{\mu}]}{2[(\Delta_1-\Delta_2)^2\nu^2-(\Delta_1+\Delta_2)^2\mu^2]}$$

$$K_{12} = -K_{34} = -\frac{2EI\Delta_1\Delta_2[Q(\Delta_1-\Delta_2)\nu^2+R(\Delta_1+\Delta_2)\mu^2]}{[(\Delta_1-\Delta_2)^2\nu^2-(\Delta_1+\Delta_2)^2\mu^2]}$$

$$K_{13} = -\frac{EI[R(\Delta_1-\Delta_2)+Q(\Delta_1+\Delta_2)][(\Delta_1-\Delta_2)\mu'\nu-(\Delta_1+\Delta_2)\mu\nu']}{[(\Delta_1-\Delta_2)^2\nu^2-(\Delta_1+\Delta_2)^2\mu^2]}$$

$$K_{14} = -K_{23} = \frac{2EI\Delta_1\Delta_2[Q(\Delta_1+\Delta_2)+R(\Delta_1-\Delta_2)]\mu\nu}{[(\Delta_1-\Delta_2)^2\nu^2-(\Delta_1+\Delta_2)^2\mu^2]}$$

$$K_{22} = K_{44} = \frac{\{4EIRQ\Delta_1\Delta_2+P_G[R(\Delta_1-\Delta_2)-Q(\Delta_1+\Delta_2)]\}[(\Delta_2-\Delta_1)\bar{\nu}-(\Delta_1+\Delta_2)\bar{\mu}]}{2[(\Delta_1-\Delta_2)^2\nu^2-(\Delta_1+\Delta_2)^2\mu^2]}$$

$$K_{24} = \frac{\{4EIRQ\Delta_1\Delta_2+P_G[R(\Delta_1-\Delta_2)-Q(\Delta_1+\Delta_2)]\}[(\Delta_1+\Delta_2)\mu\nu'+(\Delta_1-\Delta_2)\mu'\nu]}{[(\Delta_1-\Delta_2)^2\nu^2-(\Delta_1+\Delta_2)^2\mu^2]}$$

$$\Delta_{1/2} = \frac{1}{R\pm Q}\left[\theta(R\pm Q)^2+\frac{k}{\Phi}\right]$$

$$\begin{matrix} R \\ Q \end{matrix} = \sqrt{\left(\frac{P_G}{4EI\theta}-\frac{k}{4\Phi\theta}\right)\mp\sqrt{\frac{k}{4EI\theta}}}$$

$Z_1 = R + Q$ | $Z_2 = R - Q$

$\theta = 1 - \frac{P_G}{\Phi}$ | $P_G = P - G$ | $\Phi = GF'$

$\nu=\sin(RL)$	$\nu'=\cos(RL)$	$\mu=\sin(QL)$	$\mu'=\cos(QL)$	$\bar{\nu}=\sin(2RL)$	$\bar{\mu}=\sin(2QL)$

Περίπτωση 3

$$K_{11} = K_{33} = \frac{EI(\omega_2R+\omega_1Q)(mm'\omega_2-nn'\omega_1)}{(\omega_2^2m^2-\omega_1^2n^2)}$$

$$K_{12} = -K_{34} = \frac{EI(\omega_1^2+\omega_2^2)(Rn^2\omega_1+Qm^2\omega_2)}{(\omega_2^2m^2-\omega_1^2n^2)}$$

$$K_{13} = \frac{EI(\omega_2R+\omega_1Q)(nm'\omega_1-mn'\omega_2)}{(\omega_2^2m^2-\omega_1^2n^2)}$$

$$K_{14} = -K_{23} = -\frac{EI(\omega_1^2+\omega_2^2)(\omega_2R+\omega_1Q)mn}{(\omega_2^2m^2-\omega_1^2n^2)}$$

$$K_{22} = K_{44} = \frac{\{EI[(R^2-Q^2)\omega_2+2RQ\omega_1]+P_GQ\}(\omega_1^2nn'+\omega_1\omega_2mm')-\{EI[(R^2-Q^2)\omega_1-2RQ\omega_2]+P_GR\}(\omega_2^2mm'+\omega_1\omega_2nn')}{(\omega_2^2m^2-\omega_1^2n^2)}$$

$$K_{42} = \frac{\{EI[(R^2-Q^2)\omega_1-2RQ\omega_2]+P_GR\}(\omega_2^2mn'+\omega_1\omega_2nm')-\{EI[(R^2-Q^2)\omega_2+2RQ\omega_1]+P_GQ\}(\omega_1^2nm'+\omega_1\omega_2mn')}{(\omega_2^2m^2-\omega_1^2n^2)}$$

$$\omega_1 = \frac{RA_1+QA_2}{R^2+Q^2} \qquad \omega_2 = \frac{-QA_1+RA_2}{R^2+Q^2}$$

$$\begin{matrix} R \\ Q \end{matrix} = \sqrt{\sqrt{\frac{k}{4EI\theta}}\pm\left(\frac{k}{4\Phi\theta}-\frac{P_G}{4EI\theta}\right)}$$

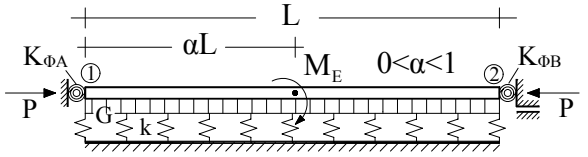
$A_1 = \theta(R^2-Q^2)-(k/\Phi)$

$A_2 = 2RQ\theta$

$n=\sin(QL)$	$n'=\cos(QL)$	$m=\sinh(RL)$	$m'=\cosh(RL)$

<u>ΜΗΤΡΩΑ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ</u> (Συνέχεια)	
<u>Περίπτωση 5</u>	
$K_{11} = K_{33} = \dfrac{2EI[\Gamma_2(R+Q)-\Gamma_1(R-Q)][(\Gamma_2-\Gamma_1)\overline{m}-(\Gamma_1+\Gamma_2)\overline{n}]}{2(\Gamma_2-\Gamma_1)^2\overline{m}'-2(\Gamma_1+\Gamma_2)^2\overline{n}'+8\Gamma_1\Gamma_2}$	$K_{13} = -\dfrac{4EI[\Gamma_2(R+Q)-\Gamma_1(R-Q)][\Gamma_2\nu'-\Gamma_1\nu]}{2(\Gamma_2-\Gamma_1)^2\overline{m}'-2(\Gamma_1+\Gamma_2)^2\overline{n}'+8\Gamma_1\Gamma_2}$
$K_{12} = -K_{34} = \dfrac{-4EI\Gamma_1\Gamma_2\{[\Gamma_2(R+Q)+\Gamma_1(R-Q)](-m^2-n^2)+(1/2)[\Gamma_1(R+Q)+\Gamma_2(R-Q)](\overline{m}'-\overline{n}')\}}{2(\Gamma_2-\Gamma_1)^2\overline{m}'-2(\Gamma_1+\Gamma_2)^2\overline{n}'+8\Gamma_1\Gamma_2}$	
$K_{42} = \dfrac{4\{4EIRQ\Gamma_1\Gamma_2+P_G[\Gamma_1(R+Q)-\Gamma_2(R-Q)]\}[\Gamma_1\nu'-\Gamma_2\nu]}{2(\Gamma_2-\Gamma_1)^2\overline{m}'-2(\Gamma_1+\Gamma_2)^2\overline{n}'+8\Gamma_1\Gamma_2}$	$K_{14} = -K_{23} = -\dfrac{8EI\Gamma_1\Gamma_2[\Gamma_2(R+Q)-\Gamma_1(R-Q)]mn}{2(\Gamma_2-\Gamma_1)^2\overline{m}'-2(\Gamma_1+\Gamma_2)^2\overline{n}'+8\Gamma_1\Gamma_2}$
$K_{22} = K_{44} = \dfrac{2\{-4EIRQ\Gamma_1\Gamma_2+P_G[\Gamma_2(R-Q)-\Gamma_1(R+Q)]\}[(\Gamma_1-\Gamma_2)\overline{m}-(\Gamma_1+\Gamma_2)\overline{n}]}{2(\Gamma_2-\Gamma_1)^2\overline{m}'-2(\Gamma_1+\Gamma_2)^2\overline{n}'+8\Gamma_1\Gamma_2}$	

$\begin{matrix}R\\Q\end{matrix} = \sqrt{\pm\sqrt{\dfrac{k}{4EI\theta}}+\left(\dfrac{k}{4\Phi\theta}-\dfrac{P_G}{4EI\theta}\right)}$		$\Gamma_{1/2} = \dfrac{1}{R\mp Q}\left[\theta(R\mp Q)^2-\dfrac{k}{\Phi}\right]$		$\theta = 1-\dfrac{P_G}{\Phi}$	P_G=P - G Φ=GF′
$\overline{m} = \sinh(2RL)$	$\overline{n} = \sinh(2QL)$	$m = \sinh(RL)$	$n = \sinh(QL)$	$\overline{m}' = \cosh(2RL)$	
$\overline{n}' = \cosh(2QL)$	$\nu = \sinh[(R+Q)L]$	$\nu' = \sinh[(R-Q)L]$			

ΤΥΠΟΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ: Μοναχική ροπή σε τυχούσα θέση	Μητρώο φόρτισης
 Δοκός $\begin{cases} EI,\ GF' \text{ πεπ.} \\ GF \to \infty \end{cases}$ α'=1-α	$q^T_{M_E} = \{M_1 \quad V_1 \quad M_2 \quad V_2\}$

$$M_1 = \frac{M_E}{D}\left[\frac{1}{K_{\Phi B}}\left(f_{wVL}f_{\psi\psi\alpha L} - f_{w\psi L}f_{wM\alpha L}\right) + \left(f_{wML}f_{wM\alpha L} - f_{wVL}f_{\psi M\alpha L}\right)\right]$$

$$V_1 = \frac{M_E}{D}\left[\left(\frac{f_{M\psi L}f_{wM\alpha L} - f_{w\psi L}f_{\psi\psi\alpha L}}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}}\right) + \left(\frac{f_{w\psi L}f_{\psi M\alpha L} - f_{\psi\psi L}f_{wM\alpha L}}{K_{\Phi A}}\right) + \left(\frac{f_{wML}f_{\psi\psi\alpha L} - f_{\psi\psi L}f_{wM\alpha L}}{K_{\Phi B}}\right) + \left(f_{\psi ML}f_{wM\alpha L} - f_{wML}f_{\psi M\alpha L}\right)\right]$$

$$D = \left(\frac{f_{M\psi L}f_{wVL} - f^2_{w\psi L}}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}}\right) + \left(\frac{1}{K_{\Phi A}} + \frac{1}{K_{\Phi B}}\right)\left(f_{w\psi L}f_{wML} - f_{\psi\psi L}f_{wVL}\right) + \left(f_{wVL}f_{\psi ML} - f^2_{wML}\right)$$

Περίπτωση 1

$$f_{w\psi L} = (\eta - \delta)\sin(RL)\cos(QL) + (\eta + \delta)\sin(QL)\cos(RL)$$
$$f_{wML} = 2\alpha\sin(RL)\sin(QL)$$
$$f_{wVL} = (\gamma - \zeta)\sin(RL)\cos(QL) - (\gamma + \zeta)\sin(QL)\cos(RL)$$
$$f_{\psi\psi L} = \cos(RL)\cos(QL) - (\eta\Delta_1 + \delta\Delta_2)\sin(RL)\sin(QL)$$
$$f_{\psi ML} = \alpha(\Delta_1 - \Delta_2)\sin(RL)\cos(QL) + \alpha(\Delta_1 + \Delta_2)\sin(QL)\cos(RL)$$

$$f_{M\psi L} = EI[(\eta\Delta_1 Z_1 - \delta\Delta_2 Z_2)\sin(RL)\cos(QL) + (\eta\Delta_1 Z_1 + \delta\Delta_2 Z_2)\sin(QL)\cos(RL)]$$
$$f_{wM\alpha L} = 2\alpha\sin(\alpha' RL)\sin(\alpha' QL)$$
$$f_{\psi\psi\alpha L} = \cos(\alpha' RL)\cos(\alpha' QL) - (\eta\Delta_1 + \delta\Delta_2)\sin(\alpha' RL)\sin(\alpha' QL)$$
$$f_{\psi M\alpha L} = \alpha(\Delta_1 - \Delta_2)\sin(\alpha' RL)\cos(\alpha' QL) + \alpha(\Delta_1 + \Delta_2)\cos(\alpha' RL)\sin(\alpha' QL)$$

$$\alpha = \frac{[EI\Delta_1\Delta_2(Z_1^2 - Z_2^2) + P_G(\Delta_1 Z_2 - \Delta_2 Z_1)]}{D_R} \qquad \beta = (EI\Delta_2 Z_2)\alpha \qquad \gamma = \frac{EI\Delta_1(\Delta_1 Z_1 - \Delta_2 Z_2)}{D_R} \qquad \varepsilon = (EI\Delta_1 Z_1)\alpha$$

$$\delta = \frac{EIZ_1(\Delta_1 Z_1 - \Delta_2 Z_2)(EI\Delta_1 Z_1 - P_G)}{D_R} \qquad \zeta = \frac{EI\Delta_2(\Delta_1 Z_1 - \Delta_2 Z_2)}{D_R} \qquad \eta = \frac{EIZ_2(\Delta_1 Z_1 - \Delta_2 Z_2)(EI\Delta_2 Z_2 - P_G)}{D_R}$$

$$D_R = -EI(\Delta_1 Z_1 - \Delta_2 Z_2)[EI\Delta_1\Delta_2(Z_1^2 - Z_2^2) + P_G(\Delta_1 Z_2 - \Delta_2 Z_1)]$$

Περίπτωση 3

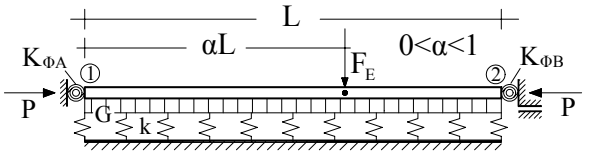
$$f_{w\psi L} = 2\beta\sinh(RL)\cos(QL) - 2\zeta\sin(QL)\cosh(RL)$$
$$f_{wML} = 2\gamma\sinh(RL)\sin(QL)$$
$$f_{wVL} = 2\alpha\sinh(RL)\cos(QL) - 2\delta\sin(QL)\cosh(RL)$$
$$f_{\psi\psi L} = \cosh(RL)\cos(QL) - 2(\zeta\omega_1 + \beta\omega_2)\sinh(RL)\sin(QL)$$
$$f_{\psi ML} = 2\gamma[\omega_2\sinh(RL)\cos(QL) + \omega_1\sin(QL)\cosh(RL)]$$

$$f_{M\psi L} = -2EI[(A_1\beta - A_2\zeta)\sinh(RL)\cos(QL) + (A_2\beta + A_1\zeta)\sin(QL)\cosh(RL)]$$
$$f_{wM\alpha L} = 2\gamma\sinh(\alpha' RL)\sin(\alpha' QL)$$
$$f_{\psi\psi\alpha L} = \cosh(\alpha' RL)\cos(\alpha' QL) - 2(\zeta\omega_1 + \beta\omega_2)\sinh(\alpha' RL)\sin(\alpha' QL)$$
$$f_{\psi M\alpha L} = 2\gamma[\omega_2\sinh(\alpha' RL)\cos(\alpha' QL) + \omega_1\cosh(\alpha' RL)\sin(\alpha' QL)]$$

$$\alpha = \frac{2EI\omega_2(\omega_1 Q + \omega_2 R)}{D_R} \qquad \beta = \frac{2EI(\omega_1 Q + \omega_2 R)\{EI[2RQ\omega_1 + (R^2 - Q^2)\omega_2] + P_G Q\}}{D_R} \qquad \gamma = \frac{1}{2EI(\omega_1 Q + \omega_2 R)}$$

$$\delta = \frac{2EI(\omega_2 R + \omega_1 Q)}{D_R} \qquad \varepsilon = \frac{(Q\omega_2 - R\omega_1)}{2(\omega_1 Q + \omega_2 R)} \qquad \zeta = \frac{2EI(\omega_1 Q + \omega_2 R)\{EI[(R^2 - Q^2)\omega_1 - 2RQ\omega_2] + P_G R\}}{D_R}$$

$$D_R = 4EI(\omega_1 Q + \omega_2 R)[2EIRQ(\omega_1^2 + \omega_2^2) + P_G(\omega_1 Q - \omega_2 R)]$$

ΤΥΠΟΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ: Μοναχικό κατακόρυφο φορτίο σε τυχούσα θέση	Μητρώο φόρτισης
 Δοκός $\begin{cases} EI, GF' \text{ πεπ.} \\ GF \to \infty \end{cases}$ α'=1-α	$q_{P_E}^T = \{M_1 \quad V_1 \quad M_2 \quad V_2\}$

$$M_1 = \frac{P_E}{D}\left[\frac{1}{K_{\Phi B}}\left(f_{w\psi L}f_{wV\alpha L} - f_{wVL}f_{MV\alpha L}\right) + \left(f_{wVL}f_{\psi V\alpha L} - f_{wML}f_{wV\alpha L}\right)\right]$$

$$V_1 = \frac{P_E}{D}\left[\left(\frac{f_{w\psi L}f_{MV\alpha L} - f_{M\psi L}f_{wV\alpha L}}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}}\right) + \left(\frac{f_{\psi\psi L}f_{wV\alpha L} - f_{w\psi L}f_{\psi V\alpha L}}{K_{\Phi A}}\right) + \left(\frac{f_{\psi\psi L}f_{wV\alpha L} - f_{wML}f_{MV\alpha L}}{K_{\Phi B}}\right) + \left(f_{wML}f_{\psi V\alpha L} - f_{\psi ML}f_{wV\alpha L}\right)\right]$$

$$D = \left(\frac{f_{M\psi L}f_{wVL} - f_{w\psi L}^2}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}}\right) + \left(\frac{1}{K_{\Phi A}} + \frac{1}{K_{\Phi B}}\right)\left(f_{w\psi L}f_{wML} - f_{\psi\psi L}f_{wVL}\right) + \left(f_{wVL}f_{\psi ML} - f_{wML}^2\right)$$

<u>Περίπτωση 1</u>

$f_{w\psi L} = (\eta - \delta)\sin(RL)\cos(QL) + (\eta + \delta)\sin(QL)\cos(RL)$ $f_{wML} = 2\alpha\sin(RL)\sin(QL)$ $f_{wVL} = (\gamma - \zeta)\sin(RL)\cos(QL) - (\gamma + \zeta)\sin(QL)\cos(RL)$ $f_{\psi\psi L} = \cos(RL)\cos(QL) - (\eta\Delta_1 + \delta\Delta_2)\sin(RL)\sin(QL)$ $f_{\psi ML} = \alpha(\Delta_1 - \Delta_2)\sin(RL)\cos(QL) + \alpha(\Delta_1 + \Delta_2)\sin(QL)\cos(RL)$	$f_{M\psi L} = EI[(\eta\Delta_1 Z_1 - \delta\Delta_2 Z_2)\sin(RL)\cos(QL) +$ $+ (\eta\Delta_1 Z_1 + \delta\Delta_2 Z_2)\sin(QL)\cos(RL)]$ $f_{wV\alpha L} = (\gamma - \zeta)\sin(\alpha' RL)\cos(\alpha' QL) - (\gamma + \zeta)\sin(\alpha' QL)\cos(\alpha' RL)$ $f_{\psi V\alpha L} = (\gamma\Delta_2 + \zeta\Delta_1)\sin(\alpha' RL)\sin(\alpha' QL)$ $f_{MV\alpha L} = -EI(\zeta\Delta_1 + \gamma\Delta_2)[Q\sin(\alpha' RL)\cos(\alpha' QL) +$ $+ R\cos(\alpha' RL)\sin(\alpha' QL)]$

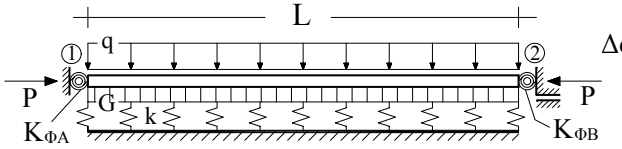
<u>Περίπτωση 3</u>

$f_{w\psi L} = 2\beta\sinh(RL)\cos(QL) - 2\zeta\sin(QL)\cosh(RL)$ $f_{wML} = 2\gamma\sinh(RL)\sin(QL)$ $f_{wVL} = 2\alpha\sinh(RL)\cos(QL) - 2\delta\sin(QL)\cosh(RL)$ $f_{\psi\psi L} = \cosh(RL)\cos(QL) - 2(\zeta\omega_1 + \beta\omega_2)\sinh(RL)\sin(QL)$ $f_{\psi ML} = 2\gamma[\omega_2\sinh(RL)\cos(QL) + \omega_1\sin(QL)\cosh(RL)]$	$f_{M\psi L} = -2EI[(A_1\beta - A_2\zeta)\sinh(RL)\cos(QL) +$ $+ (A_2\beta + A_1\zeta)\sin(QL)\cosh(RL)]$ $f_{wV\alpha L} = 2\alpha\sinh(\alpha' RL)\cos(\alpha' QL) - 2\delta\cosh(\alpha' RL)\sin(\alpha' QL)$ $f_{\psi V\alpha L} = -2(\delta\omega_1 + \alpha\omega_2)\sinh(\alpha' RL)\sin(\alpha' QL)$ $f_{MV\alpha L} = -2EI[(\alpha A_1 - \delta A_2)\sinh(\alpha' RL)\cos(\alpha' QL) -$ $-(\alpha A_2 + \delta A_1)\cosh(\alpha' RL)\sin(\alpha' QL)]$

(Οι εκφράσεις των υπόλοιπων παραμέτρων που υπεισέρχονται στις παραπάνω σχέσεις δίνονται στον πίνακα των μητρώων δυσκαμψίας).

Στους παραπάνω πίνακες δόθηκαν μόνον οι συντελεστές M_1, V_1 των μητρώων φόρτισης. Οι συντελεστές M_2, V_2 προκύπτουν από τους M_1, V_1 με τη βοήθεια των παρακάτω μετασχηματισμών:

- Αμοιβαία εναλλαγή των σταθερών των στροφικών ελατηρίων (δηλαδή του $K_{\Phi A}$ με το $K_{\Phi B}$ και αντίστροφα)
- Αντικατάσταση των ορισμάτων των τριγωνομετρικών και υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων (α΄QL) και (α΄RL) όπου αυτές υπεισέρχονται, από τα ορίσματα (αQL) και (αRL) αντίστοιχα. [Υπενθυμίζεται ότι ο αδιάστατος αριθμός (α) προσδιορίζει τη θέση της μοναχικής φόρτισης (δύναμης ή ροπής) από το άκρο (1) του στοιχείου, και ότι α΄+α=1).
- Αλλαγή του πρόσημου στις εκφράσεις των ροπών και διατήρηση του στις αντίστοιχες εκφράσεις των τεμνουσών για την περίπτωση φόρτισης από μοναχική δύναμη, και αλλαγή προσήμου για τις τέμνουσες και διατήρηση του για τις εκφράσεις των ροπών για την περίπτωση φόρτισης από μοναχική ροπή.

ΤΥΠΟΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ: Συνεχής ομοιόμορφη φόρτιση	Μητρώο φόρτισης
 Δοκός $\begin{cases} EI,\ GF' \text{ πεπ.} \\ GF \to \infty \end{cases}$	$q_q^T = \{M_1 \quad V_1 \quad M_2 \quad V_2\}$

Περίπτωση 1

$$M_1 = -\frac{2EIq\Delta_1\Delta_2}{kD_Q}(R\mu - Q\nu)\left\{\frac{EI}{K_{\Phi B}}(\mu' - \nu')[\Delta_1(R+Q) - \Delta_2(R-Q)] + [(\Delta_1+\Delta_2)\mu - (\Delta_1-\Delta_2)\nu]\right\}$$

$$V_1 = \frac{EIq\Delta_1\Delta_2}{kD_Q}\left[\frac{EI}{K_{\Phi A}}(F_1+F_2)+F_3\right] - \frac{P_G q}{kD_Q}\left[\frac{EI}{K_{\Phi A}}(F_{1P}+F_{2P})+F_{3P}\right]$$

$$D_Q = -\frac{(EI)^2}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}}(\nu^2-\mu^2)[(\Delta_1-\Delta_2)R+(\Delta_1+\Delta_2)Q]^2 + \frac{EI}{2}\left(\frac{1}{K_{\Phi A}}+\frac{1}{K_{\Phi B}}\right)[(\Delta_1-\Delta_2)R+(\Delta_1+\Delta_2)Q][(\Delta_1-\Delta_2)\bar{\nu}-(\Delta_1+\Delta_2)\bar{\mu}] +$$
$$+[(\Delta_1-\Delta_2)^2\nu^2-(\Delta_1+\Delta_2)^2\mu^2]$$

$$F_1 = -2\left\{[\Delta_2(R-Q)^2-\Delta_1(R+Q)^2]\nu\mu' + [\Delta_2(R-Q)^2+\Delta_1(R+Q)^2]\nu'\mu\right\}\left\{\left[\frac{EI}{K_{\Phi B}}(R^2-Q^2)\nu - R\nu'\right]\mu + Q\nu\mu'\right\}$$

$$F_2 = 2\left[\frac{EI}{K_{\Phi B}}(R^2-Q^2)A_1 - A_2\right]\{[\Delta_1(R+Q)-\Delta_2(R-Q)](1-\mu'\nu') - [\Delta_1(R+Q)+\Delta_2(R-Q)]\mu\nu\}$$

$A_1 = Q\mu'\nu - R\mu\nu'$	$A_2 = (R^2+Q^2)\mu\nu + 2RQ\mu'\nu'$

$$F_3 = -4RQ\left\{(\mu'-\nu')[(\Delta_1-\Delta_2)\nu-(\Delta_1+\Delta_2)\mu] + \frac{EI}{K_{\Phi B}}[[\Delta_1(R+Q)-\Delta_2(R-Q)][\mu'\nu'+\mu^2-(\nu')^2] - [\Delta_1(R+Q)+\Delta_2(R-Q)]\mu\nu]\right\}$$

$$F_4 = \Delta_1\Delta_2\left\{4\mu\nu\left[\frac{EI}{K_{\Phi B}}(R^2-Q^2)A_1 - 2RQ\mu'\nu'\right] + 4[R^2\mu^2(\nu')^2 + Q^2\nu^2(\mu')^2]\right\}$$

$$F_5 = \{[\Delta_1(R+Q)-\Delta_2(R-Q)](1-\mu'\nu') - [\Delta_1(R+Q)+\Delta_2(R-Q)]\mu\nu\}\left\{\begin{matrix}[\Delta_1(R-Q)-\Delta_2(R+Q)]\mu'\nu' - [\Delta_1(R-Q)+\Delta_2(R+Q)]\mu\nu - \\ -\frac{EI}{K_{\Phi B}}(R^2-Q^2)[(\Delta_1-\Delta_2)\mu'\nu + (\Delta_1+\Delta_2)\mu\nu']\end{matrix}\right\}$$

$$F_6 = [\Delta_1(R-Q)-\Delta_2(R+Q)]\left\{(\mu'-\nu')[(\Delta_1-\Delta_2)\nu-(\Delta_1+\Delta_2)\mu] + \frac{EI}{K_{\Phi B}}\left[\begin{matrix}[\Delta_1(R+Q)-\Delta_2(R-Q)](\mu'\nu'+\mu^2-(\nu')^2) - \\ -[\Delta_1(R+Q)+\Delta_2(R-Q)]\mu\nu\end{matrix}\right]\right\}$$

ν=sin(RL)	ν΄=cos(RL)	μ=sin(QL)	μ΄=cos(QL)

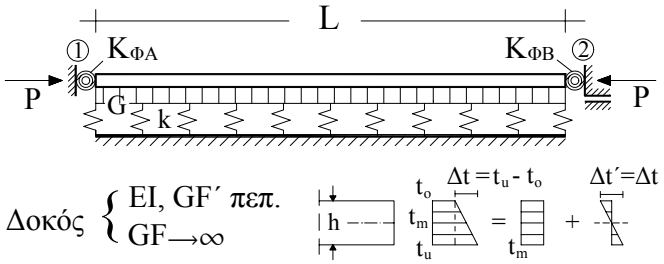
(Οι εκφράσεις των υπόλοιπων παραμέτρων που υπεισέρχονται στις παραπάνω σχέσεις δίνονται στον πίνακα των μητρώων δυσκαμψίας).

- Η ροπή M_2 προκύπτει από την έκφραση της ροπής M_1 με αμοιβαία εναλλαγή των σταθερών των στροφικών ελατηρίων (δηλαδή του $K_{\Phi A}$ με το $K_{\Phi B}$ και αντίστροφα) και ταυτόχρονη αλλαγή του πρόσημου. Αντιστοίχως προκύπτει και η τέμνουσα V_2 από την έκφραση της V_1 χωρίς όμως αλλαγή προσήμου.

Συνεχής ομοιόμορφη φόρτιση (Συνέχεια)			
<u>Περίπτωση 3</u>			
$M_1 = -\frac{4EIq}{kD_Q}\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)\left(Rn-Qm\right)\left[\frac{EI}{K_{\Phi B}}(\omega_2 R+\omega_1 Q)\left(n'-m'\right)+\left(\omega_1 n-\omega_2 m\right)\right]$			
$V_1 = \frac{4q}{kD_Q}\left\{EI(\omega_1^2+\omega_2^2)\left[\frac{(EI)^2}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}}F_1-\frac{EI}{K_{\Phi A}}F_2+\frac{EI}{K_{\Phi B}}F_3-F_4\right]+P_G\left[\frac{(EI)^2}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}}F_{1P}+\frac{EI}{K_{\Phi A}}F_{2P}-\frac{EI}{K_{\Phi B}}F_{3P}+F_{4P}\right]\right\}$			
$D_Q = \frac{(2EI)^2}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}}\left(\omega_2 R+\omega_1 Q\right)^2\left(m^2+n^2\right)+4EI\left[\frac{1}{K_{\Phi A}}+\frac{1}{K_{\Phi B}}\right]\left(\omega_2 R+\omega_1 Q\right)\left(\omega_2 m\, m'-\omega_1 n\, n'\right)+4\left(\omega_2^2 m^2-\omega_1^2 n^2\right)$			
$F_1 = \left(R^2+Q^2\right)\left(\omega_2 R+\omega_1 Q\right)\left(n'-m'\right)\left(Rn+Qm\right)$	$F_2 = \left(R^2-Q^2\right)\left(\omega_1 n-\omega_2 m\right)\left(Qm-Rn\right)+2RQ\left(n'-m'\right)\left(\omega_1 Qn'-\omega_2 Rm'\right)$		
$F_3 = 2RQ\left[\left(\omega_1 n-\omega_2 m\right)\left(Rm+Qn\right)+\left(\omega_1 Qm'-\omega_2 Rn'\right)\left(n'-m'\right)\right]$	$F_4 = 2RQ\left(n'-m'\right)\left(\omega_1 n-\omega_2 m\right)$		
$F_{1P} = \left(R^2+Q^2\right)\left(\omega_2 R+\omega_1 Q\right)\left(n'-m'\right)\left(\omega_1 n-\omega_2 m\right)$			
$F_{2P} = \left(\omega_1 n-\omega_2 m\right)\left(R^2\omega_1 n-Q^2\omega_2 m\right)-\left(\omega_2 R+\omega_1 Q\right)\left(n'-m'\right)\left(R\omega_2 m'+Q\omega_1 n'\right)-RQ\left(\omega_1 m+\omega_2 n\right)\left(\omega_1 n+\omega_2 m\right)$			
$F_{3P} = \left(\omega_2 R-\omega_1 Q\right)\left[\left(Rm+Qn\right)\left(\omega_1 n-\omega_2 m\right)+\left(n'-m'\right)\left(\omega_1 Qm'-\omega_2 Rn'\right)\right]$	$F_{4P} = \left(\omega_2 R-\omega_1 Q\right)\left(n'-m'\right)\left(\omega_1 n-\omega_2 m\right)$		
n=sin(QL)	n΄=cos(QL)	m=sinh(RL)	m΄=cosh(RL)

(Οι εκφράσεις των υπόλοιπων παραμέτρων που υπεισέρχονται στις παραπάνω σχέσεις δίνονται στον πίνακα των μητρώων δυσκαμψίας).

- Η ροπή M_2 προκύπτει από την έκφραση της ροπής M_1 με αμοιβαία εναλλαγή των σταθερών των στροφικών ελατηρίων (δηλαδή του $K_{\Phi A}$ με το $K_{\Phi B}$ και αντίστροφα) και ταυτόχρονη αλλαγή του πρόσημου. Αντιστοίχως προκύπτει και η τέμνουσα V_2 από την έκφραση της V_1 χωρίς όμως αλλαγή προσήμου.

ΤΥΠΟΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ: Ανομοιόρφη μεταβολή θερμοκρασίας Δt	Μητρώο φόρτισης
	$q_{\Delta t}^{T} = \{M_1 \quad V_1 \quad M_2 \quad V_2\}$

Περίπτωση 1

$$M_1 = \frac{(EI)^2 \alpha \Delta t}{hD_{\Delta t}}\left[\Delta_1(R+Q)-\Delta_2(R-Q)\right]\left\{\begin{array}{l}\frac{EI}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}}\left(\nu^2-\mu^2\right)\left[\Delta_1(R+Q)-\Delta_2(R-Q)\right]-\nu(\Delta_1-\Delta_2)\left[\frac{\nu'}{K_{\Phi A}}+\frac{\mu'}{K_{\Phi B}}\right]+\\ +\mu(\Delta_1+\Delta_2)\left[\frac{\mu'}{K_{\Phi A}}+\frac{\nu'}{K_{\Phi B}}\right]\end{array}\right\}+\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$$

$$V_1 = \frac{(EI)^2 \alpha \Delta t}{hD_{\Delta t}}\left\{\Delta_2(R-Q)^2\left[\frac{F_1}{K_{\Phi A}}-\frac{F_2}{K_{\Phi B}}\right]+\Delta_1(R+Q)^2\left[\frac{F_3}{K_{\Phi A}}+\frac{F_4}{K_{\Phi B}}\right]\right\}-\frac{(EI)P_G\alpha\Delta t}{hD_{\Delta t}}\left\{\begin{array}{l}(R-Q)\left[\frac{F_1}{K_{\Phi A}}-\frac{F_2}{K_{\Phi B}}\right]+\\ +(R+Q)\left[\frac{F_3}{K_{\Phi A}}+\frac{F_4}{K_{\Phi B}}\right]\end{array}\right\}$$

$$F_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{EI}{K_{\Phi B}}\right)(\bar{\nu}+\bar{\mu})\left[(\Delta_1-\Delta_2)R+(\Delta_1+\Delta_2)Q\right]+(\Delta_1+\Delta_2)\mu^2+(\Delta_1-\Delta_2)\nu^2$$

$$F_2 = \frac{EI}{K_{\Phi A}}\left[(\Delta_1-\Delta_2)R+(\Delta_1+\Delta_2)Q\right](\nu\mu'+\mu\nu')+2\Delta_1\mu\nu$$

$$F_4 = \frac{EI}{K_{\Phi A}}\left[(\Delta_1-\Delta_2)R+(\Delta_1+\Delta_2)Q\right](\nu\mu'-\mu\nu')+2\Delta_2\mu\nu$$

$$F_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{EI}{K_{\Phi B}}\right)(\bar{\nu}-\bar{\mu})\left[(\Delta_1-\Delta_2)R+(\Delta_1+\Delta_2)Q\right]+(\Delta_1+\Delta_2)\mu^2-(\Delta_1-\Delta_2)\nu^2$$

$D_{\Delta t} \equiv D_Q$

ν=sin(RL)	ν΄=cos(RL)	μ=sin(QL)	μ΄=cos(QL)	$\bar{\nu}$ = sin(2RL)	$\bar{\mu}$ = sin(2QL)

Περίπτωση 3

$$M_1 = \frac{(EI)^2 \alpha \Delta t}{hD_{\Delta t}}(\omega_2 R+\omega_1 Q)\left\{\begin{array}{l}\frac{2EI}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}}(\omega_2 R+\omega_1 Q)\left[\left((n')^2-n^2\right)-\left((m')^2+m^2\right)\right]+\\ +4\omega_1 n\left(\frac{n'}{K_{\Phi A}}+\frac{m'}{K_{\Phi B}}\right)-4\omega_2 m\left(\frac{m'}{K_{\Phi A}}+\frac{n'}{K_{\Phi B}}\right)\end{array}\right\}+\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$$

$$V_1 = -\frac{4EI\alpha\Delta t}{hD_{\Delta t}}\left\{\frac{EI}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}}(\omega_2 R+\omega_1 Q)(n'-m')\left[(EI)F_1+P_G(nR+mQ)\right]+\left[(P_G)F_2+(EI)F_3\right]\right\}$$

$$F_1 = \left(R^2-Q^2\right)(n\omega_1+m\omega_2)+2RQ(m\omega_1-n\omega_2)$$

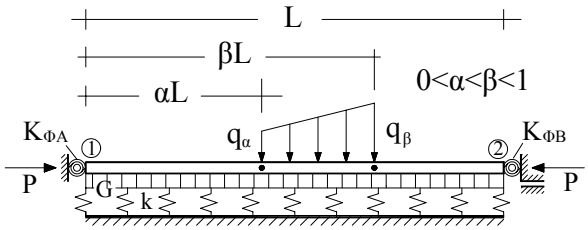
$$F_2 = R\left[\left(\frac{\omega_1}{K_{\Phi A}}\right)n^2-\left(\frac{\omega_2}{K_{\Phi B}}\right)mn\right]-Q\left[\left(\frac{\omega_2}{K_{\Phi A}}\right)m^2-\left(\frac{\omega_1}{K_{\Phi B}}\right)mn\right]$$

$$F_3 = \frac{1}{K_{\Phi A}}\left(R^2-Q^2\right)\left(\omega_1^2 n-\omega_2^2 m\right)-2RQ\left\{\omega_2 n\left[\left(\frac{\omega_1 n}{K_{\Phi A}}\right)-\left(\frac{\omega_2 m}{K_{\Phi B}}\right)\right]+\omega_1 m\left[\left(\frac{\omega_2 m}{K_{\Phi A}}\right)-\left(\frac{\omega_1 n}{K_{\Phi B}}\right)\right]\right\}$$

$D_{\Delta t} \equiv D_Q$

n=sin(QL)	n΄=cos(QL)	m=sinh(RL)	m΄=cosh(RL)

- Οι εκφράσεις των υπόλοιπων παραμέτρων που υπεισέρχονται στις παραπάνω σχέσεις δίνονται στον πίνακα των μητρώων δυσκαμψίας.

ΤΥΠΟΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ: Τραπεζοειδής φόρτιση σε τμήμα του ανοίγματος	Μητρώο φόρτισης
 Δεδομένα Δοκού $\begin{cases} \text{EI, GF΄ πεπ.} \\ \text{GF}\rightarrow\infty \end{cases}$ α'=1-α β'=1-β	$q_{Tr}^{T} = \{M_1 \quad V_1 \quad M_2 \quad V_2\}$

$$M_1 = \frac{2}{D}\left\{\frac{1}{K_{\Phi B}}\left[(\alpha I_\alpha - \delta I_\beta)f_{w\psi L} - (\beta I_\alpha - \zeta I_\beta)f_{wVL}\right] + \left[(\gamma I_\gamma)f_{wVL} - (\alpha I_\alpha - \delta I_\beta)f_{wML}\right]\right\}$$

$$V_1 = \frac{2}{D}\left[\begin{array}{l}\left[\dfrac{(\beta I_\alpha - \zeta I_\beta)f_{w\psi L} - (\alpha I_\alpha - \delta I_\beta)f_{M\psi L}}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}}\right] + \left[\dfrac{(\alpha I_\alpha - \delta I_\beta)f_{\psi\psi L} - (\gamma I_\gamma)f_{w\psi L}}{K_{\Phi A}}\right] + \\ + \left[\dfrac{(\alpha I_\alpha - \delta I_\beta)f_{\psi\psi L} - (\beta I_\alpha - \zeta I_\beta)f_{wML}}{K_{\Phi B}}\right] + \left[(\gamma I_\gamma)f_{wML} - (\alpha I_\alpha - \delta I_\beta)f_{\psi ML}\right]\end{array}\right]$$

$$D = \left(\frac{f_{M\psi L}f_{wVL} - f_{w\psi L}^2}{K_{\Phi A}K_{\Phi B}}\right) + \left(\frac{1}{K_{\Phi A}} + \frac{1}{K_{\Phi B}}\right)\left(f_{w\psi L}f_{wML} - f_{\psi\psi L}f_{wVL}\right) + \left(f_{wVL}f_{\psi ML} - f_{wML}^2\right)$$

Οι εκφράσεις ολοκληρωμάτων I_α, I_β, I_γ εξαρτώνται από την περίπτωση λύσης. Για την πρακτικά πιο χρήσιμη περίπτωση δηλαδή την Περίπτωση 3, λαμβάνουν τις παρακάτω τιμές:

$$I_\alpha = \left\{\begin{array}{l}\bar{q}_\alpha\left[\dfrac{R(\bar{m}_\alpha m_\alpha - \bar{m}_\beta m_\beta) + Q(\bar{n}_\alpha n_\alpha - \bar{n}_\beta n_\beta)}{R^2 + Q^2}\right] + \left[\dfrac{q_\beta - q_\alpha}{(\beta-\alpha)L}\right]\left[\dfrac{1}{(R^2+Q^2)^2}\right]\{(R^2+Q^2)[\alpha L(R\bar{m}_\alpha m_\alpha + Q\bar{n}_\alpha n_\alpha) - \\ \qquad - \beta L(R\bar{m}_\beta m_\beta + Q\bar{n}_\beta n_\beta)] + 2RQ(\bar{n}_\beta m_\beta - \bar{n}_\alpha m_\alpha) + (R^2 - Q^2)(n_\beta \bar{m}_\beta - n_\alpha \bar{m}_\alpha)\}\end{array}\right\}$$

$$I_\beta = \left\{\begin{array}{l}\bar{q}_\alpha\left[\dfrac{R(\bar{n}_\alpha n_\alpha - \bar{n}_\beta n_\beta) - Q(\bar{m}_\alpha m_\alpha - \bar{m}_\beta m_\beta)}{R^2 + Q^2}\right] + \left[\dfrac{q_\beta - q_\alpha}{(\beta-\alpha)L}\right]\left[\dfrac{1}{(R^2+Q^2)^2}\right]\{(R^2+Q^2)[\alpha L(R\bar{n}_\alpha n_\alpha - Q\bar{m}_\alpha m_\alpha) + \\ \qquad + \beta L(Q\bar{m}_\beta m_\beta - R\bar{n}_\beta n_\beta)] + 2RQ(n_\alpha \bar{m}_\alpha - n_\beta \bar{m}_\beta) + (R^2 - Q^2)(\bar{n}_\beta m_\beta - \bar{n}_\alpha m_\alpha)\}\end{array}\right\}$$

$$I_\gamma = \left\{\begin{array}{l}\bar{q}_\alpha\left[\dfrac{Q(\bar{m}_a n_a - \bar{m}_\beta n_\beta) + R(m_\beta \bar{n}_\beta - m_a \bar{n}_\alpha)}{R^2 + Q^2}\right] + \left[\dfrac{q_\beta - q_a}{(\beta-\alpha)L}\right]\left[\dfrac{1}{(R^2+Q^2)^2}\right]\{(R^2+Q^2)[\alpha L(Q\bar{m}_\alpha n_a - Rm_a \bar{n}_a) + \\ \qquad + \beta L(Rm_\beta \bar{n}_\beta - Q\bar{m}_\beta n_\beta)] + (R^2 - Q^2)(\bar{n}_\alpha n_a - \bar{n}_\beta n_\beta) + 2RQ(m_\beta \bar{m}_\beta - m_\alpha \bar{m}_\alpha)\}\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{llll} m_\alpha = \cosh[RL(\alpha-1)] & m_\beta = \cosh[RL(\beta-1)] & \bar{m}_\alpha = \cos[QL(\alpha-1)] & \bar{n}_\alpha = \sin[QL(\alpha-1)] \\ n_\alpha = \sinh[RL(\alpha-1)] & n_\beta = \sinh[RL(\beta-1)] & \bar{m}_\beta = \cos[QL(\beta-1)] & \bar{n}_\beta = \sin[QL(\beta-1)] \end{array} \quad \bar{q}_\alpha = q_\alpha - \left(\frac{q_\beta - q_\alpha}{(\beta-\alpha)L}\right)(\alpha L)$$

Για τις τιμές των παραμέτρων που υπεισέρχονται στις παραπάνω σχέσεις, για τον τρόπο με τον οποίο προκύπτουν οι τιμές των συντελεστών M_2, V_2 αλλά και για τα πρόσημα τους, ισχύουν οι παρατηρήσεις που δίνονται για το μητρώο φόρτισης που αντιστοιχεί σε μοναχική κατακόρυφη δύναμη.

ENGLISH SUMMARY

The study of structure – foundation system is very important field of investigation for the civil engineers. In order to face the problems that arise from the study of those systems, one must model the members of foundation structures, the soil, as well as the type of interaction between the soil and the foundation elements.

The problem when modeling soil as an elastic subgrade has been investigated in the present study. Moreover, the modeling of the structural elements of the foundation has also been dealt with. As far as the problem of soil modeling is concerned, the ability to use approximate mechanical soil models has been investigated. By means of these models, one can achieve in the most simple and easy way the most precise description of the soil's properties. As far as the problem of modeling of foundation structural elements is concerned, a generalized beam element was developed which incorporates for the first time a series of attributes, which can only be separately found in various elements that are available in the bibliography. Finally, as far as the problem of the interaction between soil and structure – foundation system is concerned, the present investigation ends with the development of calculation "tools" that can be used for the study of unilateral support problems. In all other cases, the assumption of bilateral support is valid.

From the investigation of the soil models a conclusion is reached, namely that there are models that achieve soil behavior in a way that is more precise than Winkler's hypothesis, but at the same time not particularly complex. The models referred to are the two and three parameter models. The main characteristic of these models is the ability to consider the shear stresses in the elastic subgrade. Therefore, consideration of the soil's influence on either side of the structure – foundation systems is possible. So, the problem of the bending of beams resting on a Kerr type three-parameter elastic foundation was solved and investigated in the present research. Kerr's model offers the option to introduce in the calculations the consideration of soil on either side of the structure – foundation systems, but also the potential of more precise simulation of stress distribution in the common soil-structure surface. Based on the equations of the Kerr model, stiffness and transfer matrices, as well as load vectors for Euler and Timoshenko beam elements, were developed. In order to calculate the parameters of the Kerr model, an analytical procedure for estimating these parameters was developed. This was based on the application of modified Vlasov's model for the estimation of the two out of three parameters, whereas for the third parameter a procedure based on the development of relation formula that connects this third parameter to the other two is suggested.

Regarding the generalized beam element that was developed, it incorporates rigid offsets in one of the two in or both ends, and semi-rigid connections. The proposed element rests on one, two or three parameter elastic subgrades. Moreover, the equations of the new element have been developed on its deformed axis, with the consequence that the aforementioned element can be used in elastic stability problems. Finally, the equations of the new element are based on the analytical solution of the underlying differential equation, which governs the bending of beams on elastic foundation. Thus, by using this new element, a great variety of problems concerning the modeling of a structure can be dealt with, in an easy and reliable way.

The final section of the present investigation gives a number of numerical examples by means of which, one can carry out the comparative evaluation of one, two or three foundation models, and at the same time, check the reliability of the suggested generalized element. The basic conclusions that have been reached by evaluating the numerical examples are the following:

- The consideration of the soil's influence on either side of the structure – foundation system is essential in order to achieve a reliable estimation of the vertical displacements of the structures. This consideration materializes only through the use of Kerr's three-parameter foundation model, or of Vlasov's two-parameter foundation model.
- The Kerr model achieves even greater accuracy in the estimation of vertical displacements, as well as all other displacements. Its accuracy is due to the form of the mechanical model on which it is based, as well as on the effectiveness of the methodology that was developed for estimating of its parameters.
- Apart from strains, the Kerr model yields stresses more effectively than the models of the one and two parameters in the overwhelming majority of the examples. The Pasternak two parameter model (without the influence of the soil on either side of the structures) and the Vlasov two parameter model (with the influence of the soil on either side of the structures) are satisfactory according to the case under consideration. The Winkler model proves to be unreliable in all cases. The above conclusions should be evaluated in combination with the methodology for estimating elastic foundation parameters.
- The suggested generalized beam element proves reliable in the study of various modeling problems for a structure. Furthermore, the simplicity with which the new element achieves the above mentioned modeling problems is made clear, as the element is based on the exact solutions of the equations governing the bending of beams resting on elastic foundation.